УДК 519.6

МЕТОДЫ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

ГРИЦЮК В. И.

Рассматриваются условия на наборы моделей, необходимые для реализации процедуры численной минимизации. Исследуется метод М-оценок параметров авторегрессии. Предлагается модифицированный алгоритм помехоустойчивого оценивания параметров в авторегрессионных моделях при наличии аддитивных выбросов.

1. Введение

Одно из важнейших решений, принимаемых в процессе идентификации системы, – выбор критерия идентификации. Использование норм, робастных по отношению к неизвестным заранее изменениям плотности вероятности, повышает устойчивость оценивания данных. Метод М-оценок параметров авторегрессии (АР) дает возможность построения оценок, обладающих свойством асимптотической эффективной помехоустойчивости при наличии посторонних резких выбросов, характер которых определяется самой выборкой. В случае, когда возможна небольшая доля больших ошибок в переменных, неограниченный характер кривой влияния может иметь нежелательные последствия. Это особенно проявляется в моделях АР при наличии аддитивных выбросов. В связи с этим необходимо рассмотреть вопросы использования помехоустойчивых оценок применительно к анализу временных рядов при наличии двух различных типов выбросов и разработать алгоритм, обеспечивающий получение помехоустойчивых оценок параметров авторегрессионных моделей с учетом свойств информационной матрицы. Для робастного оценивания необходимо выбрать модельную структуру, к которой применяют сформированный критерий.

2. Модели

Предположим, что члены набора M параметризованы конечномерным (n_Θ-мерным) вектором параметров Θ, который изменяется в наборе D_M. Набор D_M -компактный поднабор $R^{n\Theta}$. Данную модель обозначим $M(\Theta)$. Отсюда

$$M = \{M(\Theta) | \Theta \in D_M\}. \qquad (1).$$

Модель $M(\Theta)$ понимается как правило для вычисления следующего выхода $y(t)$, основанного на наблюдаемых выходах и входах ко времени $t-1$, которые обозначим y_o^{t-1}, u_o^{t-1}. Правило дается детерминированной функцией [1,2]

$$g_M(\Theta; t, y_o^{t-1}, u_o^{t-1}). \qquad (2)$$

Модель на практике часто не дается прямо как явная функция старых данных, как в (2). Приведем ряд примеров наборов моделей, в которых g_M определяется как явно, так и неявно.

Обобщенные, линейные стохастические время- инвариантные модели. Линейная инвариантная во времени модель может быть описана как

$$y(t) = \overline{G}_\Theta(q^{-1})u(t-1) + \overline{H}_\Theta(q^{-1})e(t), \qquad (3)$$

где q^{-1} оператор сдвига назад; оператор $q^{-1}u(t) = u(t-1)$ и $\overline{G}_\Theta(z)$ и $\overline{H}_\Theta(z)$ – матричные функции z (z заменяет q^{-1}), так что $\overline{H}_\Theta(0) = I$. Переменные $e(\bullet)$ предполагаются независимыми случайными переменными с нулевыми средними величинами. Предсказатель $y(t)$ при этих предположениях (равный линейному оцениванию по методу наименьших квадратов и условному среднему) дается

$$\begin{aligned}\hat{y}_M(t|\Theta) &= [I - \overline{H}_\Theta^{-1}(q^{-1})]y(t) + \\ &+ \overline{H}_\Theta^{-1}(q^{-1})\overline{G}_\Theta(q^{-1})u(t-1).\end{aligned} \qquad (4)$$

Раскрытие (4) по степеням последовательности q^{-1} прямо ведет к явному представлению (2).

Так как $\overline{H}_\Theta^{-1}(0) = I$, член $y(t)$ исчезает. В (4) предполагается, что все старые $y(t), u(t)$, $t < 0$ известны. Это обычно не так, и они принимаются или как известные (наиболее часто полагают, что равны нулю), или как параметризованные соответствующим образом.

