ВВЕДЕНИЕ МЕТРИКИ В ПОЛЕ ЗРЕНИЯ

Ю. П. Шабанов-Кушнаренко, И. В. Шульгин, Б. К. Лопатченко

Настоящая статья является продолжением работы [1], в которой рассматривались метрические свойства поля зрения человека, которое при монокулярном восприятии можно представить в виде множества точек зрительного ощущения на плоскости. После зрения можно рассматривать как абелеву группу.

Покажем, что его можно рассматривать и как линейное нормированное пространство.

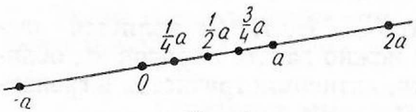

Рис. 1.

Построим операцию умножения λa точек a, b, c, ... поля зрения на вещественные числа λ и докажем выполнение следующих свойств этой операции [2, *58*]:

1) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu) a$ — закон ассоциативности умножения;

$\left.\begin{array}{l} 2)\ \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b) \\ 3)\ (\lambda+\mu) a = \lambda a + \mu a \end{array}\right\}$ — законы дистрибутивности умножения;

4) $1 \cdot a = a$.

Для выполнения этих условий введем умножение точек поля зрения на вещественные числа, использовав те операции деления интервалов пополам — S и T, которые способен производить испытуемый [1].

Пусть имеются точка фиксации $\alpha \equiv 0$ и произвольная a. По определению будем считать, что при умножении a на единицу получим ту же самую точку a (рис. 1). Затем после деления интервала $0a$ пополам получаем точку, которую обозначим $\frac{1}{2}a$. Таким образом, вводим умножение на $\frac{1}{2}$. Если теперь разделить интервал $\frac{1}{2}a$ пополам, получим точку $\frac{3}{4}a$, т. е. вводим умножение на $\frac{3}{4}$. Деление интервала между точками 0 и $\frac{1}{2}a$ даст точку $\frac{1}{4}a$ и т. д. При внешнем делении пополам интервала $0a$ получаем точку $2a$, т. е вводим умножение на два.

Если внешнее деление производится в левую сторону от 0, имеем точку $(-a)$ и т. д.

Таким образом получаем прямую линию, точки на которой являются произведениями некоторых чисел. При подобном определении эти числа оказываются двоично-рациональными вида $\frac{k}{2^n}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Чтобы определение умножения точек на двоично-рациональные числа было корректным, необходимо доказать, что результат умножения точки на двоично-рациональное число $\frac{k}{2^n}$ не зависит от конкретного способа получения этой точки, так как ее можно получить, деля интервалы пополам в различной последовательности. Доказательством служит

Теорема 1. *Если G — абелева группа, то она обладает следующим специальным свойством: для всякого $a \in G$ существует и единственно x, определенное как*

$$x + x = a. \tag{1}$$

Доказательство. Положим, что $x = S(0,\ a)$. Тогда $T(0,\ x) = a$. В этом случае $x + x = T(0,\ S(x,\ x))$. Учитывая, что $S(x,\ x) = x$ [1], получим $x + x = T(0,\ x) = a$.

Для доказательства единственности x положим обратное: $x + x = a$, т. е. $T(0,\ S(x,\ x)) = a$. Тогда $x + x = T(0,\ x) = a$, т. е. $x = S(0,\ a)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Если G — абелева группа, удовлетворяющая условию* (1), *то G — это r_2 модуль, где r_2 — множество двоично-рациональных чисел, причем $x = \frac{a}{2}$ (т. е. в этом случае определено умножение элементов $a,\ b \in G$ на $\alpha,\ \beta \in r_2$ обладающее свойствами* 1) —4)).

