

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Електронної та біомедичної інженерії
(повна назва)

Кафедра Фізичних основ електронної техніки
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти перший (бакалаврський)
СТАБІЛІЗАЦІЯ ЧАСТОТИ ВИПРОМІНЮВАННЯ ЛАЗЕРНОГО
ДЖЕРЕЛА
(тема)

Виконав:
здобувач 4 року навчання,
групи МТЮЛС-21-1
Віталій ШМАЛІЙ
(власне ім'я, прізвище)

Спеціальність 152 Метрологія та
інформаційно-вимірювальна техніка
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

Освітня програма «Інженерія
оптоінформаційних та лазерних систем»
(повна назва освітньої програми)

Керівник ст. викл. каф. ФОЕТ Сергій КУХТІН
(посада, власне ім'я, прізвище)

Допускається до захисту

Завідувач кафедри ФОЕТ _____
(підпис)

Олександр ГНАТЕНКО
(власне ім'я, прізвище)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Електронної та біомедичної інженерії

Кафедра Фізичних основ електронної техніки

Рівень вищої освіти перший (бакалаврський)

Спеціальність 152 Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка
(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

Освітня програма «Інженерія оптоінформаційних та лазерних систем»
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри _____
(підпис)

« ____ » _____ 20 ____ р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Шмалію Віталію Юрійовичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Стабілізація частоти випромінювання лазерного джерела

затверджена наказом університету від «23» травня 2025 р. № 408 Ст _____

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 23 червня 2025 р. _____

3. Вихідні дані до роботи частотні характеристики лазерного випромінювання параметри стабілізації; конструктивні особливості лазера; умови експлуатації та математичні моделі процесів генерації і стабілізації.

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі Вступ. 1 Параметри лазерного випромінювання. 2 Стабілізація He-Ne Лазера по комірці з йодом 3 Модуляційна спектроскопія йоду: розрахунок коефіцієнта поглинання в оптичній комірці.

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій
Демонстраційний матеріал – 10 слайдів.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Строк / терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Інформаційно-тематичний пошук та огляд літературних джерел щодо стабілізації лазерного випромінювання	07.05.25–17.05.25	Виконано
2	Дослідження параметрів лазерного випромінювання та факторів нестабільності	18.05.25–24.05.25	Виконано
3	Виконання чисельних розрахунків характеристик системи стабілізації He-Ne лазера	25.05.25–29.05.25	Виконано
4	Аналіз розрахунків та параметрів оптичних стандартів частоти	30.05.25–03.06.25	Виконано
5	Оформлення пояснювальної записки	04.06.25–11.06.25	Виконано
6	Оформлення демонстраційних матеріалів	12.06.25–14.06.25	Виконано
7	Проходження нормоконтролю та перевірки на академічний плагіат	15.06.25–20.06.25	Виконано
8	Отримання відгуку та рецензії	21.06.25–22.06.25	Виконано
9	Підготовка та захист кваліфікаційної роботи	23.06.25–24.06.25	Виконано

Дата видачі завдання 05 травня 2025 р.

Здобувач



(підпис)

Керівник роботи

(підпис)

ст. викл. каф. ФОЕТ Сергій КУХТІН

(посада, власне ім'я, прізвище)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка кваліфікаційної роботи: 53 с., 23 рис., 1 табл., 1 додаток, 19 джерел.

ГАЗОВІ ЛАЗЕРИ, ЙОДНА КОМІРКА, КОНСТРУКТИВНІ ОСОБЛИВОСТІ, ОПТИЧНІ СТАНДАРТИ ЧАСТОТИ, ПІЄЗОКЕРАМІКА, ПОЛЯРИЗАЦІЙНІ МОДИ, ПРИКЛАДНА МЕТРОЛОГІЯ, СТАБІЛІЗАЦІЯ ЧАСТОТИ He-Ne ЛАЗЕРА, ФЛУКТУАЦІЇ ЧАСТОТИ.

Об'єкт дослідження — гелій-неоновий (He-Ne) лазер як оптичне джерело зі стабілізованою частотою.

Метою кваліфікаційної роботи є дослідження методів стабілізації частоти випромінювання He-Ne лазера, аналіз впливу конструктивних елементів і зовнішніх чинників на точність генерації, а також вивчення застосування стабілізованих лазерів як оптичних стандартів частоти.

Метод дослідження — теоретичний, аналітичний огляд літератури з елементами структурно-функціонального аналізу.

Для досягнення мети в роботі поставлено та вирішено наступні завдання:

1. Дослідити фізичні основи генерації випромінювання у He-Ne лазері, механізми інверсії населеності та формування поляризаційних мод.
2. Проаналізувати конструктивні особливості лазера та роль п'єзокерамічних елементів у зміні резонансних параметрів.
3. Розглянути методи активної стабілізації частоти на основі йодної комірки, схеми ПІ-регулювання та системи зворотного зв'язку.
4. Оцінити вплив температурних і механічних факторів (вібрацій, варіацій тиску) на нестабільність частоти генерації.
5. Визначити метрологічні переваги He-Ne лазера в точних вимірюваннях і стандартизації частоти.

ABSTRACT

Explanatory note of the qualification work: 53 p., 23 figures, 1 table, 1 appendix, 19 sources.

APPLIED METROLOGY, DESIGN FEATURES, FREQUENCY FLUCTUATIONS, GAS LASERS, He-Ne LASER FREQUENCY STABILIZATION, IODINE CELL, OPTICAL FREQUENCY STANDARDS, PIEZO-CERAMICS, POLARIZATION MODES.

The object of study is a helium-neon (He-Ne) laser as an optical source with a stabilized frequency.

The purpose of the qualification work is to study the methods of stabilizing the frequency of the He-Ne laser, to analyze the influence of structural elements and external factors on the generation accuracy, and to study the use of stabilized lasers as optical frequency standards.

The research method is a theoretical and analytical review of the literature with elements of structural and functional analysis.

To achieve this goal, the following tasks were set and solved:

1. To investigate the physical basis of radiation generation in a He-Ne laser, the mechanisms of population inversion and polarization mode formation.
2. To analyze the design features of the laser and the role of piezoceramic elements in changing the resonance parameters.
3. To consider methods of active frequency stabilization based on the iodine cell, PI control schemes and feedback systems.
4. Estimate the influence of temperature and mechanical factors (vibrations, pressure variations) on the instability of the generation frequency.
5. Determine the metrological advantages of the He-Ne laser in accurate measurements and frequency standardization.

ЗМІСТ

Вступ.....	7
1 Стабілізація частоти лазерного джерела.....	9
1.1 Параметри лазерного випромінювання.....	9
1.1.1 Механізми розширення спектральної лінії.....	12
1.2 Важливість та використання стабілізації лазерів.....	15
1.2.1 Загальна необхідність стабілізації та її роль.....	15
1.2.2 Напівпровіникові лазери і методи їх стабілізації.....	16
1.2.3 Конструктивні та активні методи стабілізації.....	19
1.2.4 Оптичні стандарти частоти та застосування стабілізованих лазерів	22
1.2.5 Прогрес у стабілізації: «Холодні» атоми, перспективи та виклики	24
1.3 Типи лазерів і методи їхньої стабілізації.....	29
1.3.1 Твердотілі лазери з напівпровідниковим накачуванням: лінійні та кільцеві конфігурації.....	32
2 Стабілізація He-Ne лазера по комірці з йодом.....	36
2.1 Характеристики і особливості He-Ne лазера.....	36
2.2 Принцип стабілізації (модуляція частоти, п'єзокерамічні елементи на дзеркалах і.т.д). Комірка з йодом. Лінія поглинання йоду.....	42
3 Модуляційна спектроскопія йоду: розрахунок коефіцієнта поглинання в оптичній комірці.....	45
Висновки.....	50
Перелік джерел посилання.....	52
Додаток А Демонстраційний матеріал.....	54

ВСТУП

У сучасній метрології зростає потреба в точних і стабільних джерелах оптичного випромінювання, що зумовлено активним розвитком наукомістких галузей: лазерної спектроскопії, високоточної навігації, інтерферометрії, нанометрології та стандартизації. З-поміж усіх джерел, які забезпечують оптичну генерацію, особливе місце посідають гелій-неонові (He-Ne) лазери, що поєднують конструктивну простоту з високими показниками стабільності частоти випромінювання. Саме ці властивості роблять He-Ne лазери незамінними у складі оптичних еталонів частоти, які використовуються для калібрування та верифікації вимірювальної апаратури.

Незважаючи на широку поширеність He-Ne лазерів, однією з основних проблем залишається забезпечення довготривалої стабільності їх частотних характеристик. Навіть незначні зміни температури, тиску в газорозрядній трубці чи вібраційні впливи здатні призвести до нестабільності генерації, що унеможлиблює точні вимірювання. У зв'язку з цим розробка методів частотної стабілізації, зокрема із застосуванням йодних комірок, п'єзокерамічних актуаторів та схем електронного зворотного зв'язку, є актуальним завданням сучасної оптоелектроніки.

Метою кваліфікаційної роботи є дослідження фізичних основ стабілізації частоти випромінювання He-Ne лазера, аналіз конструктивних рішень, що впливають на точність генерації, а також огляд і реалізація математичних підходів до оцінки стабільності системи. У межах роботи розглядаються спектральні характеристики випромінювання, механізми інверсії населеності, структура резонатора, вплив поляризаційних мод і принципи дії ПІ-регулятора в складі зворотного зв'язку.

Актуальність обраної теми обумовлена необхідністю забезпечення високої точності у метрологічних системах, де He-Ne лазер виступає джерелом частотно стабілізованого випромінювання. Результати роботи можуть бути використані в системах калібрування оптичних приладів, побудові лазерних

частотних стандартів і навчально-лабораторних стендах у галузі оптоінформаційної техніки.

1 СТАБІЛІЗАЦІЯ ЧАСТОТИ ЛАЗЕРНОГО ДЖЕРЕЛА

1.1 Параметри лазерного випромінювання

Частотні характеристики лазерного випромінювання є ключовим фактором для визначення його застосування в точних вимірюваннях, стандартизації та телекомунікаційних технологіях. Основні параметри, що характеризують лазер як джерело випромінювання, включають центральну частоту, ширину спектральної лінії, часову та просторову когерентність. У цьому контексті ширина спектральної лінії виступає одним із головних критеріїв оцінки якості джерела.

Частота лазерного випромінювання визначається властивостями активного середовища та геометрією оптичного резонатора. В залежності від конструктивних характеристик, зокрема довжини резонатора та його діафрагми, лазер може працювати у багаточастотному або одночастотному режимі, а також генерувати одномодовий або багатомодовий пучок. У випадку реалізації одночастотного й одномодового режиму можна ввести поняття ширини спектральної лінії, яка поділяється на природну та технічну.

