О СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ОБЪЕКТОВ ПО ДАННЫМ НОРМАЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Б. И. Мокин, Э. Г. Файнштейн

Кривой Рог

Важным этапом разработки систем автоматического регулирования (САР) является определение динамических характеристик объектов автоматизации. Для этой цели разработаны различные методы, основанные как на активном эксперименте, так и на анализе данных нормальной эксплуатации производственных объектов.

Методы, использующие результаты активного эксперимента, имеют невысокую точность. Кроме того, проведение последнего связано с введением специальных возмущений, что в производственных условиях не всегда целесообразно, а иногда и невозможно.

Статистические же методы основаны на анализе данных нормальной эксплуатации объектов, и им присуща большая точность. Поэтому совершенствованию известных и разработке новых статистических методов уделяется все большее внимание.

Наиболее широкий класс статистических методов определения динамических характеристик линейных объектов основан на решении во временной области интегрального уравнения Винера — Хопфа

$$R_{yx}(\tau) = \int_0^\infty R_x(\tau - \theta)\, g(\theta)\, d\theta, \qquad (1)$$

где $g(t)$ — импульсная переходная функция объекта;

$R_x(\tau)$ — корреляционная функция процесса на входе объекта $x(t)$;

$R_{yx}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция эргодических стационарных случайных процессов на выходе объекта $y(t)$ и на входе объекта $x(t)$.

Поскольку известны только оценки статистических характеристик $R_x(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$, решение уравнения (1) относительно $g(t)$ сопряжено с ошибками, которые связаны также с трудностью решения уравнения вследствие его некорректности.

Для решения уравнения (1) во временной области обычно используется квантование во времени и интеграл заменяется суммой [1]. Наряду с тем, что много времени затрачивается на вычислительную работу, решение задачи с приемлемой точностью этим путем представляет значительную трудность, так как при малом шаге квантования значения корреляционных функций в соседних точках мало различаются, а при большом шаге увеличивается ошибка, связанная с заменой интеграла суммой.

Существенно упростить вычислительную процедуру можно, одновременно уменьшив ошибку, если сделать допущение о том, что исследуемые объекты описываются линейными дифференциальными уравнениями не выше второго порядка. В большинстве задач автоматического управления такая аппроксимация дает результаты, вполне приемлемые для практики.

Изложенное ниже относится к устойчивым линейным объектам с одним входом, на который поступает сигнал, представляющий собой эргодический стационарный случайный процесс, некоррелированный с внутренними помехами и центрированной корреляционной функцией (в дальнейшем термин «центрированная» опущен).

Зная аналитические выражения для переходных функций объектов $h(t)$, время τ_1, по истечении которого $h(\tau_1) = \gamma h(\infty)$ $(0 < \gamma < 1)$, аналитические выражения для корреляционных функций $R_x(\tau)$ и время τ_2, по истечении которого $R_x(\tau_2) = \lambda R_x(0)$ $(0 < \lambda < 1)$, нетрудно построить графики, с помощью которых определяются динамические характеристики объектов.

Динамические свойства линейных объектов, описываемых дифференциальными уравнениями первого и второго порядков, характеризуются тремя постоянными: коэффициентом усиления K, постоянной времени T и относительным коэффициентом затухания ξ. Коэффициент K может быть вычислен как отношение математических ожиданий выходного m и входного m_x процессов [3]:

$$K = \frac{m_y}{m_x}. \tag{2}$$

Постоянная T, а в случае объектов, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка, и параметр ξ могут быть определены с помощью графиков и расчетных выражений, для получения которых удобно перейти к корреляционным функциям,

$$r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}, \tag{3}$$

$$r_{yx}(\tau) = \frac{R_{yx}(\tau)}{KR_x(0)}, \tag{4}$$

нормированным импульсной переходной функции

$$\eta(t) = \frac{g(t)}{K} \tag{5}$$

и переходной функции

$$\mu(t) = \frac{h(t)}{h(\infty)} = \frac{h(t)}{K}. \tag{6}$$

Использовав (3) — (5), из выражения (1) получим

$$r_{yx}(\tau) = \int_0^\infty r_x(\tau - \theta)\,\eta(\theta)\,d(\theta). \tag{7}$$