Доказательство. Сначала на основании теоремы 1 примем для $z \in G$, что $z + z = 0$, откуда $z = 0$. Иными словами, если

$$2z = 0,$$

то

$$z = 0. \tag{2}$$

Пусть $x = Pa$. В силу (1) $2Pa = a$. Сформулируем утверждение об аддитивности операции P:

$$P(a + b) = Pa + Pb. \tag{3}$$

Действительно, $Pa + Pa = a$; $Pb + Pb = b$. Сложим эти равенства: $(Pa + Pb) + (Pa + Pb) = a + b$. Но, по определению P, $P(a + b) + P(a + b) = a + b$. Из двух почленных равенств вытекает, что $(Pa + Pb) + (Pa + Pb) = P(a + b) + P(a + b)$ или $2[(Pa + Pb) - P(a + b)] = 0$. На основании (2), $(Pa + Pb) - P(a + b) = 0$, т. е. $P(a + b) = Pa + Pb$, что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что P — это эндоморфизм. Следовательно, и P^n — эндоморфизм.

Оператор P^n обладает свойствами аддитивности

$$P^n(a + b) = P^n a + P^n b \quad (n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots) \tag{4}$$

и однородности

$$k(P^n a) = P^n(ka) \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3\ \ldots). \tag{5}$$

Для дальнейшего доказательства пусть $\lambda \in r_2$. Представим λ в виде двоично-рационального числа $\lambda = \frac{k}{2^n}$. Определим умножение элемента $a \in G$ на двоично-рациональное число, положив

$$\lambda a = kP^n a. \tag{6}$$

Покажем, что это определение корректно, а именно: из равенства коэффициентов λ должно следовать равенство произведений этих коэффициентов на элемент $a \in G$, т. е. если $\frac{k_1}{2^{n_1}} = \frac{k_2}{2^{n_2}}$, то $k_1 P^{n_1} a = k_2 P^{n_2} a$. Для этого достаточно рассмотреть случай $n_2 - n_1 = 1$. Иными словами, достаточно показать, что при этом

$$2kP^{n+1}a = kP^n a, \tag{7}$$

т. е. все остальные случаи также можно свести к $n_k - n_{k-1} = 1$.

Пусть правой частью равенства (7) является $kP^n a = c$. Тогда его левая часть с учетом свойств (1) и (5) запишется в виде

$$2kP^{n+1}a = 2k[P(P^n a)] = 2P[k(P^n a)] = 2Pc = c.$$

Мы показали, что левые и правые части равенства (7) одинаковы, т. е. определение умножения на двоично-рациональное число корректно.

Положим для удобства дальнейшего доказательства, что $n_1 = n_2 = n$. Тогда $\lambda_1, \lambda_2 \in r_2$ можно записать как $\lambda_1 = \frac{k_1}{2^n}$; $\lambda_2 = \frac{k_2}{2^n}$. Свойство ассоциативности умножения запишем следующим образом:

$$(\lambda_1 \lambda_2)\, a = \frac{k_1 k_2}{2^{n+n}}\, a.$$

С учетом (6)

$$(\lambda_1 \lambda_2)\, a = k_1 k_2 P^{n+n} a = k_1 k_2 P^n P^n a = k_1 P^n (k_2 P^n a) = \lambda_1 (\lambda_2 a).$$

Свойства дистрибутивности умножения с учетом (6) имеют вид

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\, a = \frac{k_1 + k_2}{2^n}\, a = (k_1 + k_2)\, P^n a = k_1 P^n a + k_2 P^n a = \lambda_1 a + \lambda_2 a;$$

$$\lambda (a + b) = \frac{k}{2^n}(a + b) = kP^n (a + b) = k(P^n a + P^n b) =$$

$$= kP^n a + kP^n b = \frac{k}{2^n}\, a + \frac{k}{2^n}\, b = \lambda a + \lambda b.$$

Таким образом, определено умножение элементов $a, b \in G$ на $\alpha, \beta \in r_2$, обладающее свойствами ассоциативности и дистрибутивности. Выполнение условия 4) вытекает из определения введенного нами умножения на двоично-рациональное число.

В итоге все аксиомы линейного пространства для двоично-рациональных чисел выполняются.

Необходимо показать, что эти аксиомы выполняются и для всех вещественных чисел. С этой целью приведем две аксиомы.

