УДК 519.7

О.Н. ВОСКОБОЙНИК, В.В. ИВАЩЕНКО

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПРОЦЕДУРЫ КОМПАРАТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассматриваются вопросы оптимального с точки зрения эксперимента набора характеристических свойств линейных предикатов. Изучаются все возможные наборы свойств для разных типов операторов, действующих в конечномерных эквивалентах или бесконечномерных гильбертовых пространствах.

В работах [1,2] показано, что если линейное пространство является метрическим, то в некоторых ситуациях свойство однородности следует заменить на свойство непрерывности линейного предиката. Если сузить класс рассматриваемых линейных операторов, ограничившись теми, у которых имеется конечномерный образ, то следует ввести в рассмотрение свойство n-мерности.

Определение 1. Назовем линейный предикат $E(x, y)$ n-мерным, если он обладает следующим свойством: существует набор $e_1, e_2, .., e_n$ линейно-независимых векторов из L такой, что для любого вектора $x \in L$ найдется единственный набор элементов поля $P\ \alpha_1(X), \alpha_2(X), ..., \alpha_n(X)$, для которого

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(X) e_i\right) = 1.$$

Само свойство будем называть n-мерностью.

Определение 2. Назовем предикат E, заданный на $\langle L, P \rangle$, где L – метрическое пространство, непрерывным, если он n-мерен и функционали, участвующие в свойстве n-мерности, непрерывны в метрике L.

Будем говорить в таком случае, что предикат E обладает свойством непрерывности.

Нетрудно показать, что в некоторых ситуациях свойства непрерывности и однородности эквивалентны (L и P являются метрическими пространствами и L – конечномерно), в некоторых имеет смысл говорить только об однородности (L или P не метрические пространства) и наконец, когда L бесконечномерно, то однородности уже недостаточно для линейного оператора F, а следовательно, и предиката E. В этом случае может быть использована только непрерывность. Ниже мы будем исследовать набор, содержащий непрерывность. Объясняется это следующими причинами. Одна из них состоит в том, что анализ большого числа практических ситуаций, проведенный в работах [3,4], приводит к заключению, что случай метрических пространств широко распространен и является достаточно типичным. С другой стороны, как уже отмечалось, иногда свойства непрерывности и однородности эквивалентны и их нет смысла различать. Наконец, внимательный читатель сможет убедиться в том, что схема исследования одного из наборов, которая приведена ниже, аналогичным образом может быть проведена и для другого набора.

Таким образом, будем считать, что набор характеристических свойств (в дальнейшем будем их называть аксиомами) линейных предикатов включает в себя: *рефлексивность*, *симметричность*, *транзитивность*, *аддитивность*, *n-мерность и непрерывность*.

Естественные требования, предъявляемые к любой аксиоматике, состоят в ее непротиворечивости, полноте и независимости. С этой точки зрения рассматриваемая нами аксиоматика удовлетворяет первым двум условиям. Это является следствием доказанных в [2] аксиом, где данный набор выступает в качестве необходимых и достаточных условий линейности предиката E. Заметим, что необходимость фактически свидетельствует о непротиворечивости, а достаточность – о полноте. Условие независимости достаточно полно не исследовалось. Основная цель работы заключается в восполнении этого пробела и в получении в некоторых частных случаях более простых формулировок аксиом.

Следует сказать, что независимость интересна не только сама по себе, но и имеет важный практический смысл. Процедура компараторной идентификации подразумевает экспериментальную проверку соответствующего набора аксиом для предиката E, поэтому естественно стремление к постановке наиболее оптимального (по затратам) эксперимента. В этом смысле только независимые наборы могут обеспечивать оптимальность. Поскольку именно они не содержат "лишних" свойств, вытекающих из остальных, это означает, что в эксперименте мы проверяем самое необходимое и принципиально упростить его невозможно.

Таким образом, исследуем аксиоматику линейных предикатов на независимость. Независимость одной аксиомы от других может быть показана тогда, когда существует предикат, не обладающий этой аксиомой, но обладающий всеми остальными, поэтому доказательство независимости выглядит в виде примеров предикатов для каждой аксиомы. С другой стороны, зависимость подразумевает вывод этой аксиомы из остальных. Сначала остановимся на этой части вопроса.