Так как корреляционные функции эргодических процессов затухают практически до нуля на конечном интервале времени T_0, то в формуле (7) можно перейти к конечным пределам интегрирования

$$r_{yx}(\tau) \approx \int_0^{T_0} r_x(\tau - \theta)\,\eta(\theta)\,d\theta. \tag{8}$$

Введем выражения для переходных функций объектов с учетом (6)

$$\mu(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \tag{9}$$

для объектов, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка, и

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{r_2}{r_2 - r_1} e^{-r_1 \frac{t}{T}} + \dfrac{r_1}{r_2 - r_1} e^{-r_2 \frac{t}{T}} & \text{при } \xi > 1 \\ 1 - \left(1 + \dfrac{t}{T}\right) e^{-\frac{t}{T}} & \text{при } \xi = 1 \\ 1 - \dfrac{1}{r} e^{-\xi \frac{t}{T}} \sin\left(r \dfrac{t}{T} + \varphi\right) & \text{при } \xi < 1 \end{cases} \tag{10}$$

для объектов, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка [1].

Введем обозначения $\rho = \frac{\tau_1}{T}$, $\omega = \frac{\tau_2}{T}$, $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$ и зададимся численным значением γ и λ. В дальнейшем для определенности принято $\gamma = 0{,}95$, $\lambda = 0{,}025$. Естественно, чем больше γ и меньше λ, тем точнее последующие результаты, однако, учитывая погрешности, вносимые графическими построениями, как правило, достаточно ограничиться указанными значениями.

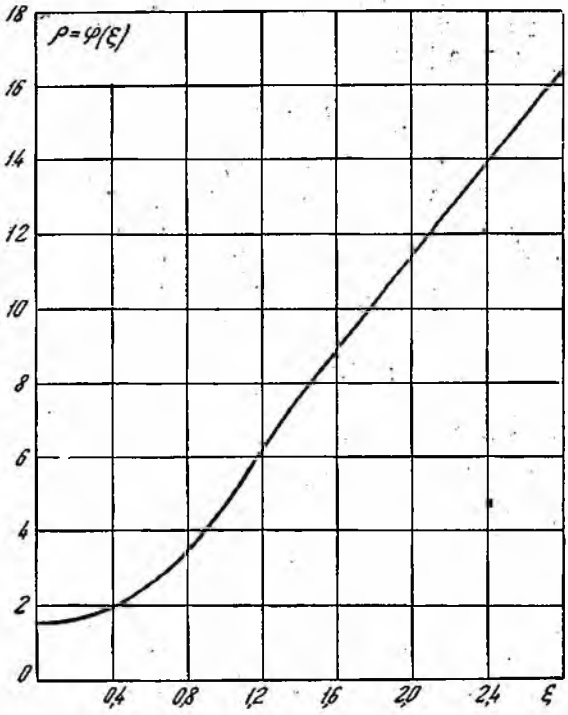

Рис. 1. Зависимость $\rho = \varphi(\xi)$.

Подставим $\mu(\rho) = \gamma = 0{,}95$ в выражения (9) и (10) и определим ρ. Для объектов, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка,

$$\rho = -\ln 0{,}05 = 3,$$

а второго порядка

$$\rho = \varphi(\xi). \tag{11}$$

График зависимости (11), рассчитанный по уравнениям (10), изображен на рис. 1. Установлено, что при $\xi \geqslant 2$ зависимость (11) представляет собой прямую

$$\rho = 11{,}46 + 6{,}14(\xi - 2).$$

Рассмотрим теперь наиболее часто встречающиеся случаи, когда корреляционная функция входного процесса аппроксимируется выражением

$$r_x(\tau) = \frac{1}{R_x(0)} \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta_i \tau^2}, \tag{12}$$

или

$$r_x(\tau) = \frac{1}{K_x(0)} \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\alpha_i|\tau|}. \qquad (13)$$