Предположим, линейная система не моделируется прямо в терминах функций импульсной реакции $\overline{G}_\Theta(z)$ и $\overline{H}_\Theta(z)$. Часто используется представление в виде векторного дифференциального уравнения (*VDE или ARMAX-модель*)

$$A_\Theta(q^{-1})y(t) = B_\Theta(q^{-1})u(t-1) + C_\Theta(q^{-1})e(t), \qquad (5)$$

где $A_\Theta(z)$, $B_\Theta(z)$, $C_\Theta(z)$ – матричные полиномы. Другое обобщенное представление в виде пространства состояния в форме представления время-инвариантных обновлений

$$x_\Theta(t+1) = F_\Theta x_\Theta(t) + G_\Theta u(t) + K_\Theta e(t),$$

$$y(t) = H_\Theta x_\Theta(t) + e(t). \qquad (6)$$

Легко видеть, что эти два представления отвечают

$$\overline{G}_\Theta(z) = A_\Theta^{-1}(z)B_\Theta(z); \overline{H}_\Theta(z) = A_\Theta^{-1}(z)C_\Theta(z) \qquad (7)$$

и $\overline{G}_\Theta(z) = H_\Theta[I - zF_\Theta]^{-1}G_\Theta$;

$$\overline{H}_\Theta(z) = zH_\Theta[I - zF_\Theta]^{-1}K_\Theta + I \qquad (8)$$

соответственно.

После этих примеров можно сформулировать условие на модельный набор (2), который может быть использован в результатах ниже. Условие М1: Предположим, что функция $g_M(\Theta; t, y_0^{t-1}, u_0^{t-1})$

дифференцируема по Θ для всех $\Theta \in D_M$. Пусть D_M -компакт. Предположим, что

$$\left|g_M(\Theta; t, \alpha_1^{t-1}, \alpha_2^{t-1}) - g_M(\Theta; t, \beta_1^{t-1}, \beta_2^{t-1})\right| \le$$
$$\le C \sum_{s=0}^{t} \lambda^{t-s} \left\{\left|\alpha_1(s) - \beta_1(s)\right| + \left|\alpha_2(s) - \beta_2(s)\right|\right\} \qquad (9)$$

и $\left|g_M(\Theta; t, 0^{t-1}, 0^{t-1})\right| \le C$, где $0^{t-1} = (0, \cdots, 0)$ и $\alpha_i^{t-1} = (\alpha_i(t-1), \cdots, \alpha_i(0))$ для всех t, $\alpha_i^{t-1}, \beta_i^{t-1}$ и Θ принадлежат открытой окрестности D_M, где $C \prec \infty$ и $\lambda \prec 1$. Предположим также, что $(d/d\Theta) g_M(\Theta; y_0^{t-1}, u_0^{t-1})$ подвержена (9). Из предположений дифференцируемости, которые не являются сильно ограничительными, условие M1ограничивает модельный набор в двух направлениях. Во-первых, факт, что C может не зависеть от α_i^t или β_i^t, накладывает ограничения на то, как быстро g_M может возрастать с $y_0(s)$ и $u_0(s)$ для нелинейных моделей.

Эффективно, если возрастание не быстрее, чем линейное. Это не рассматривается как серьезное ограничение, так как можно всегда ввести некоторую насыщенность для больших величин.

Следующее ограничение – это то, что модель (и ее производные по Θ) экспоненциально устойчива. Фактически, эти условия позволяют сделать процедуру численной минимизации возможной.

Для VDE-модели (5) видно, что устойчивость этих линейных фильтров определяется $C_\Theta(q^{-1})$. Если $\det C_\Theta(z)$ имеет все нули строго вне единичного круга, тогда экспоненциальная устойчивость фильтров ставится под сомнение. Для модели в пространстве состояний (6) экспоненциальная устойчивость следует, если матрица $F_\Theta - K_\Theta H_\Theta$ устойчива.

Соберем все результаты. Примем VDE-модель (5) или время-инвариантную модель в пространстве состояний (6). Предположим, что элементы этих матриц непрерывно дифференцируемы по Θ. Пусть D_M – компактный набор, ограниченный так, что

1) для VDE модели (5) $\det C_\Theta(z)$ не имеет нулей вне единичного круга для всех $\Theta \in D_M$;

2) для модели состояния (6) матрица $F_\Theta - K_\Theta H_\Theta$ имеет все собственные значения точно внутри единичного круга для всех $\Theta \in D_M$.