Утверждение 1. Произвольный предикат E, заданный на $\langle L, P\rangle$ (L, P -метрические пространства) и удовлетворяющий аксиомам рефлексивности, аддитивности, n-мерности и непрерывности, является симметричным и транзитивным.

Доказательство. Допустим, для какой-либо пары $x, y \in L$ имеет место $E(x, y) = 1$. Заметим, что для произвольных x и y аддитивность и n-мерность влечет следующую цепочку равенств:

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) e_i\right) = I,$$

$$E\left(y, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y) e_i\right) = I \Rightarrow E\left(x + y, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) + \alpha_i(y)] e_i\right) = I.$$

Единственность коэффициентов α_i означает, что $\alpha_i(x+y) = \alpha_i(x) + (y)$, а так как эти функционалы непрерывны, то они и однородны, следовательно, $\alpha_i(-x) = -\alpha_i(x)$. Используя это обстоятельство из равенства $E(x, y) = I$, на базе рефлексивности и аддитивности получим

$$E(x, y) = 1, E(-y, -y) = 1 \Rightarrow E(x - y, 0) = 1.$$

С учетом n-мерности делаем вывод, что $\alpha_i(x - y) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Но тогда $\alpha_i(y - x) = 0$ (из однородности), $i = I, \ldots, n$, т.е. $E(y - x, 0) = I$ или $E(x, y) = I$. Это и есть симметричность предиката E.

Докажем транзитивность. Пусть для трех элементов $x, y, z \in L$ имеет место $E(x, y) = I$, $E(y, z) = I$. Тогда, как было показано выше, $\alpha_i(x - y) = \alpha_i(y - z) = 0$, $i = 1, \ldots, n$ или $\alpha_i(x - z) = 0$, т.е. $E(x, y) = I$. Это говорит о транзитивности предиката и справедливости всего утверждения.

Утверждение 2. Произвольный предикат E, заданный на $\langle L, P\rangle$, удовлетворяющий аксиомам симметричности, транзитивности и n-мерности, рефлексивен.

Доказательство. Действительно, для произвольного $x \in L$ и предиката, удовлетворяющего условиям утверждения, имеет место следующая цепочка:

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)e_i\right) = I \Rightarrow E\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)e_i\right) = 1 \Rightarrow E(x,x) = 1,$$

т.е. предикат рефлексивен.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что из аксиоматики линейных предикатов без всякого ущерба можно "выбросить" либо условие рефлексивности, либо условия симметричности и транзитивности. Возникает вопрос: являются ли полученные таким образом два набора аксиом линейных предикатов независимыми? Утвердительный ответ на него можно получить, рассмотрев следующие предикаты. В качестве $\langle L, P\rangle$ выберем n-мерное евклидово пространство R_m и зафиксируем в нем ортонормированный базис $u_1,\ldots,u_m$. Рассмотрим предикаты вида:

1. $E_1(x,y) = D_{R_m}(x, 2y), D_{R_m}(.,.)$– предикат равенства на $R_m \times R_m$;

2. $E_2(x,y) = D_{R_n}(Fx, Fy), F: R_m \to R_n, Fx = (f_1x,\ldots,f_nx)$ и

$f_R x = (x, u_R)[1 + (x, u_{n+1})]$, где $n < m$, а (x,y) – обозначение скалярного произведения векторов из R_m;

3. $E_3(x,y) \equiv 1$;

4. $E_4(x,y) = D_{R_m}(Fx, Fy)$, $F: R_m \to R_n, Fx = (f_1x,\ldots,f_nx)$ и $f_r x = (x, u_r) + g(x)$, где g – аддитивный, но разрывный функционал на линейной оболочке векторов $u_{n+1},\ldots,u_m$;

5. $E_5(x,y) = D_{R_m}(Fx, Fy)\cdot c(y)$, $F: R_m \to R_n, Fx = (f_1x,\ldots,f_nx)$ и $f_R x = (x, u_R)$,

где $c(y) = \begin{cases} 1, y \in \zeta(u_1,\ldots,u_n) \\ 0, y \notin \zeta(u_1,\ldots,u_n) \end{cases}$, $L(u_1,\ldots,u_n)$ – линейная оболочка векторов $u_1,\ldots,u_n$;

6. $E_6(x,y) = D_{R_m}(F_1x, F_2y)$, $F_1, F_2: R_m \to R_n$, $F_1x = (f_1x,\ldots,f_nx)$

и $F_2x = (f_nx, f_2x,\ldots,f_{n-1}x, f_1x)$, $f_R x = (x, u_R)$.