Природна ширина лінії випромінювання зумовлена квантовими властивостями системи та її взаємодією з середовищем. Вона, як правило, є значно меншою за технічну ширину ($\Delta\omega_e \ll \Delta\omega_t$), яка виникає внаслідок шумів та нестабільностей, пов'язаних з флуктуаціями параметрів джерела, зокрема температури, струму накачування та механічних вібрацій. У лазерах, стабілізованих за допомогою вузьких оптичних резонансів в атомах чи молекулах, досягається надзвичайно мала ширина спектральної лінії, яка може сягати значення приблизно 0,5 Гц. У таких системах зменшення технічних шумів дозволяє природним флуктуаціям відігравати провідну роль [1].

Форма природної спектральної лінії описується лоренцівським профілем і описується як:

$$\Delta\omega_e = \frac{8\pi h\nu}{P} (\Delta\omega_{рез})^2, \quad (1.1)$$

де h – стала Планка;

P – тиск;

$\Delta\omega_{рез}$ – частота резонансу.

Технічна ширина моделюється на основі гаусових флуктуацій:

$$G(\omega) = \frac{\rho^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma_\omega^2}\right], \quad (1.2)$$

де ρ – щільність;

σ_ω^2 – дисперсія частоти.

При цьому розширення спектра зумовлено як конструктивними особливостями лазера, так і застосованими методами стабілізації. Показником когерентності джерела є також довжина когерентності, яка визначається як добуток швидкості світла на інтервал часу, протягом якого фаза випромінювання залишається стабільною.

Для оцінки стабільності та шумових характеристик лазера часто застосовується аналіз миттєвої частоти, яка пов'язана з фазою електромагнітної хвилі. Флуктуації цієї частоти можуть бути описані через статистичні моделі, що дозволяють визначити середнє значення та дисперсію. Зокрема, практичне використання таких моделей ґрунтується на дисперсії Алана, яка дозволяє оцінити нестабільність частоти у часовій області. Вона є функцією інтервалу усереднення та залежить від кореляційних властивостей шумів.

Іншим важливим аспектом аналізу є нормалізована частота та її статистичні флуктуації. Під час експериментальних вимірювань використовується послідовність частотних значень, отриманих у дискретні моменти часу. На основі цієї вибірки визначається гістограма, яка відображає розподіл значень, що дозволяє застосовувати центральну граничну теорему і

моделювати розподіл флуктуацій за нормальним законом. Це, у свою чергу, дозволяє оцінити очікуване значення та варіацію процесу.

Для випадків, коли флуктуації є корельованими, вводиться поняття мертвого часу між вимірюваннями, що впливає на точність статистичних оцінок [1]. У випадку коли час вимірів – τ , кількість виконаних вимірів – N , час між початковими моментами окремих вимірів – T (також потрібно врахувати, що, зазвичай, мертвий час $T-\tau$ між вимірами величина позитивна), то можна ввести варіацію у такому вигляді:

$$\sigma^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j)^2. \quad (1.3)$$

Як нам відомо, дисперсія Алана $\sigma_y^2(2, \tau, \tau)$ являє собою двоточкову дисперсію за умови $T = \tau$ і описується виразом:

$$\sigma_y^2(\tau) = \langle \sum_{i=1}^2 (\bar{y}_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \bar{y}_j)^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 \rangle. \quad (1.4)$$

Альтернативним методом аналізу є використання девіації фази або нормалізованої фази як засобу оцінювання стабільності частоти в системах із шумовими збуреннями.

Додатково до частотних характеристик важливу роль відіграє поняття когерентності, яке охоплює узгодженість хвильових процесів у просторі та часі. В інтерференційних лазерних технологіях розрізняють просторову та часову когерентність. Перша характеризує здатність хвиль взаємодіяти на певній площі, а друга – протягом певного інтервалу часу. Чим вища когерентність, тим стабільніша та вужча спектральна лінія випромінювання.

Зокрема, під час високоточних вимірювань довжини хвилі виникає потреба у визначенні абсолютного значення. Це можливо завдяки порівнянню з первинним еталоном – наприклад, спектральною лінією ізотопу криптону-

86. Проте точність такого еталона обмежена ($\sim 10^{-9}$), що стимулює використання стабілізованих лазерів, зокрема He-Ne лазерів, як вторинних еталонів.

Використання інтерферометра Фабрі-Перо разом із стабілізованим лазером дозволяє досягти підвищеної точності вимірювань. Випромінювання еталонного джерела (наприклад, лазера або криптонової лампи) вводиться в інтерферометр, і кількість довжин хвиль, які вміщуються між дзеркалами, визначає абсолютну довжину хвилі. Точні вимірювання частоти досліджуваного лазера здійснюються за допомогою технік гетеродину та порівняння частот у радіодіапазоні.

Узагальнюючи, можна зазначити, що параметри лазерного випромінювання, такі як ширина спектральної лінії, миттєва частота, дисперсія Алана, час та довжина когерентності, параметри просторової когерентності, розбіжність пучка, M^2 -параметр, а також методи точного вимірювання довжини хвилі через інтерферометри, визначають придатність джерела для точних метрологічних застосувань.

1.1.1 Механізми розширення спектральної лінії

У метрології та лазерній спектроскопії знання механізмів розширення дозволяє вибирати оптимальні умови стабілізації лазерів (наприклад, мінімізацію доплерівського ефекту при охолодженні), інтерпретувати спектроскопічні дані з урахуванням колізійного впливу на ширину лінії, оцінювати точність та роздільну здатність приладових систем.

Особливо це актуально для стабілізованих лазерів, які працюють із використанням вузьких спектральних ліній як оптичних реперів. Наприклад, стабілізація He-Ne лазера на лінії йоду вимагає врахування профілю Фойгта, оскільки спостерігається поєднання доплерівського та колізійного розширення.

Зменшення ширини спектральної лінії до фізичних меж — ключова умова для досягнення відносної нестабільності частоти на рівні від 10^{-12} до 10^{-15} , що необхідно для атомних годинників, лазерної локації, квантових технологій.

Природна ширина спектральної лінії є наслідком обмеженого часу життя збудженого стану атома або молекули. Відповідно до принципу невизначеності Гейзенберга $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$, короткочасне існування енергетичного стану призводить до невизначеності енергії переходу, що, в свою чергу, спричиняє розширення спектральної лінії. Такий механізм призводить до лоренцівського профілю інтенсивності спектрального розподілу:

$$I(\omega) = I_0 \cdot \frac{\gamma^2/4}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}, \quad (1.5)$$

де ω_0 — центральна частота;

γ — повна ширина на піввисоті (FWHM).

Внаслідок теплового руху атомів або молекул у газовому середовищі спостерігається зсув частоти випромінювання через ефект Доплера. Цей зсув залежить від проєкції швидкості частинки на напрям випромінювання. В результаті спектральна лінія набуває гаусівського профілю:

$$I(\omega) = I_0 \cdot \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Delta\omega_D^2}\right], \quad (1.6)$$

де $\Delta\omega_D$ — ширина доплерівського розширення, що визначається як:

$$\Delta\omega_D = \omega_0 \sqrt{\frac{2kT}{mc^2}}, \quad (1.7)$$

де k — стала Больцмана;

T — температура;

m — маса частинки;

c – ШВИДКІСТЬ СВІТЛА.

Доплерівське розширення зростає зі збільшенням температури й особливо помітне для легких атомів у газовій фазі. Тобто, доплерівське розширення прямо залежить від температури та обернено пропорційне масі частинок. У спектроскопії, де досліджуються гази при кімнатній температурі, доплерівське розширення зазвичай переважає над природним.

Зіткнення атомів і молекул між собою або зі стінками посудини призводять до переривання когерентного випромінювання. Це так зване колізійне (тискозалежне) розширення, також має лоренцівський профіль. Коли атоми або молекули стикаються між собою або зі стінками посудини, відбувається декогеренція — зміна фази або переривання випромінювання, що спричиняє розширення спектральної лінії. Такий тип розширення має лоренцівський профіль і називається тискозалежним або колізійним. Його ширина прямо пропорційна до тиску газу:

$$\gamma_c = n \cdot \sigma \cdot v, \quad (1.8)$$

де n – концентрація частинок;

σ – ефективний переріз зіткнення;

v – середня швидкість частинок.

Підвищення тиску або температури призводить до збільшення ширини лінії через частіші зіткнення. В експериментах цей ефект часто використовують для діагностики тиску в середовищі.

У більшості реальних ситуацій доплерівське та колізійне розширення відбуваються одночасно. У таких випадках спектральна лінія описується профілем Фойгта, який є згорткою гаусівського та лоренцівського профілів:

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega') \cdot L(\omega - \omega') d\omega'. \quad (1.9)$$

Цей профіль не має аналітичного виразу в замкненій формі, однак чисельні алгоритми дозволяють ефективно його використовувати для

апроксимації експериментальних спектрів. На рисунку 1.1 зображено типові форми лоренцівського, гаусівського та фойгтівського профілів.

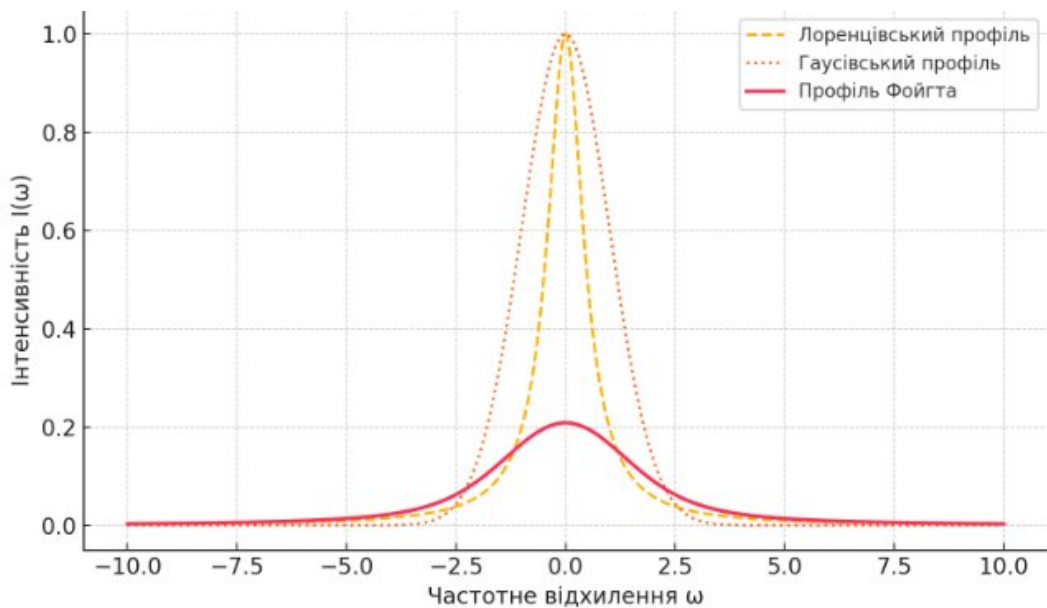


Рисунок 1.1 – Порівняння профілів спектральної лінії

1.2 Важливість та використання стабілізації лазерів

1.2.1 Загальна необхідність стабілізації та її роль

Як було показано у підрозділі 1.1, частотні характеристики лазерного випромінювання, зокрема ширина спектральної лінії та миттєві флуктуації частоти, відіграють ключову роль у забезпеченні точності вимірювань, когерентності сигналу та метрологічної надійності. Проте жоден лазер не є ідеально стабільним, оскільки його частота піддається впливу як внутрішніх шумів (теплових, струмових), так і зовнішніх збурень. У зв'язку з цим стабілізація частоти випромінювання стає обов'язковою умовою для застосування лазерів у системах, що вимагають високої частотної стабільності, зокрема в оптичних стандартах частоти.