Для получения расчетных выражений в формулах (12) и (13) положим $n = 1$ и подставим их поочередно в уравнение (8). Подставляя в (8) также соответствующие выражения для $\eta(t)$ [2] и решая его для различных τ, установим, что при $\omega = \text{const}$

$$r_{yx}(\tau) = f(\omega) = \text{const}. \qquad (14)$$

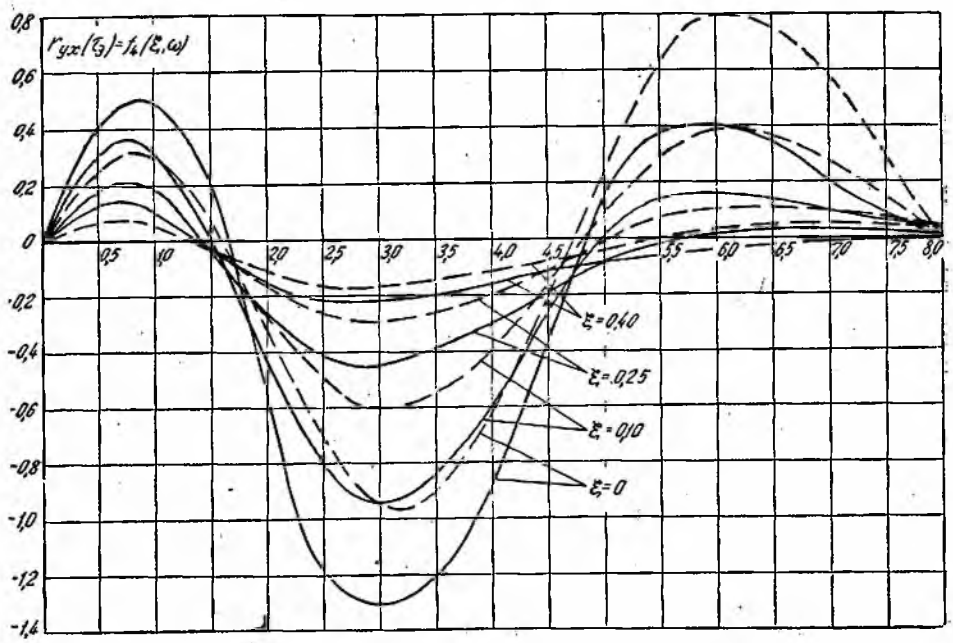

Рис. 2. Зависимость значения взаимной корреляционной функции в момент времени τ_3 от ξ, ω при корреляционной функции вида $r_x(\tau) = e^{-\beta\tau^2}$ (сплошные линии) и $r_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ (штриховые): $\xi = 0 \div 0{,}4$.

На рис. 2—5 сплошными линиями изображены графики зависимостей

$$r_{yx}(0) = f_1(\omega), \quad r_{yx}(\tau_3) = f_2(\omega)$$

для объектов, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка, и

$$r_{yx}(0) = f_3(\xi, \omega), \quad r_{yx}(\tau_3) = f_4(\xi, \omega)$$

для объектов, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка, рассчитанных по уравнению (8) при $r_x(\tau) = e^{-\beta\tau^2}$. На тех же рисунках штриховыми линиями показаны такие же зависимости при $r_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$. Диапазон изменения ω принят равным 0—8, а диапазон изменения ξ — 0—9, так как практически не встречаются реальные объекты с параметрами ω, ξ, выходящими за эти пределы. Функции $f_3(\xi, \omega)$, $f_4(\xi, \omega)$ для значений ξ, отличных от принятых при построении графиков, легко определяются интерполированием.

