

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. В. Шервашидзе и В. И. Коржов

Киев

В работах [1] и [2] обосновывается применение метода Ляпунова для исследования устойчивости релейных систем и определяются критерии, позволяющие судить об устойчивости положения равновесия:

- 1) по передаточной функции линейной части релейной системы;
- 2) по виду частотной характеристики;
- 3) по временной характеристике.

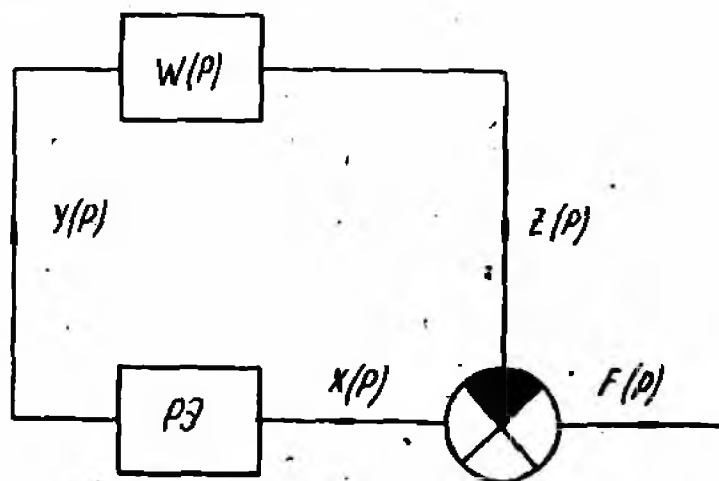


Рис.

Но критерии 1) и 2) не дают возможности судить об устойчивости релейной системы по виду передаточной функции $W(p)$ или по временной характеристике $h(t)$. Они в свою очередь требуют выполнения дополнительных условий проверки, которые требуют кропотливых исследований; проверка устойчивости релейной системы по критерию 2) предусматривает построение частотной характеристики.

Рассмотрим критерии, позволяющие сразу судить об устойчивости релейной системы автоматического регулирования по виду передаточной функции системы $W(p)$ или по виду временной характеристики $h(t)$.

Исследуем релейную систему, структурная схема которой приведена на рисунке. К такой схеме может быть приведена любая релейная система автоматического регулирования. Передаточная функция линейной части системы равна $W(p)$,

где $F(p)$ — внешнее воздействие;

$РЭ$ — релейный элемент;

$Z(p)$ — выходная величина;

$X(p)$ — входная величина (управляющий сигнал);

$Y(p)$ — управляющее воздействие.

Релейный элемент обладает в общем случае зоной нечувствительности и гистерезисом.

Если коэффициент возврата λ положителен ($0 < \lambda \leq 1$), то положение равновесия системы будет соответствовать любой величине управляющего сигнала $X(t)$, заключенному между пороговыми значениями $-\lambda x_0$ и $+\lambda x_0$ (x_0 — зона нечувствительности релейного элемента). Если гистерезис у релейного элемента отсутствует, а зона нечувствительности стремится к нулю, то для такого идеального трехпозиционного реле положение равновесия будет соответствовать точке $X=0$. При исследовании устойчивости системы, функциональная схема которой показана на рисунке, будем руководствоваться условием устойчивости положения по Ляпунову для релейных систем автоматического регулирования [1].

Предположим, что в системе в некоторый момент времени, выбранный за начальный, произошло достаточно малое по абсолютной величине изменение начального условия $\xi(t)$. Согласно работе [1], этому изменению начальных условий соответствует некоторое эквивалентное импульсивное воздействие $f_n(\Delta t)$, которое обозначим $F_n(p) = \frac{K_p}{p}(1 - e^{\Delta t p})$. Тогда выражение для отклонений от начальных условий $\xi(t)$ выходной величины $Z(t)$, изображение которой в операторной форме $Z(p)$,

$$\xi(t) = L^{-1}\{W(p)F_n(p)\}. \quad (1)$$

Согласно условию устойчивости равновесия по Ляпунову, чтобы обеспечить устойчивость реальной системы, необходимо удовлетворить следующую зависимость:

$$\xi(\Delta t) = \eta, \quad (2)$$

где η — сколь угодно малая величина, при длительности Δt импульсивного воздействия, равного τ ;

(τ — конечный, сколько угодно малый промежуток времени).

Найдем оригинал выражения [1], используя теорему разложения (1),

$$\begin{aligned} \xi(t) = L^{-1}\left\{W(p)\frac{K_p}{p}(1 - e^{\Delta t p})\right\} = K_p \left\{ \sum_{v=0}^s \sum_{\mu=0}^{r_v-1} C_{v\mu} \frac{t^\mu}{\mu!} e^{p_v t} - \right. \\ \left. - \sum_{v=0}^s \sum_{\mu=0}^{r_v-1} C_{v\mu} \frac{(t - \Delta t)^\mu}{\mu!} e^{p_v(t - \Delta t)} \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

где s — количество полюсов;

v — номер полюса;

r_{v-1} — максимальная кратность;

μ — кратность v полюса;

$C_{v\mu}$ — постоянный коэффициент.

$$C_{v\mu} = \frac{1}{(r_v - \mu - 1)!} \frac{d^{r_v - \mu - 1}}{dp^{r_v - \mu - 1}} \left\{ \frac{P(p)}{Q(p)P} (P - p_v)^{r_v} \right\}_{p=p_v},$$

(p_v — полюс $W(p)$).

Рассмотрим, при каких условиях выражение (3) удовлетворяет условию (2).

Возможны следующие случаи.