1.2.2 Напівпровіникові лазери і методи їх стабілізації

Згідно з даними джерела [2], однією з найефективніших архітектур стабілізації є напівпровідниковий лазер із зовнішнім резонатором, де оптичний зворотний зв'язок реалізується за допомогою дзеркала, розміщеного на певній відстані від активної області. Така система дозволяє істотно зменшити ширину лінії випромінювання та стабілізувати частоту генерації.

Теоретичний опис роботи таких систем здійснюється за допомогою моделі Ланга–Кобаясі, яка представляє собою систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dE_0}{dt} = \frac{1}{2} G_N \cdot \Delta N(t) \cdot E_0(t) + \frac{x}{\tau E_0(t-\tau)} \cdot \cos \Delta(t) + \frac{R}{2V \cdot E_0(t)} + F_E(t), \quad (1.10)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \alpha G_N \cdot \Delta N(t) - \frac{x}{\tau} \cdot \frac{E_0(t-\tau)}{E_0(t)} \cdot \sin \Delta(t) + F_\phi(t), \quad (1.11)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = J(t) - \frac{N(t)}{\tau_S} - G(N) \cdot E_0^2(t), \quad (1.12)$$

де $\Delta(t) = \omega_0 \tau + \phi(t) - \phi(t-\tau)$;

$E(t) = E_0(t) \cdot e^{i(\omega t + \phi(t))}$ – поле, яке виходить з діодного лазера із зовнішнім резонатором;

$N(t)$ – щільність носіїв усереднених по всьому об'єму активної зони лазерного діода.

Ця модель представлена системою взаємопов'язаних диференціальних рівнянь (1.10–1.12), які динамічно описують поведінку трьох основних параметрів лазера: амплітуди електричного поля, фази випромінювання та щільності носіїв заряду в активній зоні лазерного діода. Рівняння (1.10) описує еволюцію амплітуди електричного поля $E(t)$ випромінювання, відображаючи, як інтенсивність лазерного світла змінюється з часом під впливом посилення в активному середовищі та втрат. Рівняння (1.11) стосується еволюції фази випромінювання $\phi(t)$, що є надзвичайно важливою для когерентності та

стабільності частоти. Воно показує, як фаза змінюється під дією внутрішніх процесів у лазері та оптичного зворотного зв'язку. Величина $\Delta(t) = \omega_0 \tau + \phi(t) - \phi(t - \tau)$ у цих рівняннях враховує вплив запізнення зворотного зв'язку, де ω – оптична частота, а τ – час затримки сигналу, що повертається із зовнішнього резонатора. Рівняння (1.12) описує динаміку щільності носіїв заряду $N(t)$ в активній області лазерного діода, що безпосередньо впливає на коефіцієнт посилення лазера та, відповідно, на його вихідну потужність і частоту.

У такій конфігурації довжина зовнішнього резонатора значно менша за довжину когерентності лазера, тому зворотний зв'язок суттєво впливає на динаміку частоти та фазу генерації. За рахунок багаторазового проходження світла в резонаторі, формується ефективний коефіцієнт зворотного зв'язку f , який можна представити у вигляді:

$$f = \frac{1 + \frac{R_3}{r_2} \sqrt{\frac{I(t-\tau)}{I(t)}} \exp\{i[\phi + \phi_n(t-\tau) - \phi_n(t)]\}}{1 + r_2 R_3 \sqrt{\frac{I(t-\tau)}{I(t)}} \exp\{\phi + \phi_n(t-\tau) - \phi_n(t)\}}, \quad (1.13)$$

де $\phi = \omega_0 \tau$;

r_2, R_3 – коефіцієнти відбиття дзеркал.

Центральним елементом стабілізації в такій конфігурації є оптичний зворотний зв'язок, що забезпечується зовнішнім дзеркалом. Його ефективність кількісно вимірюється коефіцієнтом f (рівняння 1.13), який залежить від коефіцієнтів відбиття дзеркал r_2 та R_3 . Чим більший цей коефіцієнт, тим сильніший вплив зовнішнього резонатора на динаміку лазера.

Умова стабільності лазерної генерації досягається в стаціонарному режимі, коли всі похідні за часом у рівняннях Ланга–Кобаясі дорівнюють нулю. Це означає, що система приходить у рівновагу, де параметри лазера (амплітуда поля, фаза, щільність носіїв) не змінюються з часом. У цьому стані виконуються умови фазового та амплітудного балансу (рівняння 1.14 та 1.15). Ці рівняння є критично важливими, оскільки вони визначають частоту та

потужність, за якої лазер генерує стабільне випромінювання. Амплітудний баланс (1.15) гарантує, що посилення в лазері компенсує всі втрати, дозволяючи підтримувати постійну інтенсивність випромінювання. Фазовий баланс (1.14) забезпечує, що фаза випромінювання залишається незмінною в часі, що є прямою передумовою для стабільної частоти. Саме досягнення цього балансу через контрольований зворотний зв'язок дозволяє значно зменшити ширину спектральної лінії та стабілізувати частоту генерації. У стаціонарному режимі, коли всі похідні дорівнюють нулю, виконуються умови фазового та амплітудного балансу:

$$\Delta G = -\frac{2}{\tau_i} H_1, \quad (1.14)$$

$$\omega = \Omega + \frac{1}{\tau_i} (\alpha H_1 - P_1), \quad (1.15)$$

де H_1, P_1 – величини, що визначають фазовий та амплітудний зсув, залежні від характеристик резонатора.

Кількісною мірою ефективності стабілізації є коефіцієнт:

$$F = \frac{d\Omega}{d\omega} = 1 + \frac{\tau}{\tau_i} (H_2 - \alpha P_2), \quad (1.16)$$

де $d\Omega, d\omega$ – малі девіації центральної частоти у самого лазерного діода та лазерів із зовнішнім резонатором, який відображає ступінь зменшення зсувів частоти і ширини лінії випромінювання.

У процесі аналізу стабілізації частоти лазерного випромінювання важливим є не лише якісний опис ефективності, але й кількісна оцінка. Для цього у даній роботі використано умовний коефіцієнт стабілізації частоти, позначений як FFF (Frequency Fluctuation Factor), який дозволяє чисельно охарактеризувати ступінь зменшення частотних флуктуацій після застосування методів стабілізації [3]. Чим більше значення FFF, тим стабільнішим є лазер. Ефективність стабілізації кількісно оцінюється за допомогою коефіцієнта FFF (рівняння 1.16), який відображає ступінь

зменшення зсувів частоти та ширини лінії випромінювання. Чим більше значення FFF, тим стабільнішим є лазер, що підкреслює пряму кореляцію між впровадженими методами зворотного зв'язку та покращенням частотних характеристик.

1.2.3 Конструктивні та активні методи стабілізації

Для подолання цих ефектів у сучасних високоточних приладах застосовуються різні методи стабілізації частоти лазерного випромінювання.

Одним з найбільш ефективних рішень є використання напівпровідникових лазерів із зовнішнім резонатором та зворотним зв'язком. Теоретичною основою для їх опису є модель Ланга–Кобаясі, яка дозволяє врахувати флуктуації електричного поля, фази та щільності носіїв у активній зоні. Згідно з результатами моделювання, зворотний зв'язок, реалізований через зовнішнє дзеркало, дозволяє значно зменшити ширину спектральної лінії та стабілізувати частоту генерації. Це досягається за рахунок фазового і амплітудного балансу в системі.

Конструктивна реалізація стабілізованого лазера включає два основних модулі: лазерний модуль та модуль оптичної реперопоглинаючої секції. Перший містить лазерний діод, мікрооб'єктив та дифракційну решітку на п'єзокерамічному перетворювачі. Другий модуль включає йодну комірку, оптичний ізолятор, поляризаційні пластинки та дзеркало (рис. 1.2), які утворюють модуль оптичного репера.

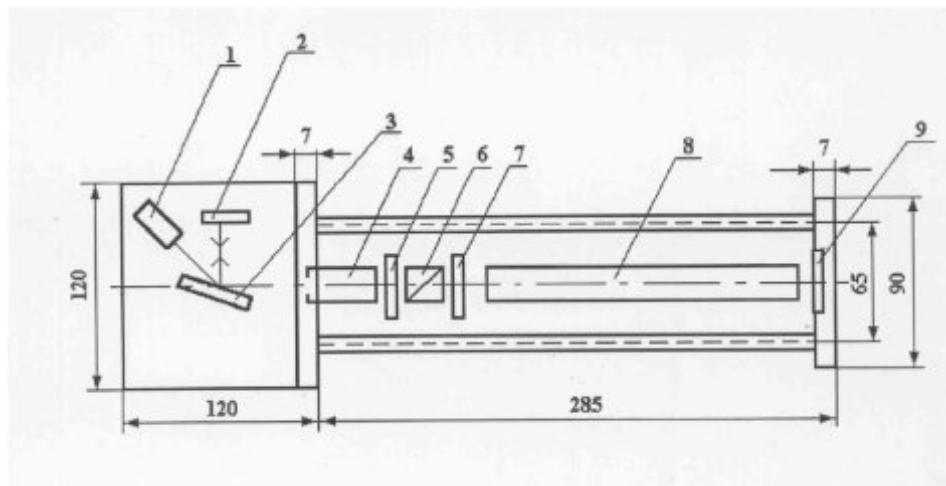


Рисунок 1.2 – Креслення лазерного модуля, разом із модулем оптичного репера

Основним джерелом нестабільності частоти в таких лазерах є температурна чутливість. Наприклад, зміна температури кристала лазера на $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ може викликати зсув частоти до 25 ГГц. Тому в конструкції передбачено термостабілізацію лазера та йодної комірки з використанням точних термодатчиків. Також застосовано матеріали з низьким коефіцієнтом теплового розширення, як-от інвар або ситал.

Додаткову стабільність забезпечує пасивна віброізоляція, що досягається рознесенням резонансних частот елементів конструкції та використанням демпфувальних матеріалів. У юстуванні оптичних елементів використовуються карданні або гнучкі механізми, які забезпечують точне налаштування при мінімальних механічних коливаннях [4].

Важливим компонентом є мікροоб'єктив, що трансформує асиметричний пучок випромінювання в слабо розбіжний. Він складається з п'яти лінз і дозволяє компенсувати аберації, покращити циркулярність пучка та зменшити втрати за рахунок покриття лінз антивідбивними шарами (рис. 1.3).

