

МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ В СЛОЖНЫХ СЕТЯХ

Э. А. Дедиков

Харьков

Рассматривается связанная газодинамическая сеть произвольной топологии и содержащая циклы. Потоки по ветвям сети движутся в заданных направлениях с дозвуковыми скоростями. В некоторых ветвях расположены дросселирующие устройства, падение давления на которых

$$h_p(t) = R_p(t) q^2(t).$$

Поведение потока в ветви при неустановившемся движении дается уравнением

$$L \frac{dq}{dt} + Rq^2 = h,$$

где L , R — акустическая масса и аэродинамическое сопротивление ветви, q — расход жидкости или газа в единицу времени, h — падение давления в ветви (депрессия). Сеть питается источниками давления с уравнением

$$h^{(u)} = a(t) - bq^2(t),$$

где $h^{(u)}$ — давление, развиваемое источником, q — расход жидкости или газа через источник. Посредством параметра $a(t)$ производится управление источником. Нужно построить математическую модель, удобную для исследования на аналоговой машине переходных процессов в сети, вызванных воздействиями $\Delta R_p(t)$ и $\Delta a(t)$ из состояния равновесия.

Рассматриваемая сеть моделируется конечным мультиграфом $G = (X, \Gamma)$, где $|X|$ — количество вершин, $|\Gamma|$ — количество дуг. Известно [1], что в конечном мультиграфе можно указать $\nu = |\Gamma| - |X| + 1$ линейно независимых циклов и при этом в j -ом цикле $j \in \nu$ имеется дуга, принадлежащая только j -му циклу. Назовем эти дуги связями и пронумеруем их номерами, соответствующими номеру того цикла, которому они инцидентны. Остальные дуги с номерами $\nu + 1, \nu + 2, \dots, |\Gamma|$, образуют дерево мультиграфа. При такой нумерации дуг и циклов цикломатическая матрица мультиграфа G запишется как $C = [C_1, C_2]$. Здесь C_1 — единичная матрица, C_2 — матрица порядка $\nu \times (|\Gamma| - \nu)$. Если каждой дуге мультиграфа, моделирующего сеть, поставить в соответствие физические величины, обозначающие значения расхода жидкости или газа q и падения давлений (депрессии) h , то имеют место соотношения

$$q_i = \sum_{j=1}^{\nu} C_{2ji} q_j \quad (1)$$

$$h_j = - \sum_{i=\nu+1}^{|\Gamma|} C_{2ji} h_i - \sum_{i=1}^{|\Gamma|} C_{2ji} h_i^{(u)} \quad (2)$$

где q_j, h_j — значения расходов и депрессий в ветвях сети, соответствующих связям мультиграфа G .

q_i, h_i — значения расходов и депрессий в ветвях сети, соответствующих дугам дерева мультиграфа G , или в матричной форме

$$\vec{q}_I = \vec{q}_{II} C_2; \quad \vec{h}_{II} = -\vec{h}_I C_2^1, \quad (3)$$

здесь

$$\vec{q}_I = (q_{v+1}, \dots, q_T); \quad \vec{q}_{II} = (q_1, \dots, q_v);$$

$$\vec{h}_I = (h_{v+1}, \dots, h_T); \quad \vec{h}_{II} = (h_1, \dots, h_v);$$

C_2' — транспонированная матрица C_2 .

Уравнения дросселирующих устройств, ветвей и источников давления могут быть записаны в приращениях посредством разложения в ряд Тейлора нелинейных функций по степеням их малых приращений относительно состояния равновесия, принятого за начало отсчета. Проведем соответствующие операции, получаем:

для дросселирующего устройства

$$\Delta h_p = 2R_p \Delta q + q^2 \Delta R_p; \quad (4)$$

для ветви

$$L \frac{d\Delta q}{dt} + 2Rq \cdot \Delta q = \Delta h; \quad (5)$$

для источника

$$\Delta h^{(u)} = \Delta a - 2bq \Delta q. \quad (6)$$

Считается для простоты, что дросселирующие устройства размещены в v — ветвях. Дерево выбирается таким, чтобы ветви, содержащие дросселирующие устройства, соответствовали связям мультиграфа G . Тогда уравнение для ветвей соответствующих связям мультиграфа и дугам дерева с учетом (4), (5), соответственно запишутся в виде

$$L_j \frac{d\Delta q_j}{dt} + 2q_j (R_j + R_{pj}) \Delta q_j + q_j^2 \Delta R_{pj} = \Delta h_j; \quad j = 1, 2, \dots, v; \quad (7)$$

$$L_i \frac{d\Delta q_i}{dt} + 2q_i R_i \Delta q_i = \Delta h_i; \quad i = v+1, \dots, |\Gamma_1|, \quad (8)$$

здесь R_{pj} — значение аэродинамического сопротивления дросселирующего устройства j -ой ветви для $t < 0$.