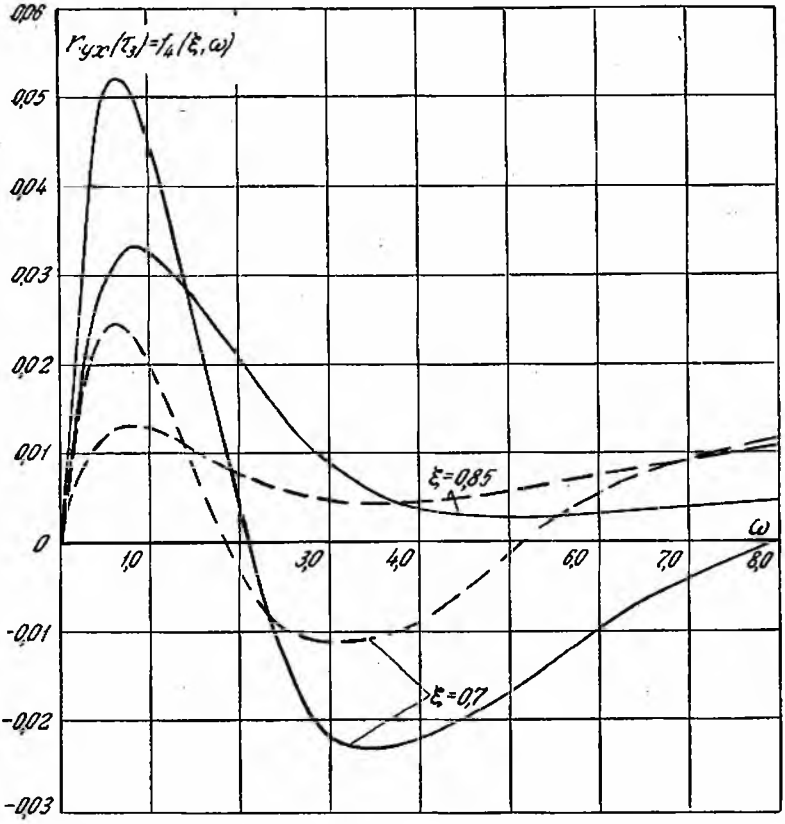

Рис. 3. Зависимость значения взаимной корреляционной функции в момент времени τ_3 ξ, ω при корреляционной функции вида $r_x(\tau) = e^{-\beta\tau^2}$ (сплошные линии) и $r_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ (штриховые): $\xi = 0{,}7 \div 0{,}85$.

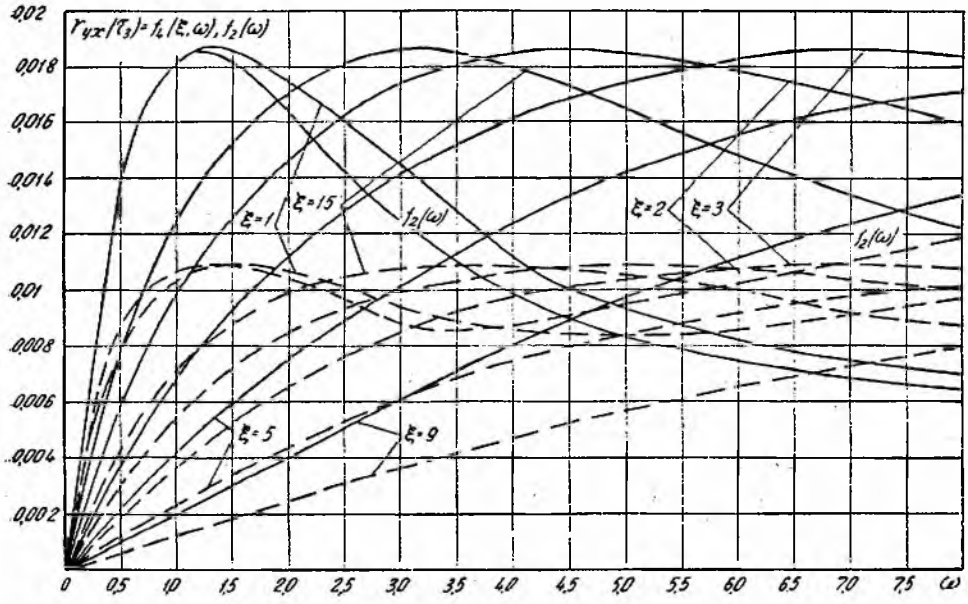

Рис. 4. Зависимость значения взаимной корреляционной функции в момент времени τ_3 от ξ, ω при корреляционной функции вида $r_x(\tau) = e^{-\beta\tau^2}$ (сплошные линии) $r_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ (штриховые): $\xi = 1 \div 9$.

Используя зависимости $\varphi(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, $f_3(\xi, \omega)$, $f_4(\xi, \omega)$, можно приступить к определению параметров T и ξ. Методика определения параметров построена в предположении, что процесс на входе объекта имеет корреляционную функцию вида (12), (13) при $n = 1$.