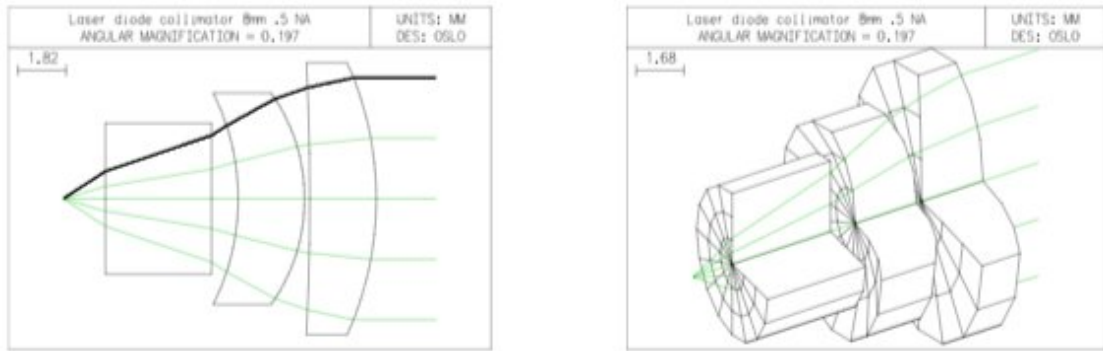


Рисунок 1.3 – Оптична та об'ємна схема мікрооб'єктива для лазерного діода

У поглинаючій секції формується сильна хвиля з круговою поляризацією, яка проходить через йодну комірку, викликаючи насичене поглинання. Відбитий сигнал з протилежною поляризацією реєструється як слабка хвиля. Завдяки ефекту доплерівського просвітлення вдається досягти надзвичайно вузьких ліній поглинання, що слугують еталоном для стабілізації.

Стабілізація частоти реалізується за допомогою системи автоматичного регулювання з частотною модуляцією лазера та синхронним детектуванням сигналу (рис. 1.4). Результуючий сигнал помилки використовується в ПІ-контролері для корекції частоти випромінювання. Сучасні цифрові системи стабілізації дозволяють зменшити відносну погрішність до рівня 10^{-6} , що значно покращує метрологічні характеристики пристрою.

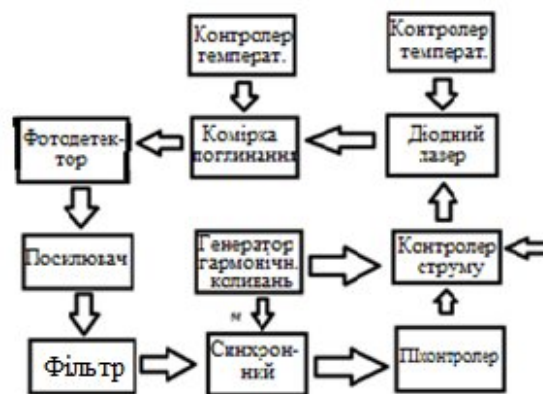


Рисунок 1.4 – Блок-схема системи стабілізації частоти

Таким чином, конструкція стабілізованих за частотою напівпровідникових лазерів поєднує оптико-механічні, електронні та програмні компоненти, які в комплексі забезпечують надійну та точну генерацію когерентного випромінювання з мінімальним спектральним дрейфом.

1.2.4 Оптичні стандарти частоти та застосування стабілізованих лазерів

У цьому контексті стає очевидним, чому лазери широко використовуються як стандарти частоти. Їх вузькі спектральні лінії, висока когерентність та можливість точного керування частотою роблять їх незамінними у метрології, спектроскопії та телекомунікаціях. Завдяки своїм властивостям лазерне випромінювання стало основою для формування єдиного еталону часу і довжини.

Згідно з рішенням 17-ї Генеральної конференції з мір та ваг (1983), частота та довжина хвилі лазера у вакуумі зв'язані рівнянням $\nu = \lambda c$, що дозволило створити фізичні стандарти нового покоління – оптичні стандарти частоти (ОСЧ). У залежності від типу лазера та методу стабілізації розрізняють три основні групи ОСЧ: на основі He-Ne-лазерів, твердотільних лазерів з подвоєнням частоти, а також напівпровідникових лазерів, стабілізованих за лініями поглинання охолоджених атомів або йоду [1]. На рисунках (1.5–1.7). наведено конструкції відповідних лазерних систем та компонентів, що застосовуються у стабілізованих оптичних еталонах.

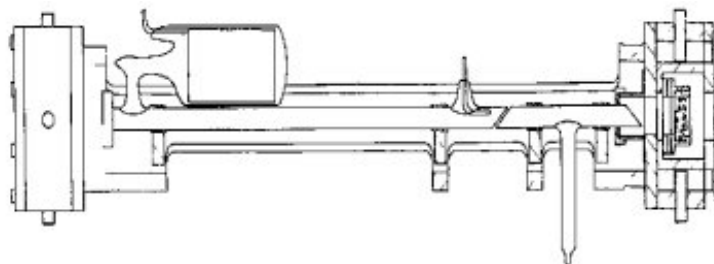


Рисунок 1.5 – Конструкція лазера

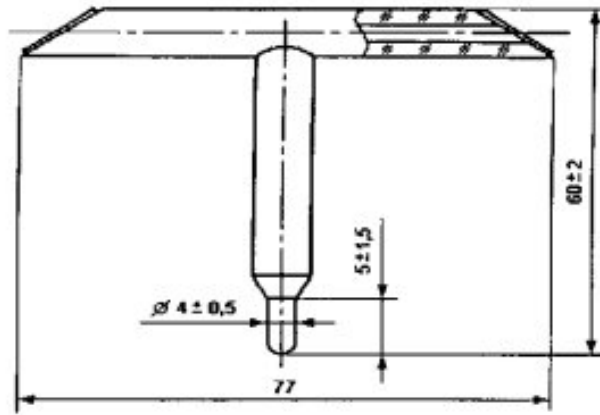


Рисунок 1.6 – Конструкція осередки з йодом

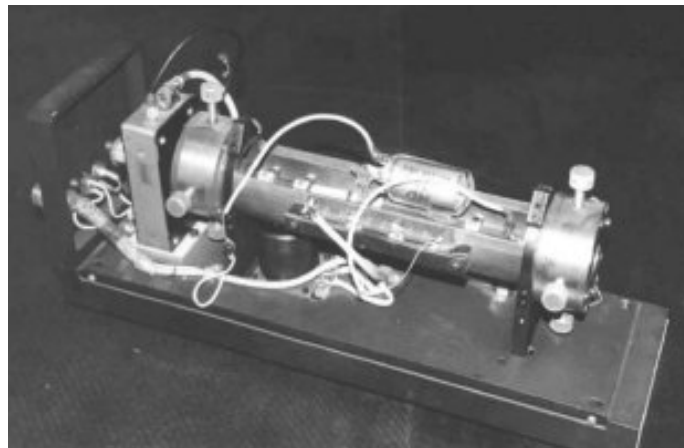


Рисунок 1.7 – He-Ne лазер

Параметри, що визначають стабільність частоти випромінювання, залежать від конструктивних і фізичних чинників, зокрема довжини резонатора, активного середовища, температурного режиму та оптичного репера [3]. Як приклад, частота He-Ne/¹²⁷I₂ лазера визначається через функцію:

$$f = f(P, U, T), \quad (1.17)$$

де P – потужність лазера в середині резонатора;

T – температура йоду в охолоджуваному штенгелі йодної комірки;

U – амплітуда девіації оптичної частоти.

За нормальних умов ($P_{\text{норм}} = 10$ мВт, $U_{\text{норм}} = 6$ МГц, $T_{\text{норм}} = 15$ °С) частота є стабільною. Проте будь-яке відхилення цих параметрів потребує корекції.

Для оцінки точності використовують модель гетеродинного порівняння двох лазерів. Якщо один лазер працює за нормальних умов, а другий – з контрольованими відхиленнями, то частотна різниця: $\Delta f = f_1 - f_2$, може бути описана через похідні функції f за відповідними параметрами. Таким чином, зсуви частоти можна охарактеризувати коефіцієнтами чутливості до потужності (kp), температури (kT) та девіації (kU).

Ці коефіцієнти дозволяють розрахувати невиключені систематичні похибки: $\Theta_p = (\partial f / \partial P)(P - P_{\text{норм}})$, $\Theta_T = (\partial f / \partial T)(T - T_{\text{норм}})$, $\Theta_U = (\partial f / \partial U)(U - U_{\text{норм}})$, які враховуються у метрологічному аналізі частоти.

Конструктивно He-Ne/ $^{127}\text{I}2$ лазери мають резонатор із зовнішніми діелектричними дзеркалами, закріпленими на інваровій трубці, що мінімізує теплові деформації. Усередині розміщено активний елемент (газорозрядна трубка з сумішшю He-Ne у співвідношенні 7:1) та йодну комірку. Спеціальна технологія герметизації та термостабілізації забезпечує тривалу стабільність параметрів випромінювання.

Таким чином, використання стабілізованих лазерів дозволяє реалізувати на практиці точні оптичні еталони частоти та довжини хвилі, що формують основу сучасної метрології і забезпечують надійність у високоточних наукових та технічних системах.

1.2.5 Прогрес у стабілізації: «Холодні» атоми, перспективи та виклики

Особливої уваги заслуговують методи стабілізації частоти на основі застосування так званих «холодних» атомів. Лазерне охолодження, розвинене в останній чверті ХХ століття, дозволило зменшити теплові коливання атомів до мікро- і навіть нанокельвінових температур, що відкрило новий рівень стабільності та точності в оптичній метрології. Завдяки ефекту багаторазового

циклу поглинання та спонтанного випромінювання фотонів, атоми поступово втрачають кінетичну енергію, уповільнюючи свій рух, що веде до охолодження речовини.

Такий стан є критично важливим для реалізації оптичних стандартів частоти, оскільки при зменшенні температури зменшується ширина доплерівського розширення спектральної лінії, підвищується роздільна здатність і дозволяється більш точно прив'язування частоти лазера до вузьких резонансів. В результаті, за допомогою «холодних» атомів реалізуються стандарти частоти з відносною нестабільністю на рівні 10^{-15} і нижче [5].

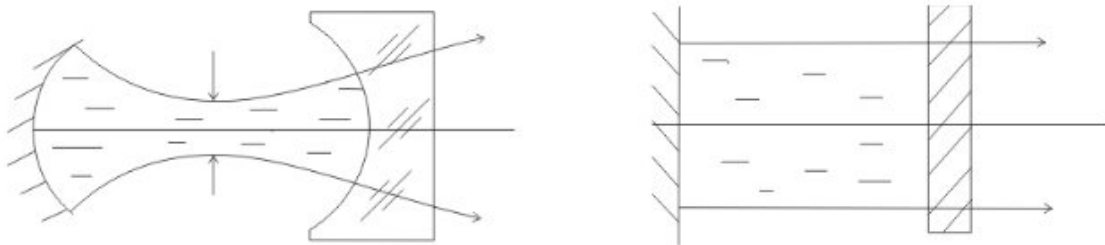
Крім того, лазерне охолодження забезпечує умови для утримання атомів у магніто-оптичних пастках, де відбувається їх тривале зберігання без зіткнень зі стінками посудини. Це підвищує час взаємодії атомів із лазерним випромінюванням, що ще більше покращує точність стабілізації частоти.