1. Случай $\mu=0$ и $v=0$ при t , стремящемся к бесконечности. Все корни простые и нет нулевых корней.

$$\xi(t) = K_p \sum_{v=1}^s C_{v0} [e^{p_v t} - e^{p_v(t - \Delta t)}] \rightarrow 0. \quad (4)$$

Из выражения (4) следует, что релейные системы, у которых $W(p)$ имеет все полюсы отрицательные, простые и отличные от нуля, $\xi(t) \rightarrow 0$.

2. $\mu \neq 0$, $\nu = 0$ при t , стремящемся к бесконечности (случай кратных отрицательных корней и нет нулевых корней).

$$\xi(t) = K_p \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{C_{\nu\mu}}{\mu!} [t^\mu e^{p_\nu t} - (t - \Delta t) e^{p_\nu(t - \Delta t)}]. \quad (5)$$

После раскрытия неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$ замечаем, что релейные системы, у которых $W(p)$ содержат кратные отрицательные корни и нет нулевых корней, имеют начальные отклонения $\xi(t)$ при импульсивном воздействии $f_n(t)$, равном нулю.

3. В случае, когда $W(p)$ имеет n_0 — нулевой полюс, а все остальные полюсы отрицательные и простые ($\mu = 0$, $\nu \neq 0$, $t \rightarrow \infty$),

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \frac{K_p}{r_0 - 1 - \nu_0} \sum_{\nu=0}^{n_0} \frac{d^{r_0-1-\nu_0}}{dp^{r_0-1-\nu_0}} \left[\frac{P(p)}{Qn_0(p)} \right] \cdot [t_0 - (t - \Delta t)] + \sum_{\nu=1}^{r-n_0} C_{\nu 0} e^{p_\nu t} - \\ & - \sum_{\nu=1}^{r-n_0} C_{\nu 0} e^{p_\nu(t - \Delta t)}; \end{aligned} \quad (6)$$

где $W(p)$ представлена в виде

$$W(p) = \frac{P(p)}{Qn_0(p)p^{n_0}}. \quad (7)$$

Из выражения (6) видно, что при $t \rightarrow \infty$ и $\Delta t = \tau$ только в том случае, когда $\nu = 1$, величина начальных отклонений $\xi(t)$ при импульсивном воздействии $f_n(t)$ может быть сколько угодно малой, наперед заданной величиной, если только выбрать достаточно малым время действия τ этого импульсивного воздействия.

Такая система удовлетворяет условию устойчивости по Ляпунову. В случае, когда $\nu_0 > 1$ при $t \rightarrow \infty$, величина начальных отклонений $\xi(t)$ стремится к бесконечности при любой малой величине τ . Такая система не удовлетворяет условию устойчивости системы в малом по Ляпунову.

Из приведенного анализа видно, что, если характеристическое уравнение линейной части релейной системы автоматического регулирования имеет не больше одного корня равным нулю, а все остальные — действительны и отрицательны, то такая система устойчива.

Сформулируем критерий устойчивости релейных систем.

I. Критерий устойчивости релейной САР по виду передаточной функции $W(p)$ линейной части. Релейная САР устойчива, если передаточная функция линейной части системы

$$W(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p)}{Qn_0(p)p^{n_0}}$$

имеет не более одного корня характеристического уравнения равным нулю (n_0 не более 1), а все остальные корни действительные и отрицательные.

II. Критерий устойчивости релейной САР по виду временной характеристики $h(t)$. Из выражения (6) видно, что система, удовлетворяющая условию устойчивости по Ляпунову [2], не должна иметь в выражении

временной характеристики членов $C_0 t^0$ с показателем степени выше 1, а члены $C_m e^{p_m t}$ должны иметь отрицательные показатели степеней p_m .

Сформулируем критерий устойчивости по виду временной характеристики: релейная САР устойчива, если ее временная характеристика не содержит членов $C_0 t^0$ с показателем степени γ , больше 1 и членов $C_m e^{p_m t}$, имеющих положительную степень.

III. Критерий устойчивости САР по величине выбега системы в зоне нечувствительности. Согласно (1), если из выражения (3), (4), (5), (6) или (7) вычесть внешнее воздействие $f_n(t)$, то можно записать

$$\xi(t) - f_n(t) = x,$$

где x — величина выбега в зоне нечувствительности.

Определяя x из выражений (4), (5) и (7) при $t \rightarrow \infty$, можно заметить, что величина выбега для устойчивости систем есть величина конечная (в частном случае $x=0$) и для неустойчивых релейных САР величина x стремится к ∞ .

Сформулируем критерий устойчивости релейных САР по величине выбега в зоне нечувствительности. Релейная САР устойчива, если при входе этой системы в зону нечувствительности величина выбега x при $t \rightarrow \infty$ есть величина конечная. В частном случае $x=0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на основе условия устойчивости систем автоматического регулирования по Ляпунову (устойчивости в малом) выведены и сформулированы три критерия устойчивости релейных САР:

1. Критерий устойчивости релейной САР по виду передаточной функции линейной части $W(p)$.

2. Критерий устойчивости релейной САР по виду временной характеристики $h(t)$.

3. Критерий устойчивости линейной САР по величине выбега системы в зоне нечувствительности x .

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин. Теория релейных систем автоматического регулирования. Гостехиздат, М., 1955.

2. Я. З. Цыпкин. Устойчивость и автоколебания в релейных системах автоматического регулирования. Труды ЛКВВИА, вып. 32, 1950.

3. Я. З. Цыпкин. Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях. Госэнергоиздат, М.—Л., 1951.

4. Я. З. Цыпкин. Релейные следящие системы. Труды Пензенского индустриального института, вып. 2, 1954.