После подстановки (7), (8) в (2) и учета (1) можно записать для приращений следующее:

$$\begin{aligned} L_j \frac{d\Delta q_j}{dt} + 2q_j (R_j + R_{pj}) \Delta q_j + q_j^2 \Delta R_{pj} = & - \sum_{i=v+1}^{|\Gamma_1|} C_{2ji} \left(L_i \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^v C_{2ji} \Delta q_j + \right. \\ & \left. + 2R_i q_i \sum_{j=1}^v C_{2ji} \Delta q_j \right) + \sum_{(i)} \Delta h^{(u)}; \quad \sum_{i=|\Gamma_1|+1}^{|\Gamma_1|} C_{2ji} \Delta h_i^{(u)} = \sum_{(i)} \Delta h^{(u)}, \end{aligned} \quad (9)$$

или

$$\begin{aligned} L_i \frac{d\Delta q_j}{dt} + 2q_j (R_j + R_{pj}) \Delta q_j + \sum_{i=v+1}^{|\Gamma_1|} C_{2ji} L_i \sum_{j=1}^v C_{2ji} \frac{d\Delta q_j}{dt} + \\ + \sum_{i=v+1}^{|\Gamma_1|} C_{2ji} 2R_i q_i \sum_{j=1}^v C_{2ji} \Delta q_j = \sum_{(i)} \Delta h^{(u)} - q_j^2 \Delta R_{pj}, \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\sum_{(i)} \Delta h^{(u)}$ — сумма депрессий, развиваемых источниками, расположенными в ветвях j -го контура.

После раскрытия выражения (10), получается следующая система уравнений:

$$L_{11} \frac{d\Delta q_1}{dt} + R_{11} \Delta q_1 + L_{12} \frac{d\Delta q_2}{dt} + R_{12} \Delta q_2 + \dots + L_{1v} \frac{d\Delta q_v}{dt} + R_{1v} \Delta q_v = \sum_{(1)} \Delta h^{(u)} - q_1^2 \Delta R_{p1}, \quad (11)$$

$$L_{v1} \frac{d\Delta q_1}{dt} + R_{v1} \Delta q_1 + L_{v2} \frac{d\Delta q_2}{dt} + R_{v2} \Delta q_2 + \dots + L_{vv} \frac{d\Delta q_v}{dt} + R_{vv} \Delta q_v = \sum_{(v)} \Delta h^{(u)} - q_v^2 \Delta R_{pv},$$

или в матричной форме записи

$$Y(p) \cdot \vec{\Delta q} = \vec{\Delta \mu}, \quad (12)$$

где

$$\vec{\Delta q} = (\Delta q_1, \dots, \Delta q_v);$$

$$\vec{\Delta \mu} = \left(\sum_{(1)} \Delta h^{(u)} - q_1^2 \Delta R_{p1}, \dots, \sum_{(v)} \Delta h^{(u)} - q_v^2 \Delta R_{pv} \right)$$

$Y(p)$ — матрица коэффициентов системы (11), p — символ дифференцирования.

В результате сравнения (10) и (11) можно записать:

$$R_{jj} = 2q_j(R_i + R_{pi}) + \sum_{i=v+1}^{|\Gamma_1|} C_{2ii} 2R_i q_i,$$

$$L_{jj} = L_j + \sum_{i=v+1}^{|\Gamma_1|} C_{2ii} L_i,$$

$$T_{ij} = \frac{L_{ij}}{R_{ij}}, \quad (13)$$

где $R_{jj} L_{ji}$ — соответственно сумма аэродинамических сопротивлений и акустических масс ветвей, принадлежащих j -му циклу;

T_{ji} — постоянная времени j -го цикла.

Можно указать способ определения коэффициентов R_{jk} и L_{jk} , обозначающих соответственно суммы аэродинамических сопротивлений и акустических масс ветвей дерева, одновременно принадлежащих j -му и k -му циклам.