Таким чином, застосування технологій лазерного охолодження та локалізації атомів є не лише революційним кроком у фундаментальній фізиці, але й ключовим елементом для побудови наступного покоління оптичних стандартів частоти, які використовуються в атомних годинниках, квантових технологіях і надточній навігації.

Подальше вдосконалення систем стабілізації частоти лазерного випромінювання базується на комплексному поєднанні пасивних і активних методів регулювання параметрів генерації. Залежно від специфіки застосування, вибір конкретної стратегії стабілізації залежить від необхідного рівня точності, зовнішніх умов і конструктивних обмежень.

Пасивні методи стабілізації, до яких належать використання резонаторів жорсткої конструкції з матеріалів із низьким коефіцієнтом теплового розширення (інвар, ситал, кварц), термостатування, вакуумування оптичного шляху, а також герметизація і стабілізовані джерела живлення, дозволяють досягти нестабільності частоти на рівні $\sim 10^{-8}$. Такі підходи не потребують зворотного зв'язку, проте їх ефективність обмежується зовнішніми впливами та флуктуаціями середовища. Типи оптичних резонаторів, що застосовуються

у таких системах, зображено на рисунку 1.8. Активні методи стабілізації базуються на впровадженні електронного зворотного зв'язку. Зокрема, відхилення частоти або потужності випромінювання реєструється через фотодетектор, а сформований сигнал помилки використовується для корекції параметрів генерації. Це реалізується за допомогою модулювання прозорості оптичного елемента в пучку або прямої зміни характеристик активного середовища (струм, температура, резонансна довжина). Серед активних елементів регулювання особливої уваги заслуговують електрооптичні та акустооптичні модулятори, які забезпечують високошвидкісну фазову чи амплітудну модуляцію з мінімальними втратами потужності [5].



а) конфокальний резонатор; б) резонатор із плоскими дзеркалами.

Рисунок 1.8 – Типи резонаторів

Одним із прикладів активної стабілізації є використання Лембовського провалу – вузького спектрального резонансу, що дозволяє підвищити стабільність частоти (рис. 1.9).

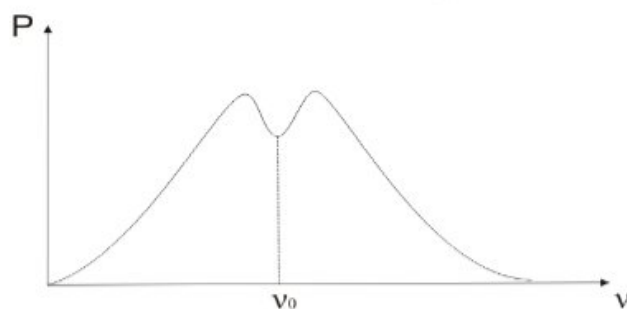
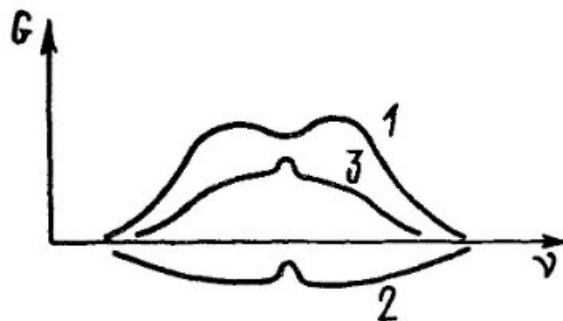


Рисунок 1.9 – Провал Лемба

Важливою технологією стабілізації є методика використання Лембовського провалу – мінімуму інтенсивності випромінювання, що спостерігається у вузькій частотній області завдяки насиченому поглинанню в активному середовищі. Його точне визначення дозволяє зафіксувати частоту генерації з відносною нестабільністю до 10^{-9} . Подальший розвиток цієї методики привів до концепції інверсного Лембовського провалу, де стабілізація відбувається за рахунок резонансу з зовнішньою поглинаючою коміркою, заповненою, наприклад, парами йоду (рис. 1.10).



1 – посилення активного середовища; 2 – поглинання газу;
3 – сумарне посилення.

Рисунок 1.10 – До методу лембовського провалу з поглинаючим осередком

Сучасні системи стабілізації He-Ne лазерів, зокрема He-Ne/ $^{127}\text{I}_2$, використовують синхронне детектування на третій гармоніці, що дозволяє усунути нелінійні ефекти та підвищити чутливість до зсувів частоти. Це досягається за рахунок модулювання частоти лазера з одночасною реєстрацією сигналу на третій гармоніці опорного сигналу. Такі системи демонструють нестабільність частоти до 10^{-12} (рис. (1.11–1.12)).

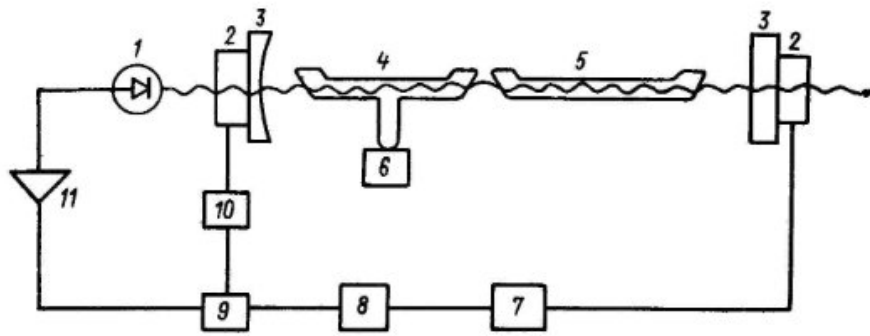
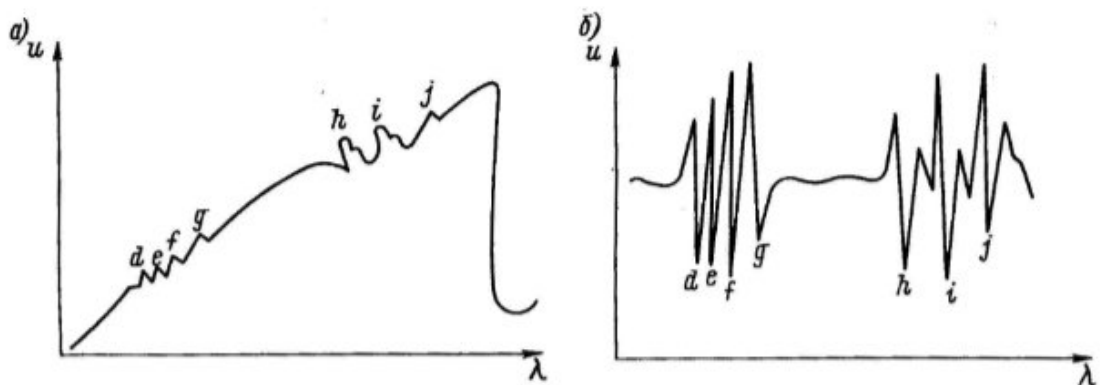


Рисунок 1.11 – Функціональна схема стабілізації частоти
He-Ne/¹²⁷I 2 - лазера

Схема включає такі елементи: 1–фотоприймач; 2–п'єзоеlementи; 3–дзеркала; 4–поглинаюча комірка з йодом; 5–активний елемент; 6 –регулятор температури відростка комірки; 7– опорний генератор; 8–потроювач частоти; 9 –синхронний детектор; 10 –інтегратор; 11–підсилювач.



а) метод першої похідної; б) метод третьої похідної.

Рисунок 1.12 – Вихідна напруга синхронного детектора системи
автоматизованої перебудови частоти He-Ne/¹²⁷I 2 -лазера

Завдяки високій стабільності й надійності, Nd:YAG лазери з подвоєнням частоти, стабілізовані за лініями поглинання молекул йоду, нині визнані міжнародними еталонами довжини. Вони знайшли застосування у спектроскопії, інтерферометрії, квантовій фізиці та вимірюванні

фундаментальних констант. Зокрема, лазер із стабілізацією за молекулярним йодом досяг стабільності до 10^{-13} , що забезпечує точність визначення частот до 250 кГц, а відносну нестабільність до $1,2 \times 10^{-10}$.

1.3 Типи лазерів і методи їхньої стабілізації

У сучасній метрології, оптичній спектроскопії та телекомунікаційних системах широко застосовуються різні типи лазерів, серед яких особливе місце займають напівпровідникові лазери з зовнішнім резонатором. Їх перевага – компактність, висока стабільність та здатність працювати у широкому спектральному діапазоні, особливо у діапазоні 1,5 мкм, що є критичним для волоконно-оптичного зв'язку.

Одним із популярних рішень є лазери в конфігурації Літмана та Літтрова, де частота генерації визначається не тільки активною областю діода, а й параметрами зовнішнього резонатора з дифракційною решіткою. У схемі Літтрова зворотний зв'язок створюється через ненульовий порядок дифракції, а випромінювання виводиться через нульовий. У схемі Літмана використовується додаткове дзеркало, що забезпечує ширшу можливість перебудови частоти та гнучке регулювання параметрів резонатора.

Для напівпровідникових лазерів, окрім фізичних конфігурацій резонатора, ключовим аспектом стабілізації є також контроль над струмом накачування та температурою активної області. Температурні флуктуації безпосередньо впливають на ширину забороненої зони напівпровідника, змінюючи, таким чином, довжину хвилі випромінювання. Сучасні системи використовують прецизійні термоконтролери з точністю до мілікельвінів, а також імпульсне або аналогове керування струмом, щоб мінімізувати дрейф частоти та потужності. Також, значно покращити стабільність допомагає використання розподіленого зворотного зв'язку (DFB) або розподіленого бреггівського відбивача (DBR), вбудованих безпосередньо в структуру діода,

що дозволяє досягти монорежимної генерації без зовнішнього резонатора, спрощуючи при цьому конструкцію та підвищуючи надійність.

У контексті оптичних телекомунікацій важливу роль відіграють лазери зі стабілізацією по лініях поглинання в ацетилені. Молекули ацетилену ($^{12}\text{C}_2\text{H}_2$ і $^{13}\text{C}_2\text{H}_2$) мають багаті спектри поглинання в межах від 1510 нм до 1550 нм, що відповідає С-діапазону телекомунікацій (від 1528 нм до 1565 нм). Внаслідок чітко виражених ліній поглинання ці молекули були обрані як частотні репери. Зокрема, лінія поглинання P(16) у $^{13}\text{C}_2\text{H}_2$ була рекомендована для реалізації метра за міжнародним стандартом з точністю до 100 кГц (рис. 1.13).