По известной взаимной корреляционной функции и графику $r_{yx}(0) = f_3(\xi, \omega)$ (рис. 5), задавшись значением ξ, найдем значение ω. По графику $r_x(\tau)$ определим τ_2. Постоянная времени

$$T' = \frac{\tau_2}{\omega}. \tag{15}$$

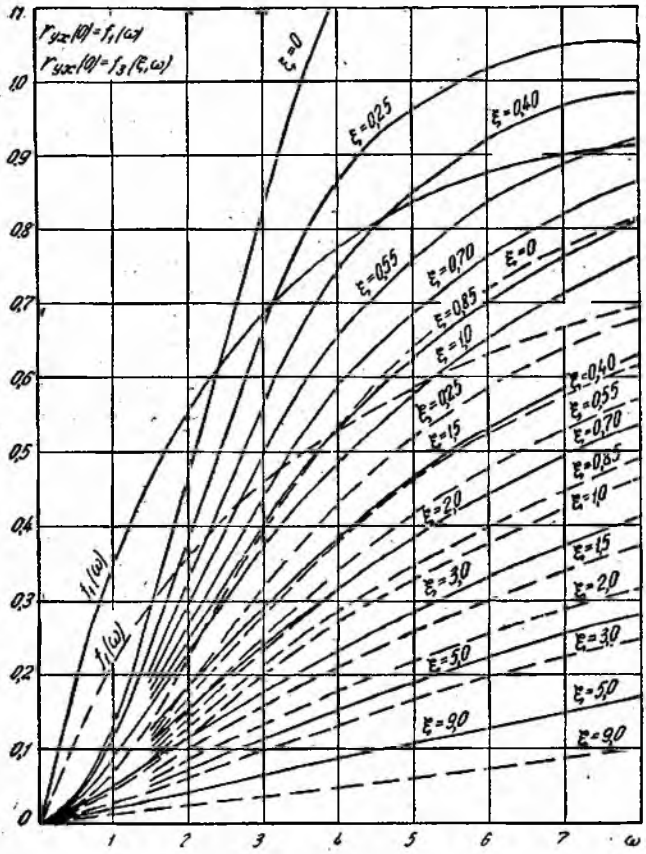

Рис. 5. Зависимость значения взаимной корреляционной функции в нуле от ξ и ω при корреляционной функции вида $r_x(\tau) = e^{-\beta\tau^2}$ (сплошные линии) и $r_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ (штриховые).

Для выбранного значения ξ по графику $\rho = \varphi(\xi)$ (рис. 1) найдем значение ρ, а по графику $r_{yx}(\tau_3) = f_4(\xi, \omega)$ (рис. 2) — $\tau_{yx}(\tau_3)$. Умножив $r_{yx}(\tau_3)$ на K и $R_x(0)$, получим $R_{yx}(\tau_3)$.

По графику $R_{yx}(\tau)$ определим τ_3. Постоянная времени

$$T'' = \frac{\tau_1}{\rho} = \frac{\tau_3 - \tau_2}{\rho}. \tag{16}$$

Если значения T' и T'' совпали, то параметры T и ξ найдены правильно. В противном случае необходимо задаться другим значением ξ

и повторить вычисления. При этом новое значение ξ необходимо выбирать так, чтобы каждый шаг приводил к уменьшению разности

$$\Delta T = T' - T''. \tag{17}$$

Если при изменении ξ от значения ξ_k до ξ_{k+1} ΔT изменяет знак, искомое значение ξ находится в интервале (ξ_k, ξ_{k+1}). При определении параметра T может случиться, что значения T' и T'' нигде не совпадут. Это значит, что объект описывается дифференциальным уравнением выше второго порядка.

Для определения ошибки, вносимой аппроксимацией динамических характеристик объекта уравнением второго порядка, рассмотрим вопрос о точности воспроизведения сигнала на выходе объекта. Очевидно, что критерий точности должен зависеть от искомых параметров K, T и ξ. Определение K по формуле (2) не зависит от методики и точности построения кривых рис. 2—6. В связи с этим в качестве критерия точности принято выражение

$$\Delta\sigma_y = \frac{\sigma_y - \sigma_{yp}}{\sigma_y}, \tag{18}$$

где σ_y — среднеквадратичное отклонение выходного сигнала $y(t)$, рассчитанное по экспериментальным данным;

σ_{yp} — среднеквадратичное отклонение выходного сигнала $y(t)$, рассчитанное в соответствии с вычисленными параметрами объекта.