$T_{jk} = \frac{L_{jk}}{R_{jk}}$ — постоянная времени j -го цикла, с учетом влияния k -го цикла.

Для этой цели введем некоторую матрицу $\|d\|_{n \times l}$, показывающую одновременную принадлежность ветвей выбранного дерева двум независимым циклам. Столбцы матрицы $\|d\|_{n \times l}$ соответствуют ветвям дерева ($i = v+1, \dots, |\Gamma_1|$), строки — каждой комбинации независимых циклов по два. На пересечении n -ой строки, соответствующей (jk) -ым циклам, и i -го столбца ставится 1, если ветвь, соответствующая i -му столбцу одновременно принадлежит (jk) -ым циклам, и ноль, если i -ая ветвь не принадлежит хотя бы одному из этих двух циклов. Количество строк — m такой матрицы определится как число размещений из v элементов по 2.

$m = A_v^2 = \frac{v!}{(v-2)!}$. Тогда коэффициенты R_{jk} и L_{jk} соответственно найдутся из выражения

$$\begin{aligned} R_{jk} &= \sum_{i=v+1}^{|\Gamma_1|} d_{(jk)} i 2R_i q_i, \\ L_{jk} &= \sum_{i=v+1}^{|\Gamma_1|} d_{(jk)} i L_i, \quad i, k = 1, 2, \dots, v, i \neq k. \end{aligned} \quad (14)$$

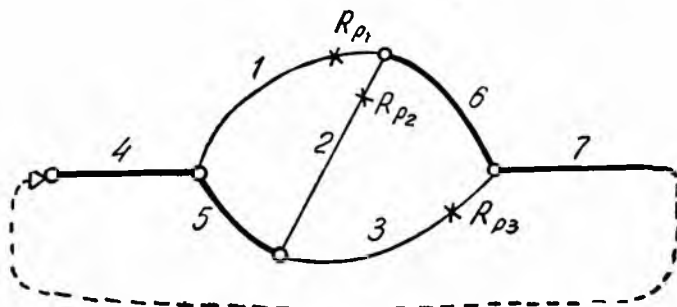


Рис. 1.

С учетом (6) систему (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta q_1}{dt} &= -\frac{1}{L_{11}} \left[R_{11} \Delta q_1 + \dots + R_{1v} \Delta q_v + L_{12} \frac{d\Delta q_2}{dt} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + L_{1v} \frac{d\Delta q_v}{dt} \sum_{i=|\Gamma_1|+1}^{|\Gamma|} C_{21i} (\Delta a_i - q_i 2b_i \Delta q_i) + q_1^2 \Delta R_{\rho 1} \right], \\ \frac{d\Delta q_v}{dt} &= -\frac{1}{L_{vv}} \left[R_{v1} \Delta q_1 + \dots + R_{vv} \Delta q_v + L_{v1} \frac{d\Delta q_1}{dt} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + L_{v, v-1} \frac{d\Delta q_{v-1}}{dt} - \sum_{i=|\Gamma_1|+1}^{|\Gamma|} C_{2vi} (\Delta a_i - q_i 2b_i \Delta q_i) + q_v^2 \Delta R_{\rho v} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Система (15) легко может быть воспроизведена на моделирующей машине.

В качестве примера рассматривается составление структурной схемы для исследования переходных процессов в сети, приведенной на рис. 1. Исходные данные приведены в таблице.

N_{nn}	L	R	R_p	q	$h(u)$	b
1	161,8	0,308	0,315	16	0	0,26
2	108,5	0,42	0,91	10	0	
3	99,9	0,5	2,5	8	0	
4	1,45	0,036	0	34	300	
5	91,5	0,088	0	18	0	
6	28,5	0,087	0	26	0	
7	1,45	0,036	0	34	0	

Жирными линиями на рис. 1 выделены ветви, соответствующие дугам дерева мультиграфа, моделирующего сеть. Матрицы C_2 и $\|d\|$ запишутся в следующем виде:

$j \backslash i$	4	5	6	7
I	1	0	1	1
II	1	1	1	1
III	1	1	0	1

 $C_2 =$

$n \backslash i$	4	5	6	7
I, II	1	0	1	1
I, III	1	0	0	1
I, III	1	1	0	1
III, II	1	1	0	1
III, I	1	0	0	1
II, I	1	0	1	1