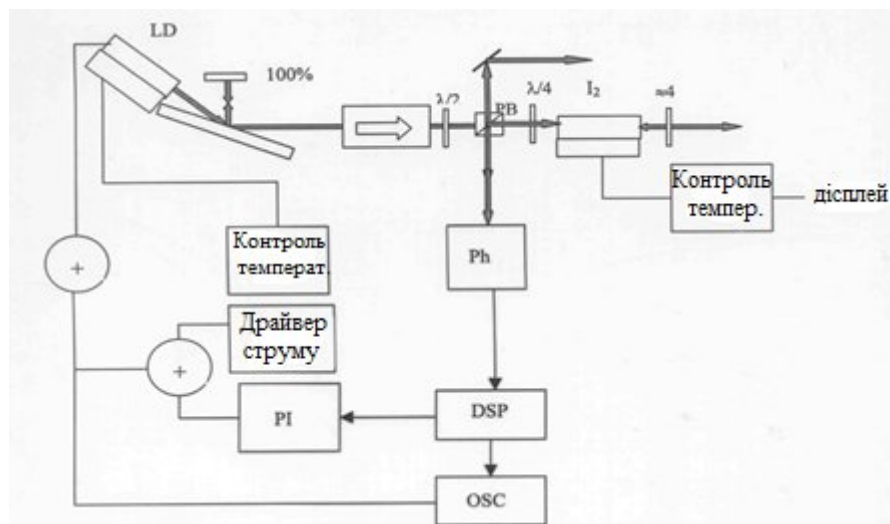


Рисунок 1.13 – Структурна схема напівпровідникового лазера зі стабілізацією по лініях поглинання в ацетилені

Типовий стабілізований лазер СПЛ-1,55 включає лазерний діод, мікрооб'єктиви, систему термостабілізації, ячейку з аміаком або ацетиленом, фотоприймачі та систему автоматичної підстройки частоти (рис. 1.14). Зовнішній резонатор містить ячейку, що термостатується, для утримання стабільної температури газу-репера. Для реєстрації частотних змін використовується метод третьої гармоніки, що підвищує точність частотної стабілізації [2].

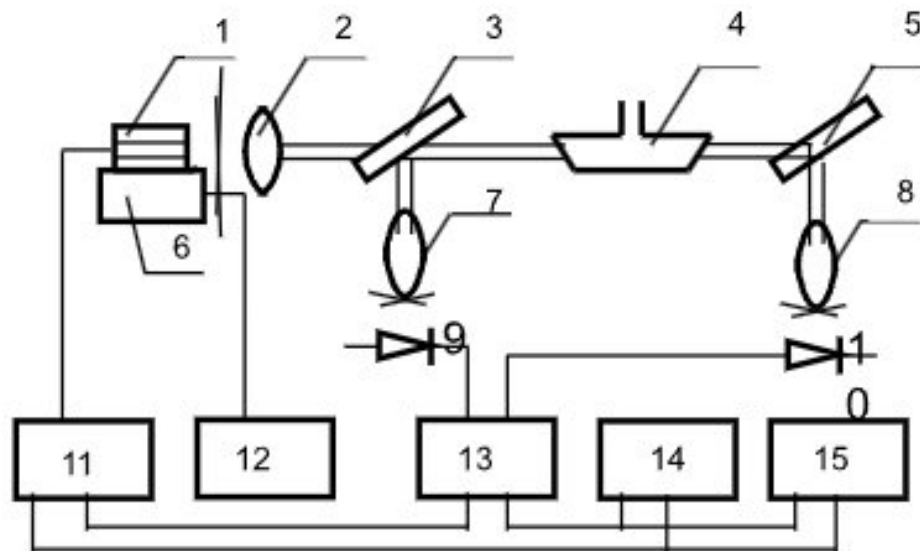


Рисунок 1.14 – Функціональна схема макету стабілізованого напівпровідникового лазера СПЛ-1,55

Однією з ключових переваг використання газових комірок для стабілізації напівпровідникових лазерів є їхня внутрішня стабільність. Молекулярні переходи є фундаментальними константами, не залежними від зовнішніх факторів, що робить їх ідеальними природними реперами. Це особливо важливо для застосувань, де потрібна довгострокова стабільність, наприклад, у системах синхронізації часу в мережах 5G/6G або для високоточних вимірювань відстаней (наприклад, у лідарах та лазерних дальномірах). Порівняно з атомними переходами, молекулярні лінії часто менш чутливі до зовнішніх полів та зіткнень, що спрощує їхню практичну реалізацію у компактних пристроях.

Розвиток таких лазерів сприяв створенню портативних стандартів частоти, які не тільки застосовуються у лабораторних дослідженнях, але й у польових умовах, наприклад, для зондування атмосфери, калібрування оптичних аналізаторів та синхронізації телекомунікаційних каналів.

Таким чином, напівпровідникові лазери зі стабілізацією частоти по лініях поглинання в ацетилені або аміаку є ключовими компонентами

сучасних оптичних стандартів, забезпечуючи точність до 10^{-12} та надійність для систем розподілу частот у глобальній інформаційній інфраструктурі.

1.3.1 Твердотілі лазери з напівпровідниковим накачуванням: лінійні та кільцеві конфігурації

Наступною важливою групою є твердотільні лазери з напівпровідниковим накачуванням (ТЛНН), які поділяються на лінійні та кільцеві. Найчастіше як активне середовище використовують YAG:Nd^{3+} , що характеризується високою теплопровідністю, спектральною однорідністю та надійністю при експлуатації. Завдяки цим властивостям такі лазери широко використовуються у метрології та наукових дослідженнях.

Відмінною особливістю ТЛНН є можливість досягнення високої потужності та вузької спектральної лінії завдяки їхньому кристалічному активному середовищу. Напівпровідникове накачування забезпечує високий ККД та компактність, усуваючи необхідність у громіздких газорозрядних лампах. Крім того, завдяки широкій смузі посилення кристалів, ТЛНН можуть бути використані як для безперервної генерації з надзвичайно вузькою лінією, так і для генерації ультракоротких імпульсів (піко- та фемтосекундного діапазону), що розширює їхнє застосування у нелінійній оптиці та прецизійній обробці матеріалів.

У конструкціях ТЛНН використовуються активні середовища Nd:YAG , Nd:YVO_4 , Nd:GdVO_4 тощо [6]. Вибір конкретного кристала залежить від вимог до теплопровідності, перетину змушеного переходу, часу життя збудженого стану та коефіцієнта поглинання. Найвищий ефективний перетин має Nd:YVO_4 , що робить його ідеальним для генерації потужного випромінювання на довжині хвилі 1064 нм.

Вибір активного середовища та його геометрична конфігурація мають вирішальне значення для оптимізації параметрів лазера. Наприклад, леговані неодимом кристали (Nd:YAG , Nd:YVO_4) демонструють високу квантову

ефективність та добре підходять для роботи в режимі безперервної хвилі. Для стабілізації частоти в ТЛНН часто використовується резонанс із зовнішнім резонатором Фабрі-Перо або вітрівська комірка, що забезпечує надтонке налаштування частоти та ефективно придушення паразитних мод.

Твердотільні лазери можуть працювати як у чотирирівневих, так і у трирівневих схемах (рис. 1.15). Важливо забезпечити інверсію населеності на всій довжині активного середовища. Одним з ключових чинників для забезпечення одночастотного режиму є зменшення довжини резонатора до 100–300 мкм, що збільшує міжмодовий інтервал та дозволяє уникати конкуренції між модами.

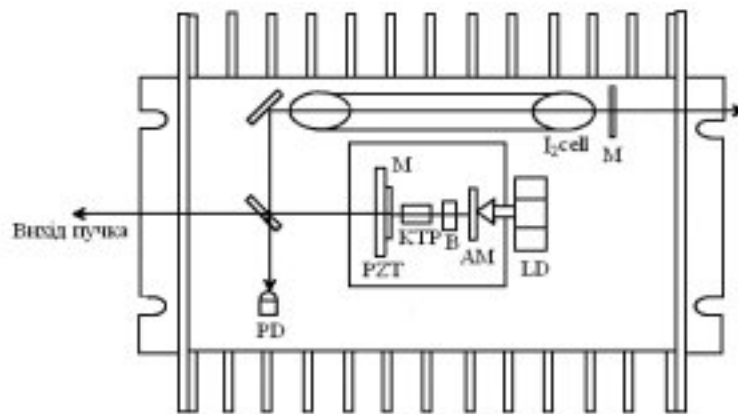


Рисунок 1.15 – Твердотільний лінійний чіп-лазер з йодною коміркою для стабілізації частоти випромінювання

Для ще вищої стабільності використовуються кільцеві чіп-лазери, в яких генерація відбувається у вигляді біжучої хвилі [7]. Монолітні кільцеві лазери вирізаються з однорідного кристала YAG:Nd^{3+} у формі багатогранної призми, що формує кільцевий резонатор з повними внутрішніми відбиттями (рис. 1.16). Завдяки цьому такі лазери мають високу стабільність частоти та інтенсивності.

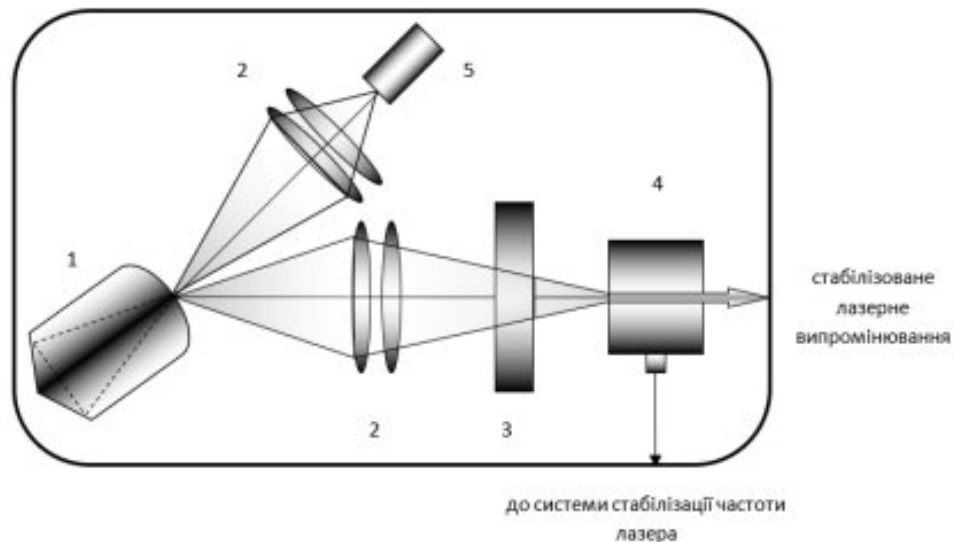


Рисунок 1.16 – Спрощена оптична схема монолітного твердотільного чіп-лазера з напівпровідниковим накачуванням

Особливість кільцевих лазерів, що генерують біжучу хвилю, полягає у відсутності стоячих хвиль, що мінімізує просторове пропалювання інверсії (spatial hole burning) і сприяє чистішому одночастотному режиму. Це також робить їх менш чутливими до відбиття від зовнішніх поверхонь. Додатково, для підвищення стабільності та точності, твердотільні лазери часто інтегруються з частотними гребінками, що дозволяє зв'язати оптичну частоту з радіочастотним стандартом, досягаючи безпрецедентної точності у визначенні частоти.