Каждый из приведенных предикатов обладает всеми свойствами, кроме одного из двух выделенных нами наборов аксиом. В этом нетрудно убедиться непосредственной проверкой, которая приводится в работах [1,2]. Мы лишь приведем таблицу, в которой строки соответствуют предикатам, а столбцы свойствам. Если в соответствующей строке и столбце стоит знак "+", то данный предикат этим свойством обладает, если – "-", то наоборот.

Из таблицы ясно, что первый набор, состоящий из свойств под номерами 1, 4, 5, 6, независим, так как в первых четырех строках в соответствующих столбцах стоит три "+" и один "-" (кроме третьей строки, когда непрерывность не имеет смысла без n-мерности). Аналогично второй набор (свойства под номерами 2, 3, 4, 5, 6) удовлетворяет этому условию, в чем можно убедиться, рассмотрев строки 2, 3, 4, 5, 6.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Предикат $E(x,y)$, заданный на $\langle L, P\rangle$, линеен (L, P – метрические пространства) тогда и только тогда, когда удовлетворяет одному из наборов аксиом:*

Номер строки	1	2	3	4	5	6
Свойства / Предикаты	Рефлексивность	Симметричность	Транзитивность	Аддитивность	n-мерность	Непрерывность
E_1	–	–	–	+	+	+
E_2	+	+	+	–	+	+
E_3	+	+	+	+	–	не имеет смысла
E_4	+	+	+	+	+	–
E_5	–	–	+	+	+	+
E_6	–	+	–	+	+	+

1) рефлексивность, аддитивность, n-мерность, непрерывность;

2) симметричность, транзитивность, аддитивность, n-мерность, непрерывность.

При этом оба эти набора независимы, т.е. несократимы.

Замечание. Рассмотрим один частный случай. Пусть $\dim L = n$, а предикат E, заданный на $\langle L, P \rangle$, рефлексивен и n-мерен. Тогда, зафиксировав любой базис $e_1,\ldots,e_n$ в L, из рефлексивности следует $E(x,x)=1$, но $x=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ (x_i - i-я координата в базисе $e_1,\ldots,e_n$), т.е. $E\left(x, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = I$. Это означает, что $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x) e_i$, т.е. $E(x,y)=1$ тогда и только тогда, когда $x=y$. Следовательно, E является предикатом равенства на $\langle L, P \rangle$. В этом случае его можно считать линейным и он обладает всеми свойствами теоремы 1. В условиях этой, в определенном смысле вырожденной ситуации теорема 1 неверна, поэтому ранее оговаривавшиеся условия $\dim L > n$ существенны. В противном случае рефлексивность и n-мерность являются характеристическими свойствами линейного предиката, однако с практической точки зрения эта ситуация не представляет интереса, поскольку оператор F при таких условиях является единичным, т.е. все оставляет на месте.

Полученные выше несократимые наборы аксиом, строго говоря, в эксперименте проверить невозможно. Действительно, например аксиома рефлексивности подразумевает выполнение равенства $E(x,x)=1$ для любого $x \in L$. Но L, как правило, состоит из бесконечного числа элементов, поэтому свойство рефлексивности для всех них проверить в эксперименте нельзя. Тем не менее можно использовать широко распространенный в экспериментальных исследованиях подход, когда сигналы подаются разнородные и случайным образом, а окончательный вывод делается на последующей статистической обработке результатов. В компараторной идентификации такая процедура при изучении психофизических систем описана в работах [1,2]. Однако при некоторых, достаточно общих ограничениях переформулировка аксиом линейных предикатов позволяет в эксперименте частично снять описанную выше проблему.