Критерий (18) зависит от T и ξ, так как $r_{yx}(\tau)$ и, как будет показано ниже, σ_{yp} зависят согласно (8) от $\eta(\xi, T, t)$. Для эргодических стационарных случайных процессов

$$R_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} \overline{x}(t)\,\overline{y}(t+\tau)\,dt,$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} \overline{x}(t)\,\overline{x}(t+\tau)\,dt, \tag{19}$$

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} \overline{y}(t)\,\overline{y}(t+\tau)\,dt,$$

где $\overline{x}(t)$ и $\overline{y}(t)$ — центрированные случайные процессы.

В (19) положим $\tau = 0$ и с помощью несложных преобразований получим

$$R_{yx}^2(0) = aR_x(0)\,R_y(0). \quad 0 \leqslant a \leqslant 1 \tag{20}$$

Так как

$$\sigma_x = \sqrt{R_x(0)} \quad \text{и} \quad \sigma_y = \sqrt{R_y(0)},$$

$$\sigma_y = \frac{R_{yx}(0)}{\sqrt{a}\sigma_x}. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (18), имеем

$$\Delta\sigma_y = \frac{R_{yx}(0) - R_{yxp}(0)}{R_{yx}(0)}. \tag{22}$$

Таким образом, если нельзя добиться совпадения значений T' и T'', то необходимо при наименьшем значении ΔT принять $T = T''$ и, воспользовавшись соотношениями

$$\omega'' = \frac{\tau_2}{T''} \quad \text{и} \quad r_{yxp}(0) = f(\xi, \omega),$$

где ξ соответствует T'' и $\omega = \omega''$, определить

$$R_{yxp}(0) = KR_x(0)\, r_{yxp}(0). \tag{23}$$

Затем по выражению (22) следует найти $\Delta\sigma_y$ и согласно требуемой точности воспроизведения сигнала на выходе объекта установить возможность аппроксимации динамических свойств объекта параметрами T, ξ и K. Если начало графика $R_{yx}(\tau)$ смещено на время τ_4 относительно начала графика $R_x(\tau)$, перед началом вычислений их нужно совместить, а полученную передаточную функцию умножить на $e^{-p\tau_4}$ [1].

Определим теперь параметры T и ξ для случая, если в выражениях (12) и (13) $n = 2$. При этом уравнение (8) примет вид

$$r_{yx}(0) = \frac{A_1}{R_x(0)} \int_0^{T_0} e^{-\beta_1 \Theta z} \eta(\Theta)\, d\Theta + \frac{A_2}{R_x(0)} \int_0^{T_0} e^{-\beta_2 \Theta z} \eta(\Theta)\, d\Theta, \tag{24}$$

$$r_{yx}(0) = \frac{A_1}{R_x(0)} \int_0^{T_0} e^{-\alpha_1 |\Theta|} \eta(\Theta)\, d\Theta + \frac{A_2}{R_x(0)} \int_0^{T_0} e^{-\alpha_2 |\Theta|} \eta(\Theta)\, d\Theta,$$

или

$$r_{yx}(0) = a_1 r_{yx_1}(0) + a_2 r_{yx_2}(0), \tag{25}$$

где

$$0 \leqslant a_1 = \frac{A_1}{R_x(0)} \leqslant 1; \quad 0 \leqslant a_2 = \frac{A_2}{R_x(0)} \leqslant 1.$$

Для фиксированного значения ξ по графику зависимости $r_{yx}(0) = f_3(\xi, \omega)$ зададимся такими значениями $r_{yx_1}(0)$ и $r_{yx_2}(0)$, чтобы выполнялось равенство (25), и определим $\omega_1 = \psi_1(r_{yx_1}(0), \xi)$, $\omega_2 = \psi_2(r_{yx_2}(0), \xi)$.