Аксиома 1. *Операция сложения точек непрерывна, т. е. если* $a_n \to a$ *и* $b_n \to b$, *то* $a_n + b_n \to a + b$.

Аксиома 2. *Если последовательность точек* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *поля зрения сходится к некоторой точке* a *и последовательность двоично-рациональных чисел* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *сходится к числу* λ, *то последовательность точек поля зрения* $\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \ldots, \lambda_n a_n, \ldots$ *также сходится, причем положение полученной точки не зависит от выбора конкретных последовательностей чисел и точек.*

Полученную в результате предельного перехода точку обозначим через λa и примем ее за произведение вещественного числа λ на точку a поля зрения.

Из аксиом 1, 2, а также из свойств 1) —4) умножения на двоично-рациональные числа непосредственно следует, что для любых точек $a, b, c, \ldots$ поля зрения определено умножение на вещественные числа. При этом выполняются условия 1)—4) для вещественных чисел.

В результате приходим к выводу о том, что поле зрения — это вещественное линейное пространство.

Рассмотрим аксиоматическое введение нормы в поле зрения. С этой целью сформулируем следующие аксиомы.

Аксиома 3. *Пусть* a' *— некоторая зафиксированная точка поля зрения, не совпадающая с точкой фиксации* α *— центром поля зрения. Тогда для любых точек* a *и* b *найдется единственное вещественное число* λ *такое, что* $\rho(a, \beta) = \rho(\alpha, \lambda a')$.

Отсюда следует, что в качестве субъективного расстояния $\rho(a, b)$ можно принять функционал $\lambda(a, b)$, который удовлетворяет следующим свойствам.

Аксиома 4. $\lambda(a, b) > 0$, *причем* $\lambda(a, b) = 0$, *если* $a = b$ (*позитивность*).

Аксиома 5. $\lambda(a, b) = \lambda(b, a)$ (*симметрия*).

Аксиома 6. $\lambda(a, b) \leqslant \lambda(a, c) + \lambda(c, b)$ (*неравенство треугольника*).

Аксиома 7. $\lambda(a + c, b + c) = \lambda(a, b)$ (*трансляционная инвариантность*).

Аксиома 8. $\lambda(\alpha a, \alpha b) = |\alpha| \lambda(a, b)$ (*абсолютная однородность*).

Доказано [3, *210*], что любой функционал $\lambda(a, b)$, удовлетворяющий аксиомам 3—8, порождает единственную норму, определяемую формулой $\|a\| = \lambda(a, \alpha)$.

Итак, в поле зрения введено двумерное линейное нормированное пространство.

На основании теоремы об изоморфизме конечномерных линейных нормированных пространств числа измерений n евклидову n-мерному пространству [2] приходим к выводу о существовании взаимно-однозначного и взаимно-непрерывного отображения Ф поля зрения на плоскость. Эта проекция будет обладать евклидовой метрикой. Отсюда следует, что математическая модель преобразования точек пространства зрения в их образы в ощущении [1] может быть представлена в виде

$$y = L_0(\rho_e(\Phi(a),\ \Phi(b)),\ \rho_e(\Phi(c),\ \Phi(d)), \tag{8}$$

где ρ_e — евклидово расстояние на поле зрения в нормальной форме;

Φ — преобразование исходной формы поля зрения в нормальную.

Таким образом, аксиоматическая теория метрики поля зрения построена.

Для полной завершенности модели метрики поля зрения необходимо найти вид функции Φ, преобразующей исходное поле зрения к нормальному виду. Вид оператора Φ будет задан, если удастся записать формулы, преобразующие координаты произвольной точки A на исходном поле зрения N в координаты точки A^* на нормальном поле зрения E, т. е. образ точки $A^* = \Phi(A)$.

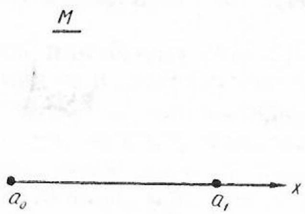

Рис. 2.