Предположим, что $\dim L = m < \infty$. В этом случае, как уже отмечалось выше, свойства непрерывности и однородности эквивалентны, поэтому ниже будем использовать однородность, поскольку так нам будет удобней. Зафиксируем в L базис $u_1,\ldots,u_m$.

Определение 3. Будем говорить, что предикат E, заданный на $\langle L, P\rangle$, обладает свойствами *базисной рефлексивности, базисной n-мерности и базисной аддитивности*, если в L существует базис $u_1,\dots,u_m$, на элементах которого предикат рефлексивен и n-мерен, а также из равенства $E(x, y) = 1$ вытекает равенство $E(x + u_i, y + u_i) = 1 \quad i =,\dots, m.$

Подчеркнем, что определение рефлексивности на элементах базиса означает базисную рефлексивность, аналогичная ситуация с n-мерностью; базисная аддитивность устанавливается концовкой определения 3. В дальнейшем для краткости перед базисными свойствами будем писать букву "δ" (например, δ-рефлексивность).

Определение 4. Будем говорить, что предикат E, заданный на $\langle L, P\rangle$, обладает *свойством ограниченной транзитивности* (о – транзитивность), если для произвольных $x, y \neq 0$, принадлежащих L, из равенств $E(x,0) = E(y,0) = 1$ вытекает $E(x, y) = 1.$

Ниже будет показано, что базисные и ограниченные свойства могут при определенных условиях заменить обычные. С точки зрения экспериментальной проверки это важно, поскольку подобная замена позволяет осуществить проверку аксиом либо на конечном числе элементов, либо в условиях меньшего количества степеней свободы.

Теорема 2. *Для предиката* E*, заданного на* $\langle L, P\rangle$ $\dim L = m < \infty$*, наборы свойств:*

1) δ-рефлексивность, δ-n - мерность, аддитивность, однородность;

2) о – транзитивность, δ-n - мерность, δ- аддитивность, однородность эквивалентны наборам условий теоремы 1.

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $x \in L$ и его разложение по базису $x = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m$. Тогда из δ-рефлексивности и однородности будем иметь набор равенств $E(x_i u_i, x_i u_i) = 1, \quad i = 1,\dots, m$. Суммируя эти равенства на основе аддитивности, получаем $E(x, x) = 1$. Это свойство обычной рефлексивности, так как оно верно для любого $x \in L$.

Теперь установим n-мерность. Для этого покажем, что если для каких-либо элементов поля $(\tau_1,\dots,\tau_n) \in P$ выполняется равенство $E\left(0, \sum_{i=1}^{n} \tau_i e_i\right) = 1$, то $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = 0$. Действительно, пусть $E\left(0, \sum_{i=1}^{n} \tau_i e_i\right) = 1$. На основании δ-n-мерности можем записать $E\left(u_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(u_j) e_i\right) = 1, \quad f = 1,\dots, m$ и, используя аддитивность, получим $E\left(u_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(u_j) + \tau_i)\right) e_i = 1, \quad f = 1,\dots, m$; поскольку коэффициенты в свойстве n-мерности единственны, то

$$\alpha_i(u_i) + \tau_i = \alpha_i(u_j), \quad i = 1,\dots, n, f = 1,\dots, m.$$

Отсюда вытекает, что $\tau_1 = \tau_2 = \tau_n = 0$.

Из δ-n-мерности и однородности для $x = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m$ следует набор равенств

$$E\left(x_j u_j, \sum_{i=1}^{n} x_j \alpha_j(u_j) e_i\right)=1, f=1,\dots,m.$$

Суммируя их по аддитивности, получаем

$$E\left(\sum_{j=1}^{n} x_j u_j, \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_j u_j) e_i\right)=1.$$

Учитывая однородность и аддитивность $\alpha_i(\cdot)$, $i=1,\dots,n$, на элементах базиса окончательно запишем

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) e_i\right)=1.$$

Осталось показать, что коэффициенты α_i находятся единственным образом. Допустим, что найдется еще один набор коэффициентов $\{\beta_i\}_{i=1}^{n}$, отличный от предыдущего, для которого справедливо $E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) e_i\right)=1$. Тогда на основании однородности и аддитивности можно записать $E\left(0, \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(x)-\beta_i(x)) e_i\right)=1$. Отсюда по ранее доказанному имеем $\alpha_i(x)=\beta_i(x)$, $i=1,\dots,n$. Свойство n-мерности полностью доказано.