 $\|d\| =$

Используя соотношения (13) (14) и данные таблицы, можно легко найти величины R_{jj} , L_{jj} , например,

$$R_{11} = 2q_1(R_1 + R_{p1}) + \sum_{i=4}^7 C_{21i} 2R_i q_i = 27,45,$$

$$L_{11} = L_1 + \sum_{i=4}^7 C_{21i} L_i = 193,2$$

и R_{jk} ; L_{jk} , например,

$$R_{12} = \sum_{i=4}^7 d_{(12)i} 2R_i q_i = 7,45,$$

$$L_{12} = \sum_{i=4}^7 d_{(12)i} L_i = 30,4.$$

Рассчитанные коэффициенты подставляются в систему (11)

$$193,2 \frac{d\Delta q_1}{dt} + 27,45 \Delta q_1 + 30,4 \frac{d\Delta q_2}{dt} + 7,45 \Delta q_2 + 2,9 \frac{d\Delta q_3}{dt} + 4,9 \Delta q_3 = \Delta a -$$

$$- 17,6(\Delta q_1 + \Delta q_2 + \Delta q_3) - 256 \Delta R_{p1}.$$

$$231,4 \frac{d\Delta q_2}{dt} + 30,99 \Delta q_2 + 30,4 \frac{d\Delta q_1}{dt} + 7,45 \Delta q_1 +$$

$$+ 31,4 \frac{d\Delta q_3}{dt} + 7,78 \Delta q_3 = \Delta a - 17,6(\Delta q_1 + \Delta q_2 + \Delta q_3) - 100 \Delta R_{p2}.$$

$$194,3 \frac{d\Delta q_3}{dt} + 55,78 \Delta q_3 + 2,9 \frac{d\Delta q_1}{dt} + 4,9 \Delta q_1 +$$

$$+ 31,4 \frac{d\Delta q_2}{dt} + 7,78 \Delta q_2 = \Delta a - 17,6(\Delta q_1 + \Delta q_2 + \Delta q_3) - 64 \Delta R_{p3}.$$

Полученная система приводится к виду (15), удобному для составления структурной схемы

$$\frac{d\Delta q_1}{dt} = -0,233 \Delta q_1 - 0,125 \Delta q_2 - 0,116 \Delta q_3 - 0,156 \frac{d\Delta q_2}{dt} -$$

$$- 0,015 \frac{d\Delta q_3}{dt} - 1,34 \Delta R_{p1} + \frac{1}{193,2} \Delta a.$$

$$\frac{d\Delta q_2}{dt} = -0,249 \Delta q_2 - 0,108 \Delta q_1 - 0,109 \Delta q_3 -$$

$$- 0,132 \frac{d\Delta q_1}{dt} - 0,136 \frac{d\Delta q_3}{dt} - 0,43 \Delta R_{p2} + \frac{1}{231,4} \Delta a.$$

$$\frac{d\Delta q_3}{dt} = -0,39 \Delta q_3 - 0,115 \Delta q_1 - 0,13 \Delta q_2 - 0,0149 \frac{d\Delta q_1}{dt} -$$

$$- 0,162 \frac{d\Delta q_2}{dt} - 0,33 \Delta R_{p3} + \frac{1}{194,3} \Delta a.$$

Полученной системе уравнений отвечает структурная схема, представленная на рис. 2, где x_5 , x_6 , x_7 соответствуют приращениям расходов Δq_1 , Δq_2 , Δq_3 ; а Δu_1 , Δu_2 , Δu_3 — ΔR_{p1} , ΔR_{p2} , ΔR_{p3} , ΔA соответствует