Для удобства выполнения психологических операций будем рассматривать точки на кампиметрической плоскости M. Затем их легко можно спроектировать с помощью введенных преобразований точек пространства зрения на исходное поле зрения N [4].

На кампиметрической плоскости M введем декартову систему координат x, y; на нормальном поле зрения E — такую же систему ξ^*, η^* (рис. 2, 3).

Пусть $\xi^* = \varphi_1(x,\ y)$, $\eta^* = \varphi_2(x,\ y)$. Каждая из φ_1 и φ_2 как функция двух переменных может быть изображена в виде однопараметрического семейства кривых. Для этого на кампиметрической плоскости введем точку a_0 в центре поля зрения с координатами (0, 0), являющуюся точкой фиксации, и точку a_1 на оси абсцисс с координатами (1, 0), находящуюся от испытуемого, к примеру, на расстоянии $\approx 10°$ (для точки a_1, представленной на рис. 2, глаз испытуемого должен находиться на расстоянии 15 *см* от точки a_0). Проекции A_0^* точки a_0 на плоскость E и проекции A_1^* точки a_1 на плоскость E сообщим те же координаты, т. е. A_0^* (0, 0), A_1^* (1, 0) (рис. 3).

На плоскости E вводим точку A_2^* (—1, 0). Соответствующую ей точку a_2 на плоскости M найдем с помощью операции внешнего деления интервала пополам: $a_2 = T(a_1,\ a_0)$. Затем на плоскости E вводим точку A_3^* (0, 1). Соответствующую ей точку a_3 находим из условий

$$\rho(a_0,\ a_3) = \rho(a_0,\ a_1);$$

$$\rho(a_2, a_3) = \rho(a_1, a_3).$$

На нормальном поле зрения вводим точку A_4^* (0, —1). На плоскости M ей соответствует точка a_4, которая находится как $a_4 = T(a_3, a_0)$.

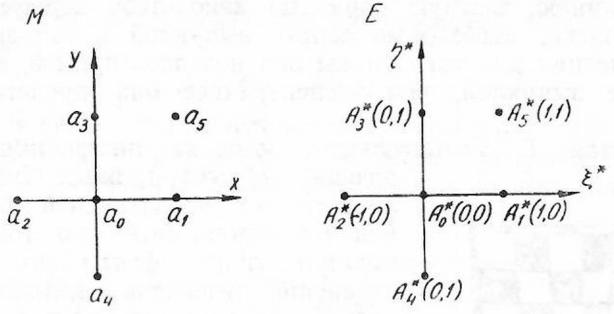

Рис. 3.

На плоскости E вводим точку A_5^* $(1, 1) = A_1^* + A_3^*$. На кампиметрической плоскости ей соответствует точка a_5, определяемая следующим образом:

$$a_5 = a_1 + a_3 = T(a_0, S(a_1, a_3)).$$

Аналогичным образом на плоскости M строим всю координатную сетку, т. е. точки вида $a_{ij} = a_{i0} + a_{0j} = T(a_{00}, S(a_{i0}, a_{0j}))$, где i, j — текущие координаты точек a.

Соединяя полученные точки плавными линиями, проходящими через точки вида a_{i0} и a_{0j}, получим координатную сетку, состоящую из вертикальных и горизонтальных линий соответственно.

На рис. 4 в 18-кратном уменьшении представлена координатная сетка, точки которой определялись с учетом зон нечувствительности, возникающих при выполнении психологических операций сравнения интервалов, а также внутреннего и внешнего деления интервалов пополам.

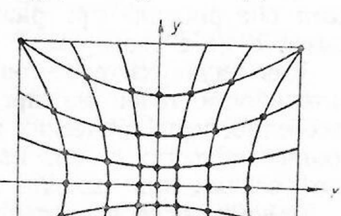

Рис. 4.

Как видно из рис. 4, линии, лежащие вне точки фиксации, имеют определенный изгиб.