Покриття поверхонь активних елементів діелектричними шарами забезпечує одночасно високу відбивну здатність на довжині хвилі генерації та добру прозорість на довжині хвилі накачування. Реалізація ефекту Фарадея у кільцевих чіп-лазерах дозволяє здійснити режим біжучої хвилі, необхідний для стабільної одночастотної генерації.

Таким чином, як напівпровідникові, так і твердотільні лазери з активною стабілізацією частоти утворюють основу сучасної лазерної метрології, телекомунікацій та високоточної спектроскопії, надаючи широкі можливості для реалізації еталонів частоти, довжини та часу [8].

2 СТАБІЛІЗАЦІЯ He-Ne ЛАЗЕРА ПО КОМІРЦІ З ЙОДОМ

2.1 Характеристики і особливості He-Ne лазера

У сучасній метрології гелій-неонові (He-Ne) лазери посідають одне з центральних місць серед оптичних джерел, що застосовуються як стандарти частоти та довжини хвилі. Їхня унікальність полягає у високій стабільності випромінювання, здатності до одночастотної генерації та низькому рівні шумових характеристик.

Завдяки цим якостям He-Ne лазери активно використовуються у високоточних вимірюваннях, зокрема у гетеродинних інтерферометрах, атомних годинниках, лазерній спектроскопії, а також у якості вторинних еталонів у системах калібрування оптичних приладів.

He-Ne лазери є представниками газових лазерів із дискретним енергетичним спектром, який формується внаслідок електронно-ударного збудження атомів гелію, що передають енергію неону за допомогою резонансних зіткнень. Це дозволяє забезпечити інверсію населеності енергетичних рівнів неону, з яких відбувається випромінювання когерентного світла на довжині хвилі 632,8 нм (рис. 2.1).

Одним із головних параметрів, що визначає придатність He-Ne лазера для метрологічного використання, є ширина спектральної лінії. Без застосування стабілізуючих схем ця ширина становить від 1,5 МГц до 2 МГц. Проте за допомогою зовнішніх стабілізуючих елементів (наприклад, йодної комірки) вона може бути зменшена до кількох сотень герц, що значно підвищує точність частотної фіксації лазера.



Рисунок 2.1 – Схема енергетичних рівнів He-Ne лазера та передача енергії між атомами He і Ne

Особливу увагу слід звернути на властивість He-Ne лазерів формувати дві ортогонально поляризовані моди, які виникають унаслідок анізотропії оптичного резонатора. Така анізотропія може бути зумовлена неоднорідністю матеріалу, механічним напруженням або конструктивними асиметріями, що спричиняють розщеплення частот мод за поляризаційною ознакою. У результаті в оптичному резонаторі одночасно збуджуються дві моди, які мають однакову частоту, але різну площину поляризації — зазвичай вертикальну та горизонтальну.

Як показано у роботі [9], ці поляризаційні моди не лише співіснують, але й можуть взаємодіяти через механізми внутрішньої модуляції, що викликає періодичне перемикання домінуючої моди. Це явище, відоме як «перемикання поляризації» (polarization switching), супроводжується короткочасними флуктуаціями частоти генерації, які мають паразитний характер з точки зору метрології. Такі флуктуації можуть досягати десятків

кілогерц, знижуючи точність вимірювання та ускладнюючи стабілізацію частоти [9].

Тому в системах, де He-Ne лазер використовується як частотний еталон, перевага надається експлуатації лише однієї поляризаційної моди. Це досягається шляхом введення в оптичну порожнину додаткових елементів – наприклад, внутрішніх поляризаторів або фазових пластин, які придушують одну з мод, залишаючи лише стабільну однополяризаційну генерацію, (рис. 2.2). Такий підхід забезпечує значне зниження рівня частотних флуктуацій, підвищує когерентність випромінювання та покращує надійність приладів, у яких застосовується лазер.



Рисунок 2.2 – Діаграма зміни поляризаційних мод у He-Ne лазері

Конструктивно He-Ne лазер складається з герметичної газорозрядної трубки, заповненої точно дозованою гелієво-неоновою сумішшю. Ця трубка замкнена з обох кінців високовідбивними діелектричними дзеркалами, які формують лінійний оптичний резонатор — ключовий елемент для підтримки когерентного випромінювання. Активне середовище забезпечує необхідну

інверсію населеності, а геометрія резонатора визначає довжину хвилі та спектральні характеристики лазера.

Для досягнення високої стабільності частоти генерації, у конструкцію лазера інтегрують п'єзокерамічні елементи. Ці компоненти дозволяють точно змінювати довжину резонатора, що, в свою чергу, безпосередньо впливає на центральну частоту випромінювання. Такий механізм використовується в схемах активної стабілізації, зокрема у зворотному зв'язку з йодною коміркою, де фіксується зсув частоти і відповідно коригується механічне положення дзеркал резонатора.

Важливим конструктивним аспектом є мінімізація температурних коливань, які можуть викликати термічне розширення корпусу лазера. Щоб уникнути деформацій, у лазерах використовують матеріали з мінімальним температурним коефіцієнтом лінійного розширення — зокрема інвар (сплав заліза з нікелем) та ситал (склокераміка з контрольованим тепловим розширенням).

Ці матеріали забезпечують геометричну стабільність резонатора навіть за умов зовнішніх температурних змін, зберігаючи постійною довжину порожнини та, відповідно, частоту генерації.

Таким чином, конструкція He-Ne лазера поєднує у собі точність, стабільність і адаптивність (рис. 2.3). Це досягається за рахунок ретельного вибору матеріалів, інтеграції п'єзокераміки та оптимізації геометрії, що забезпечує високу метрологічну надійність лазерного випромінювання в умовах практичного застосування [10].

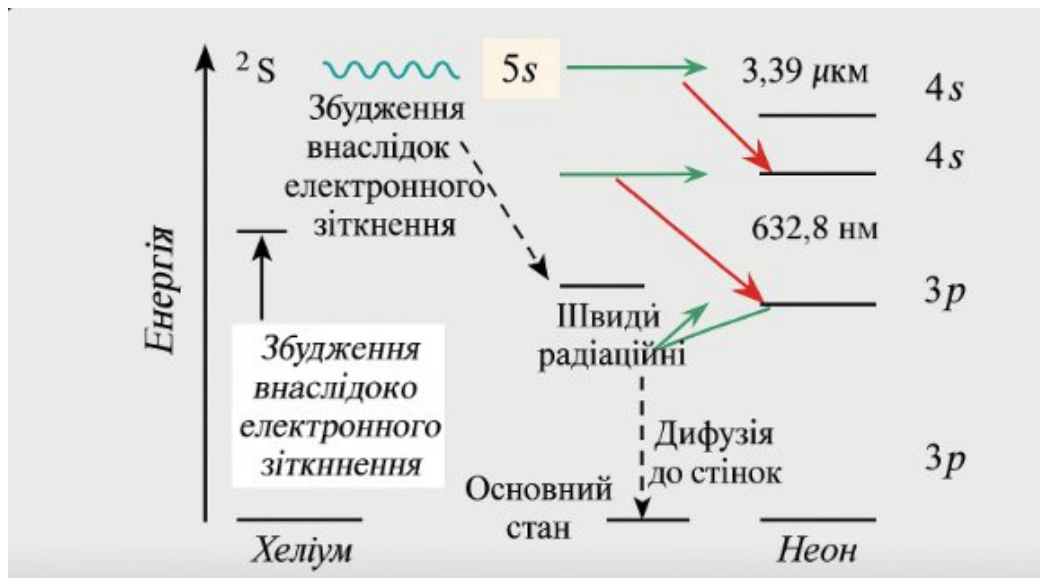


Рисунок 2.3 – Конструктивна схема He-Ne лазера з позначенням активного середовища, резонатора, п'єзокераміки

Надійність та ефективність He-Ne лазерів підтверджуються також широким спектром їхнього практичного використання. Як зазначено у праці [5], такі лазери є основою прецизійних вимірювальних комплексів, де досягається стабільність частоти на рівні 10^{-12} при використанні йодної комірки [11]. Остання, завдяки наявності вузьких ліній поглинання молекулярного йоду, забезпечує опорний частотний репер, з яким порівнюється частота генерації лазера. Поглинання при проходженні лазерного випромінювання через йодну комірку дозволяє зафіксувати найменші зсуви частоти і забезпечити стабілізацію з високою точністю.

У працях [5, 12], надано глибокий аналіз використання He-Ne лазерів у військових приладах вимірювання, зокрема у високоточних системах лазерної навігації, далекомірах та спектрометрах. У цих застосуваннях стабільність частоти є визначальним чинником, оскільки навіть незначні флуктуації можуть призводити до систематичних помилок у вимірюваннях або втрати точності прицілювання. Одним із основних викликів для забезпечення стабільності є температурний дрейф – зміни в температурі, що впливають на довжину резонатора та властивості активного середовища. Крім того,

вібраційні впливи та варіації тиску газу в трубці лазера здатні викликати додаткові зсуви частоти генерації. Зокрема, механічні вібрації можуть призводити до мікроскопічних змін положення дзеркал резонатора, що змінює оптичну довжину порожнини й відповідно зсуває частоту генерації. Також варіації тиску в газорозрядній трубці змінюють щільність газу та індекс заломлення активного середовища, що впливає на фазові умови генерації та спектральну ширину лінії, зумовлюючи додаткові нестабільності.

Для компенсації цих факторів автори пропонують використання електронних схем зворотного зв'язку, які виконують автоматичний моніторинг відхилення частоти генерації від заданої опорної. Такі схеми включають детектори поглинання в йодній комірці, електронні блоки ПІ-регулювання та п'єзокерамічні елементи, що регулюють довжину резонатора, (рис. 2.4). Особливістю цієї архітектури є її здатність до адаптивної стабілізації: у разі виникнення збурення система автоматично зменшує або компенсує його вплив, повертаючи частоту генерації до референсної. Багаторівнева система активного контролю включає термостабілізацію корпусу лазера, контроль тиску газу, стабілізацію електричного струму та додаткове фільтрування шумів. Завдяки цим заходам нестабільність частоти може бути зменшена до одиниць герц, що наближає He-Ne лазери до параметрів квантових стандартів частоти.