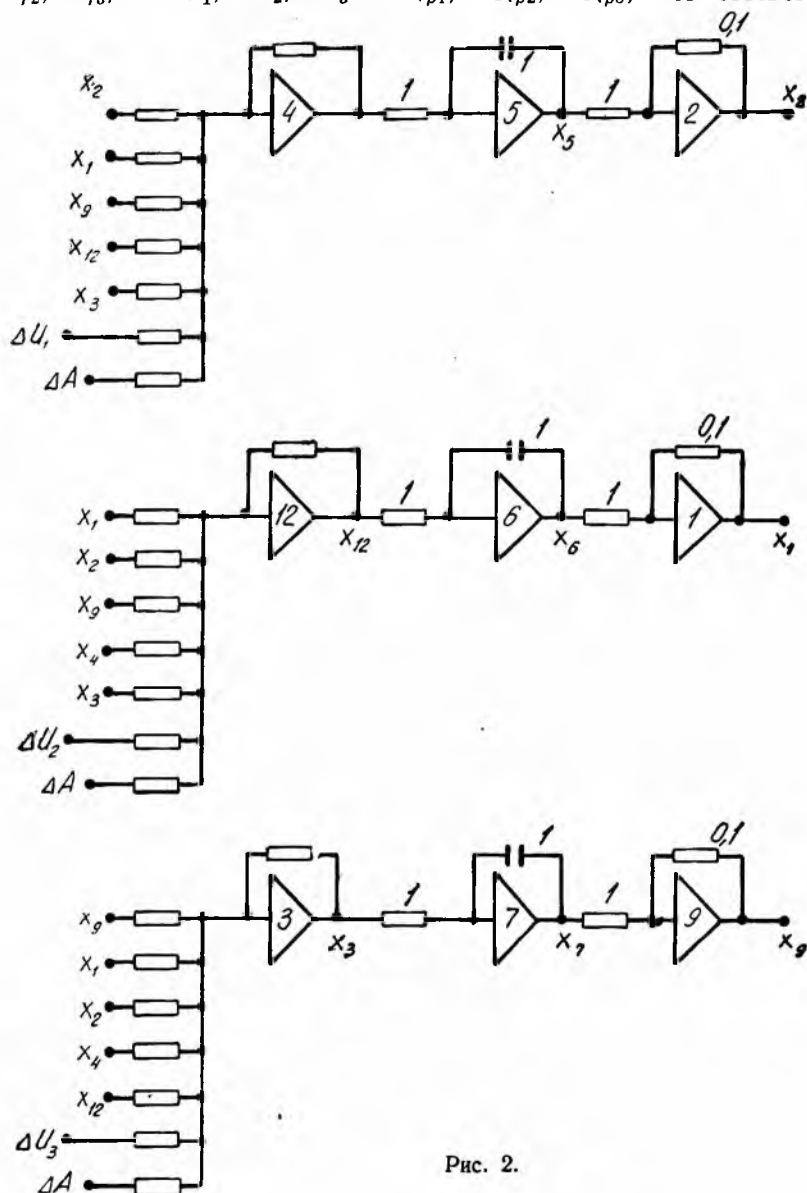


Рис. 2.

управлению Δa , приложенному к источнику. Используя известный метод [2], подсчитываются передаточные коэффициенты операционных усилителей при заданных масштабах M_q , $M_{\Delta a}$, M_t и $M_{\Delta R}$. Их значения для схемы рис. 2 приведены ниже

$$M_q = 0,25, \quad M_t = 1, \quad M_{\Delta a} = 1,5 \quad M_{\Delta R} = 0,025$$

$$k_{45} = k_{126} = k_{97} = 1, \quad k_{52} = k_{61} = k_{78} = 0,1,$$

$$k_{24} = 2,33, \quad k_{112} = 2,49, \quad k_{93} = 3,91,$$

$$k_{14} = 1,29, \quad k_{212} = 1,18, \quad k_{13} = 1,31,$$

$$\begin{aligned}k_{94} &= 1,65, & k_{912} &= 1,09, & k_{23} &= 1,16, \\k_{124} &= 1,56, & k_{412} &= 1,32, & k_{43} &= 0,149, \\k_{34} &= 0,15, & k_{312} &= 1,36, & k_{123} &= 1,62, \\k_{\Delta u_2 4} &= 1,34, & k_{\Delta u_2 12} &= 0,43, & k_{\Delta u_3 3} &= 0,33, \\k_{\Delta A 4} &= 0,31, & k_{\Delta A 12} &= 0,26, & k_{\Delta A 3} &= 0,31.\end{aligned}$$

Первая цифра индекса передаточного коэффициента означает номер хода, вторая — номер усилителя, например k_{24} — передаточный коэффициент четвертого усилителя по второму входу.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж. Теория графов и ее применение. Изд.-во иностр. лит., М., 1963.
 2. Б. Я. Коган. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования системы автоматического регулирования. Физматгиз, М., 1959.
-