По графикам $r_{x_1}(\tau)$ и $r_{x_2}(\tau)$ найдем τ_{11} и τ_{21}, а по выражению (15) — постоянную времени

$$T_1' = \frac{\tau_{11}}{\omega_1}, \quad T_2' = \frac{\tau_{21}}{\omega_2}.$$

Варьируя значения $r_{yx_1}(0)$ и $r_{yx_2}(0)$ для выбраннного значения ξ, добьемся того, чтобы

$$T_1' = T_2'. \tag{26}$$

При том же значении ξ и значениях ω, для которых выполняется равенство (26), по изложенной для $n = 1$ методике определим T_1'' и T_2''. Если

$$T_1' = T_2' = T_1'' = T_2'', \tag{27}$$

параметры T и ξ вычислены правильно. В противном случае необходимо задаться другим значением ξ и повторить вычисления. При этом сказанное ранее относительно (17) справедливо.

Если нельзя добиться выполнения равенства (27), необходимо принять

$$T = \frac{T_1'' + T_2''}{2}$$

и, воспользовавшись выражением (22), установить возможность аппроксимации динамических свойств объекта параметрами T, ξ и K.

Методика определения параметров объекта при $n = 3$ в выражениях (12), (13) аналогична изложенной для $n = 2$. Очевидно, что при $n \geqslant 3$ способ становится слишком громоздким и теряет свои преимущества.

Пример. Пусть на вход объекта поступает эргодический стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $R_x(\tau) = 1{,}5e^{-\tau^2}$. Взаимная корреляционная функция входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ процессов $R_{yx}(\tau)$ рассчитана по экспериментальным данным (рис. 6). Необходимо определить параметры объекта.

Найдем коэффициент усиления объекта. Так как в условии примера не заданы математические ожидания, коэффициент усиления определим путем, отличным от изложенного.

Нетрудно показать, что если $\tau_5 + \tau_0 \geqslant 10\ \tau_0$ (рис. 6), то

$$\int_{-\tau_0}^{\tau_5} R_{yx}(\tau)\, d\tau = K \int_{-\tau_0}^{\tau_5} R_x(\tau)\, d\tau. \tag{28}$$

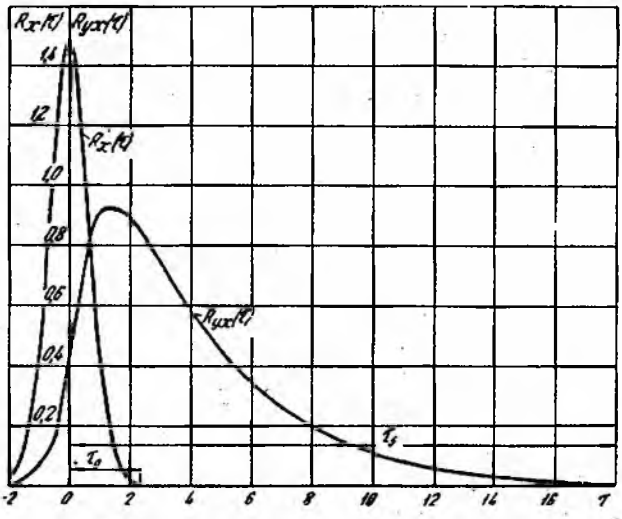

Рис. 6. Корреляционная и взаимная корреляционная функция исследуемого объекта.

Из формулы (28) следует

$$K = \frac{\int_{-\tau_0}^{\tau_5} R_{yx}(\tau)\, d\tau}{\int_{-\tau_0}^{\tau_5} R_x(\tau)\, d\tau}. \tag{29}$$

Вычислим интегралы в выражениях (28) и по (29) вычислим

$$K = \frac{7{,}04}{3{,}52} = 2.$$

На основании данных рис. 4 получим $R_{yx}(0) = 0{,}45$, а согласно выражению (4)

$$r_{yx}(0) = \frac{R_{yx}(0)}{KR_x(0)} = \frac{0{,}45}{2 \cdot 1{,}5} = 0{,}15.$$

По кривой $R_x(\tau)$ (рис. 6) найдем $\tau_2 = 1{,}92$ *сек*.