Тогда условие M1 выполняется для каждого из этих модельных наборов.

3. Помехоустойчивое оценивание в АР моделях

Рассмотрим варианты помехоустойчивых оценок уравнения авторегрессии [3], являющегося частным случаем уравнения (5). При анализе временных рядов [3,4] выделяют некоторые типы резких выбросов: выбросы, определяемые самой выборкой, и выбросы, связанные с аддитивными ошибками результатов наблюдений. Обобщенные M-оценки – GM-оценки являются одной из возможностей получения помехоустойчивых оценок параметров в авторегрессионных моделях при наличии как выбросов, определяемых выборкой, так и аддитивных выбросов. Пусть $\hat{\mu}$ – помехоустойчивая оценки параметра сдвига, и пусть задан набор

$$\tilde{z}_i^T = (y_{i-1} - \hat{\mu},\ y_{i-2} - \hat{\mu}, \cdots, y_{i-p} - \hat{\mu}).$$

Пусть $\hat{C}^{-1}$ - неотрицательно определенная помехоустойчивая оценка матрицы C^{-1}, где C - ковариационная матрица размерности $p \times p$ авторегрессии p-го порядка. Введем $W(\tilde{z}_i) = \varpi(p^{-1} \tilde{z}_i^T \hat{C}^{-1} \tilde{z}_i)$, где $\varpi(\cdot)$ – неотрицательная непрерывная функция такая, что величина $W(\tilde{z}_i)\tilde{z}_i$ ограничена. Если ψ является ограниченной и непрерывной функцией, то все сказанное верно для слагаемых в следующих уравнениях, которые определяют GM-оценки параметра β $\hat{\beta}_{GM} = (\hat{\gamma}, \hat{\varphi}_1, \cdots, \hat{\varphi}_p)$:

$$\sum_{i=p+1}^{n} W(\tilde{z}_i) z_i \psi\left[\frac{y_i - z_i^T \hat{\beta}_{GM}}{\hat{s}}\right] = 0;$$

$$\frac{1}{n-2p-1} \sum_{i=p+1}^{n} W(\tilde{z}_i) \psi^2 \left[\frac{y_i - z_i^T \hat{\beta}_{GM}}{\hat{s}}\right] = A.$$

Если $\hat{\mu} = \mu$ и $A = E_\varphi W(\tilde{z}_i) E_\varphi \psi^2(r)$, то $\hat{s}$ является состоятельной оценкой σ_ε при наличии в IO - модели (выбросов, определяемых выборкой) распределения Гаусса. С помощью итерационного взвешенного метода наименьших квадратов можно построить приближенные решения этих уравнений – GM-оценки, применяя методы регуляризации, как в [5], позволяющие повысить численную устойчивость, что необходимо в случае недостаточно информативных данных.

Выводы

Таким образом, предлагаемый алгоритм позволяет повысить устойчивость оценивания и получить оценки, являющиеся состоятельными для моделей выбросов, определяемых выборкой (вне зависимости от наличия предположений о распределении Гаусса или ограниченной величине дисперсии). Кроме того, полученные оценки являются качественно помехоустойчивыми относительно аддитивных выбросов.

Литература: **1.** *Ljung L.* On consistency and identifiability // Mathematical Programming Study, 1976. N5.P. 169-190. **2.** *Caines P. E.* Prediction error identification methods for stationary stochastic processes // IEEE Trans. Automat. Contr., 1976. Vol. AC-21. P.500-506. **3.** *Martin R.D., Zeh J.E.* Determining the character of time series outliers // Proceeding of the Amer. Statist. Assoc.,1977. **4.** *Gastwirth J.L., Rubin H.* The behaviour of robust estimation on dependent data // Annals. Statist., 1975. Vol.3, N.5. P. 1070-1100. **5.** *Грицюк В.И.* Помехоустойчивые методы оценки параметров // ААЭКС, 2001. №1. С.15-21.

Поступила в редколлегию 17.05.2003

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Петров Э.Г.

Грицюк Вера Ильинична, канд. техн. наук, доцент кафедры системотехники ХНУРЭ. Хобби: музыка, литература. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-306.