Аналогичную задачу, связанную со зрительным восприятием прямых линий, выполнял и Г. Гельмгольц [5], а также некоторые другие исследователи [6]. Г. Гельмгольцу удалось, в частности, экспериментальным путем подобрать кривизну находившихся вне точки фиксации линий на кампиметрической плоскости таким образом, что они представлялись испытуемому как прямые. В процессе эксперимента Г. Гельмгольц рассматривал одним глазом с расстояния 20 *см* шахматную доску (рис. 5), которая была увеличена в 14 раз. Квадраты на ней казались ему правильными, а не искаженными. При этом Г. Гельмгольц указывал: «... линию, дающую образ на какой-либо периферической части сетчатки, необходимо делать выпуклой в направлении к точке фиксации для того, чтобы она казалась прямой, и притом тем более выпуклой, чем эксцентричнее она представляется» [7, *599*].

Принятая Г. Гельмгольцем методика построения линий, дающих образы прямых линий, отличается от используемой нами, так как мы строим сетку по точкам, используя лишь факты из области сравнения интервалов, деления интервалов, сложения точек и т. д. Авторами данной статьи не использовались такие понятия, как «ощущение прямого угла», «ощущение прямизны», которые применял Гельмгольц, потому что они не фигурируют в аксиомах. Очевидно, эти понятия выходят за пределы построенной нами теории. Но может оказаться, что прямые линии на нормальном поле зрения будут выглядеть психологически прямыми, а прямые углы на плоскости E также будут казаться прямыми. Сравнение предложенной нами координатной сетки и доски Гельмгольца (рис. 4 и 5) показывает, что линии на доске Гельмгольца изогнуты слабее, хотя оба рисунка при равных условиях воспринимаются с прямыми, а не с изогнутыми квадратами.

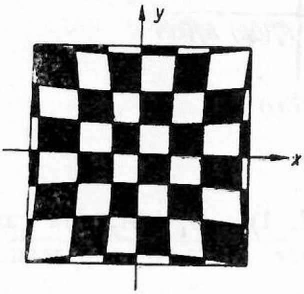

Рис. 5.

Как видно из расчетов указанных диаграмм, зона нечувствительности точек на предложенной нами координатной сетке (особенно периферических точек) в основном даже не достигает соответствующих точек на доске Гельмгольца. Отсюда следует, что расхождения выходят за пределы ошибки опыта.

Почему могли появиться такие расхождения — ведь обе доски характеризуют зрительное восприятие человеком прямых линий? Одна из причин заключается, очевидно, в том, что при периферическом зрении локализация отличается большой неопределенностью и установить действительную степень искривления весьма трудно. В таких случаях человек склонен схематизировать, т. е. утверждать, что линии скорее прямые, чем изогнутые [6]. Кроме того, зона нечувствительности, определенная экспериментально, свидетельствует о том, что не только построенная Гельмгольцем доска субъективно будет выглядеть прямоугольной. На это указывают опыты Кюстера, в которых линии имели больший изгиб, чем у Гельмгольца. По-видимому, результаты, полученные Кюстером, ближе к нашим. К сожалению, вид доски, экспериментально построенной Кюстером, не удалось установить.

С помощью преобразований (6) [4] перейдем от кампиметрической плоскости M к исходному полю зрения N, где полученная нами координатная сетка имеет вид, представленный на рис. 6. Эта сетка дает графическое изображение обратного преобразования:

$$A = \Phi^{-1}(A^*).$$

Из рис. 6 видно, что диаграмма имеет геометрическую форму в виде линий с некоторой кривизной, характеризующей преобразование Φ^{-1}. Проекция доски Гельмгольца на исходное поле

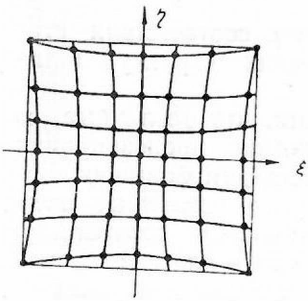

Рис. 6.