Попытаемся аппроксимировать динамические характеристики объекта уравнением первого порядка. По соответствующей кривой рис. 5 определим $\omega = 0{,}4$. Согласно (15)

$$T' = \frac{\tau_2}{\omega} = \frac{1{,}92}{0{,}4} = 4{,}8\ \textit{сек}.$$

По соответствующей кривой рис. 4 для $\omega = 0{,}4$ найдем

$$r_{yx}(\tau_3) = 0{,}011,$$

а согласно (4)

$$R_{yx}(\tau_3) = KR_x(0)\, r_{yx}(\tau_3) = 0{,}033.$$

По кривой $R_{yx}(\tau)$ (рис. 6) $\tau_3 = 14$ *сек*, а по соотношению (16)

$$T'' = \frac{\tau_1}{\rho} = \frac{14 - 1{,}92}{3} = 4{,}027 \text{ сек}.$$

Рассчитаем $\Delta\sigma_y$:

$$\omega'' = \frac{\tau_2}{T''} = \frac{1{,}92}{4{,}027} = 0.473,$$

а по соответствующей кривой рис. 5 для $\omega'' = 0{,}473$

$$r_{yxp}(0) = 0{,}18.$$

По соотношению (23) $R_{yxp}(0) = 2 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}18 = 0{,}54$.

Тогда

$$\Delta\sigma_y = \frac{0{,}45 - 0{,}54}{0{,}45} = -0{,}2.$$

Очевидно, что аппроксимация уравнением первого порядка слишком груба. Используем аппроксимацию уравнением второго порядка. Пусть $\xi = 1$. По рис. 5 $\omega = 1{,}43$,

$$T' = \frac{1{,}92}{1{,}43} = 1{,}34 \text{ сек}.$$

Для $\omega = 1{,}43$ (рис. 4), $r_{yx}(\tau_3) = 0{,}0185$, $R_{yxp}(\tau_3) = 0{,}0555$.

По рис. 6 $\tau_3 = 12{,}3$ *сек*, а из рис. 1 следует $\rho = 4{,}74$,

$$T'' = \frac{12{,}3 - 1{,}92}{4{,}74} = 2{,}19 \text{ сек}, \quad \Delta T = -0{,}85.$$

Так как теперь используется аппроксимация уравнением другого порядка, величина и знак ΔT не могут быть критерием сравнения.

Пусть $\xi = 1{,}5$. Повторив то же, что и для $\xi = 1$, получим $T' = 1{,}13$, $T'' = 1{,}292$ *сек*, $\Delta T = 0{,}162$ *сек*. Величина ΔT уменьшилась по сравнению со случаем $\xi = 1$. Следовательно, направление изменения ξ выбрано правильно.

Пусть $\xi = 3$. Проделав то же, что и для предыдущих случаев, получим $T' = 0{,}768$ *сек*, $T'' = 0{,}663$ *сек*, $\Delta T = 0{,}105$ *сек*. Величина ΔT изменила знак при переходе от $\xi = 1{,}5$ к $\xi = 3$, поэтому реальное значение параметра ξ находится в диапазоне $1{,}5 < \xi < 3$.

Пусть $\xi = 2$. В этом случае $T' = 1$ *сек*, $T'' = 1$ *сек*, $\Delta T = 0$. Таким образом, параметры объекта $K = 2$, $T = 1$ *сек*, $\xi = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников, А. С. Усков. Статистический анализ объектов регулирования. Машгиз, 1960.
2. А. А. Красовский, Г. С. Поспелов. Основы автоматики и технической кибернетики. Госэнергоиздат, 1962.
3. Н. А. Лившиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления. Изд-во «Советское радио», 1963.

ВЛИЯНИЕ ЧЕТВЕРТЬВОЛНОВЫХ ОТРЕЗКОВ КАБЕЛЕЙ НА ЗАТУХАНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ ИХ ПЕРЕДАЧЕ ПО ШАХТНЫМ СИЛОВЫМ СЕТЯМ

Б. Ф. Козырь, И. Ф. Огороднейчук

Харьков

При передаче сигналов телемеханики с помощью токов высокой частоты по шахтным силовым сетям без высокочастотной обработки силовых потребителей, трансформаторов и ответвлений необходимо учитывать шунтирующее действие послелних Исследования, проведенные рядом институтов, показывают, что шунтирующее действие потребителей