Таким образом, набор 1) теоремы 2 эквивалентен набору 1) теоремы 1. Покажем, что этому условию удовлетворяют вторые наборы.

Используя однородность при $\lambda=0$, получаем $E(0,0)=1$. Тогда из δ-аддитивности следует, что $E(u_i,u_i)=1$, $i=1,\dots,m$, т.е. о – рефлексивность. Остановимся теперь на аддитивности.

Пусть $E(x,y)=1$, а $z\in L$ и $z=\sum_{i=1}^{m} z_i u_i$. Тогда однородность и δ-аддитивность позволяет написать

$$E\left(z_1^{-1}x, z_1^{-1}y\right)=1, \quad E\left(z_1^{-1}x+u_1, z_1^{-1}y+u_1\right)=1,$$

$$E(x+z_1u_1, y+z_1u_1)=1.$$

Продолжив эту процедуру для $z_2,\dots,z_m$, окончательно получим

$$E(x+z, y+z)=1, \; x=x_1u_1+\dots+x_mu_m.$$

Тогда для произвольного вектора получим

$$E(x_1u_1, x_1u_1)=1, \quad E(x_1u_1+x_2u_2, x_1u_1+x_2u_2)=1,$$

$$\dots, E(x_1u_1+\dots+x_mu_m, x_1u_1+\dots+x_mu_m)=1,$$

т.е. $E(x,x)=1$ – рефлексивность.

Теперь допустим $E(x,y)=1$, $E(u,v)=1$. Из рефлексивности можно записать $E(-y,-y)=1$, $E(-v,-v)=1$, $E(x-y,0)=1$, $E(v-u,0)=1$. Применяя о-транзитивность, получаем $E(x-y,u-v)=1$. Добавляя теперь к каждому из аргументов сначала y, а затем u, получаем

$$E(x+u, y+v)=1,$$

что означает аддитивность.

Ранее было показано, что в этом случае вытекает обычная n-мерность, симметричность и транзитивность предиката. Таким образом, теорема 2 доказана.

Поскольку наборы теоремы 1 являются несократимыми характеристическими свойствами линейного предиката, то из доказанной выше теоремы 2 следует, что наборы свойств теоремы 2 также являются характеристическими и несократимыми (в качестве примеров предикатов для доказательства этого факта могут быть использованы предикаты, приведенные выше). При этом все свойства претерпели изменения, кроме однородности. Естественно поставить вопрос: можно ли изменить однородность? Имеется в виду, что необходимо проверить на равенство только конечное число компараторных векторов. Если бы выполнялась такая ситуация, то в случае бесконечного поля P (а на практике, как правило, именно так, например вещественные числа) получилось бы, что всякое вещественное число можно заменить конечной суперпозицией фиксированных чисел, что невозможно. Поэтому упростить в описанном выше смысле свойство однородности не удается.

Подводя итоги, можно сказать, что нами получены наиболее оптимальные наборы характеристических свойств линейных предикатов, позволяющих решать задачу структурной идентификации линейных операторов компараторным способом.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта: Проблемы и перспективы. Т.3. Харьков, Выща шк., 1987. 158 с. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П., Рвачов В.Л., Мурашко А.Г.* Математичні моделі зору. К.: Техніка, 1966. 95 с. 3. *Герасин С.Н.* Математические модели процессов сенсорной факторизации и применение для идентификации линейных систем методом сравнения // Дисс. канд. техн. наук. Харьков, 1989. 134 с. 4. *Шляхов В.В.* Математические модели линейных процессов рецепсии и их технические приложения // Дисс. канд. техн. наук. Харьков, 1984. 138 с.

Поступила в редколлегию 02.12.2000

Воскобойник Олег Николаевич, соискатель ХТУРЭ. Научные интересы: математические методы анализа сложных систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-72.

Иващенко Валерий Владимирович, соискатель ХТУРЭ. Научные интересы: математические методы анализа сложных систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-72.