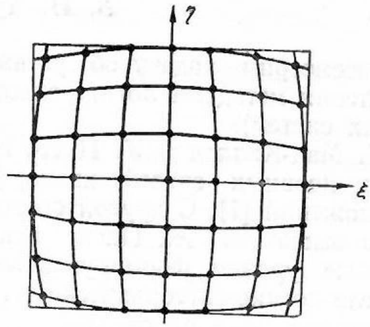

Рис. 7.

зрения также имеет вид линий с некоторой кривизной (рис. 7). Как вытекает из сравнения рис. 6 и 7, диаграммы, полученные авторами данной статьи и Гельмгольцем, различны.

Полученные нами диаграммы завершают построение математической модели метрики поля зрения. Последняя позволяет математически описать конкретное отображение Φ^{-1}. В итоге все параметры и функциональные зависимости модели, которые в принципе можно было найти из эксперимента, определены.

Таким образом, введена метрическая структура поля зрения и построена система аксиом, обосновывающая вид отображения Φ исходного поля зрения на нормальное. Принятые аксиомы были проверены в экспериментах. Их точность определялась зонами нечувствительности психологических операций, производимых испытуемым. Величины этих зон указаны в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Шульгин. Исследование метрических свойств поля зрения. Сб. «Проблемы бионики», вып. 9. Изд-во Харьковск. ун-та, 1972.
2. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
3. И. М. Глазман, Ю. И. Любич. Конечномерный линейный анализ. М., «Наука», 1969.

4. И. В. Шульгин, Б. В. Пильщиков. Математическое описание преобразования органом зрения человека физического пространства в субъективное поле зрения при монокулярном восприятии. Сб. «Проблемы бионики», вып. 8. Изд-во Харьковск. ун-та, 1972.
5. H. Helmholtz. Handbuch der physiologischen Optik, 1—3. Hamburg — Leipzig, 1909—1911.
6. Э. Геринг. Пространственное чувство и движения глаза. Руководство к физиологии, т. III, ч. 1. Изд. проф. Германна, 1887.
7. Р. Гебер. Курс физиологии человека. М.-Л., Биомедгиз, 1935.

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ СТРУКТУР МЫШЛЕНИЯ НЕЙРОННОГО И ПСИХОЛОГИЧЕСКОГО (ОПЕРАЦИОНАЛЬНОГО) УРОВНЕЙ

В. Н. Чудаков

Рассмотрим задачу об установлении соответствия структур мышления методами логико-алгебраических структур (алгебраических систем).

У. Мак-Каллок и У. Питтс показали, что различные комбинации нервных связей изоморфны логике пропозициональных предложений [1]. С другой стороны, исследуя формирование детского мышления, Ж. Пиаже показал, что различные операциональные уровни формирующегося мышления соответствуют в пределе логико-алгебраическим структурам — классификационным, структурам порядка групп [2—5]. Он выделил два уровня сформировавшихся структур мышления:

а) конкретный, удовлетворяющий аксиомам группировки, на основании которых строятся структуры классификации порядка и соответствия [2, 5]; б) формальный, удовлетворяющий четырем аксиомам операций преобразования, которые образуют групповую структуру [2].

Определив понятие операции и структуры мышления в нейрофизиологическом и психологическом аспектах, мы установили изоморфизм этих структур мышления на конкретном и формальном уровнях.

Некоторые понятия и определения

Пусть дано произвольное множество A, линейное и вполне упорядоченное [6]. Будем считать, что на A определена n-арная алгебраическая операция F (где n — целое неотрицательное число), если любая упорядоченная система из n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ сопоставлена с однозначно определенным элементом этого же множества A. Записывается это следующим образом: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)F = a_i$, где $i = 0, 1, \ldots, n$.

В логике рассматриваются особые множества, элементы которых называются модальностями, или степенями истинности. Множество степеней истинности образует континуум отрезка [0, 1], где нуль означает ложь, а единица — истину. В класси-