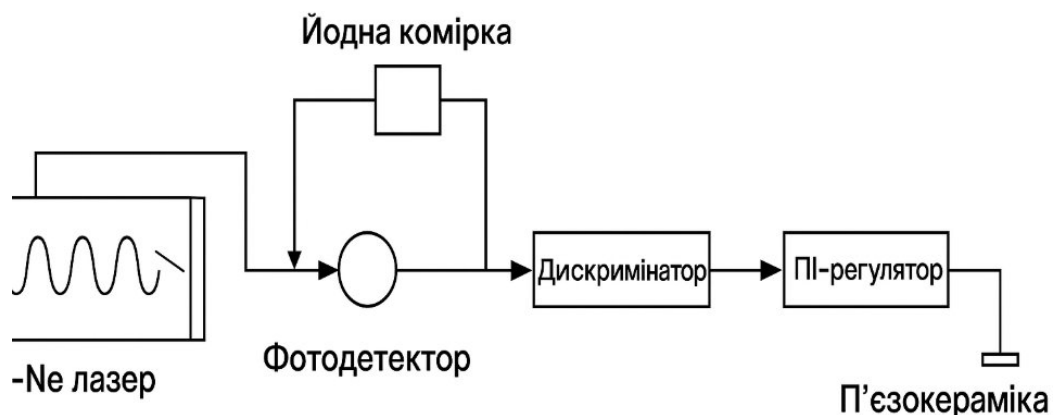


Рисунок 2.4 – Схема стабілізації частоти He-Ne лазера за допомогою йодної комірки та ПІ-регулятора

Таким чином, He-Ne лазери завдяки своїм винятковим оптичним характеристикам, конструктивній простоті та високій стабільності посідають ключове місце у сфері точних наукових і прикладних досліджень. Їх використання як основи для побудови оптичних стандартів частоти виправдане не лише практичною зручністю, а й підтверджено десятиліттями наукових досліджень та експлуатаційних випробувань. Надалі вони залишаються важливим інструментом для калібрування, досліджень у квантовій фізиці та вдосконалення метрологічної інфраструктури.

2.2 Принцип стабілізації (модуляція частоти, п'єзокерамічні елементи на дзеркалах і т. д). Комірка з йодом. Лінія поглинання йоду

Стабілізація частоти випромінювання He-Ne лазера є ключовим аспектом його застосування в метрології, оскільки навіть мінімальні зсуви частоти можуть призвести до значних похибок у точних вимірюваннях. Основна мета стабілізації полягає в забезпеченні незмінності частоти генерації лазера протягом тривалого часу, незалежно від зовнішніх збурень, таких як температурні коливання, механічні вібрації чи зміни тиску газу в активному середовищі [11].

Існує декілька підходів до стабілізації, серед яких особливе місце займає метод частотної стабілізації з використанням зовнішнього еталона – йодної комірки. Цей метод ґрунтується на порівнянні частоти генерації лазера з фіксованою частотою поглинання молекулярного йоду. Йодна комірка є оптичним резонансним середовищем з відомими вузькими спектральними лініями поглинання. Коли випромінювання He-Ne лазера проходить через комірку, частина випромінювання поглинається на частотах, які резонують з енергетичними переходами йоду. Вимірюючи величину цього поглинання, можна визначити, наскільки частота лазера відхиляється від референтної [13].

Цей зсув фіксується фотодетектором, а електронна схема зворотного зв'язку, до складу якої входить ПІ-регулятор (пропорційно-інтегральний

регулятор), генерує відповідний сигнал корекції. Цей сигнал подається на п'єзокерамічний елемент, вбудований у конструкцію лазера, який змінює довжину резонатора на мікроскопічні значення, компенсуючи зсув частоти. Таким чином, система автоматично підтримує частоту генерації на рівні, що відповідає максимуму поглинання в йодній комірці.

Крім йодної стабілізації, застосовуються також внутрішні методи, зокрема температурна стабілізація лазерного корпусу, стабілізація струму живлення розряду та контроль тиску газової суміші. Температурна стабілізація досягається за допомогою термоелектричних охолоджувачів або зовнішніх термостатів, які підтримують сталу температуру на рівні $\pm 0,01$ °C, запобігаючи термічному розширенню конструктивних елементів.

Зміни в тиску газу також суттєво впливають на стабільність частоти, оскільки впливають на щільність середовища, швидкість зіткнень атомів та індекс заломлення активної зони. Для компенсації цього ефекту використовуються прецизійно виготовлені трубки з оптимальним об'ємом та складом газової суміші, а також система пасивного демпфування пульсацій тиску [12].

Особливу увагу заслуговують вібраційні впливи, які спричиняють мікроскопічні зміщення дзеркал резонатора. Навіть зміни на рівні кількох нанометрів призводять до значного зсуву довжини резонатора, що, у свою чергу, змінює резонансні умови генерації. У відповідь на це система стабілізації миттєво активує механізм корекції через п'єзокерамічні актуатори, які компенсують зсув положення дзеркал та повертають резонатор до оптимальної довжини [10]. Синхронна робота детектора, ПІ-регулятора та актуатора забезпечує майже миттєве коригування, що дозволяє зменшити частотну нестабільність до одиниць герц.

Серед додаткових технік стабілізації слід зазначити також застосування фазового модулятора, який вносить невеликі періодичні збурення у частоту генерації, дозволяючи точно визначити похибку стабілізації. Це дає можливість ще ефективніше відстежувати положення резонансного

максимуму йоду та відповідно налаштувати лазер на цей максимум у режимі реального часу [12].

Таким чином, стабілізація частоти He-Ne лазера є багатокомпонентним процесом, який охоплює як зовнішні оптичні еталони, так і внутрішні електронні, термічні й механічні підсистеми. Завдяки комплексному підходу вдається досягти частотної стабільності на рівні 10^{-12} , що дозволяє використовувати He-Ne лазери як національні та міжнародні стандарти частоти, а також у найвибагливіших сферах – від спектроскопії до навігаційних систем високої точності (рис. 2.5).

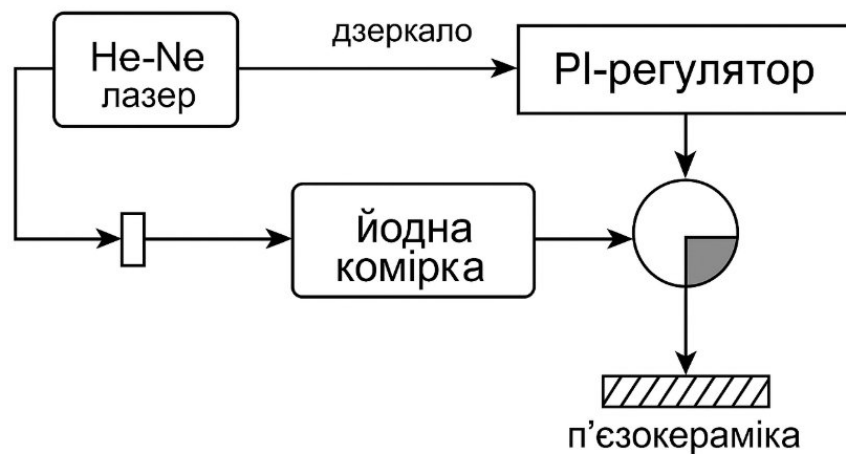


Рисунок 2.5 – Схема частотної стабілізації He-Ne лазера з йодною коміркою та п'єзокерамічним регулюванням

Модуляційна спектроскопія йоду: розрахунок коефіцієнта поглинання в оптичній комірці модуляційна спектроскопія йоду: розрахунок коефіцієнта поглинання в оптичній комірці

3 МОДУЛЯЦІЙНА СПЕКТРОСКОПІЯ ЙОДУ: РОЗРАХУНОК КОЕФІЦІЄНТА ПОГЛИНАННЯ В ОПТИЧНІЙ КОМІРЦІ

Визначення концентрації йоду (I_2) в оптичному середовищі є важливою задачею у високоточній лазерній спектроскопії, особливо з огляду на використання йодної комірки як оптичного еталону. Метод модуляційної спектроскопії дозволяє забезпечити високу чутливість вимірювання навіть при коротких довжинах поглинаючої траси (до кількох сантиметрів), що робить його ідеальним для дослідження йоду, який має характерні вузькі лінії поглинання в червоній частині спектру. Для досягнення максимальної точності у вимірюваннях ефективним є метод модуляційної спектроскопії, який дозволяє виявляти навіть слабкі сигнали поглинання при коротких довжинах траси – в межах кількох сантиметрів [13]. Йод, із його характерними вузькими лініями поглинання у видимому діапазоні (переважно від 500 нм до 700 нм), є ідеальним об'єктом для такого типу досліджень.

Суть методу полягає у реєстрації гармонік частотної модуляції. При налаштуванні частоти лазерного випромінювання на максимум лінії поглинання йоду, амплітуда другої гармоніки сигналу досягає максимуму, а непарні гармоніки обертаються в нуль. Це дозволяє точно визначити положення максимуму поглинання та провести високоточне калібрування лазера [14].

Інтенсивність інфрачервоного випромінювання, що проходить через середовище, де присутній йод, описується законом Бугера–Ламберта–Бера:

$$W = W_0 \cdot \exp(-\alpha), \quad (3.1)$$

де W_0 – потужність випромінювання на вході в комірку;

W – потужність на виході;

$\alpha = \alpha_0(\nu) \cdot C \cdot L$ – загальний коефіцієнт втрат, що враховує поглинання;

C – концентрація йоду;

L – довжина оптичного шляху;

$\alpha_0(\nu)$ – коефіцієнт поглинання на частоті ν .

При модуляції частоти лазера поблизу спектральної лінії поглинання, враховується лоренцівський профіль:

$$\alpha_0(\nu) = \frac{\alpha_{рез} \gamma^2}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma^2}, \quad (3.2)$$

де ν_0 – центральна частота лінії поглинання;

γ – напівширина на рівні половини максимуму;

$\alpha_{рез}$ – коефіцієнт поглинання на частоті максимуму.

Частота лазерного випромінювання в режимі модуляції змінюється згідно з виразом:

$$\nu(t) = \nu_1 + \nu_m \cos(\Omega t), \quad (3.3)$$

де ν_1 – незбурена (центральна) частота;

ν_m – амплітуда модуляції;

Ω – частота модуляції.

Вводяться безрозмірні параметри:

$$\beta = \frac{\nu_1 - \nu_0}{\gamma}, \quad \delta = \frac{\nu_m}{\gamma}, \quad x = \Omega t. \quad (3.4)$$

Відповідно, коефіцієнт поглинання в момент часу t описується як:

$$\alpha(\beta, x) = \frac{\alpha_0}{(\beta + \delta \cos x)^2 + 1}. \quad (3.5)$$

Інтенсивність сигналу на виході з комірки можна розкласти в ряд Фур'є, де гармоніки a_n відповідають різним кратним частотам модуляції:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t). \quad (3.5)$$

Для середовища з невеликим поглинанням (що справедливо для йоду в умовах досліду), можна скористатися наближеною формулою для визначення коефіцієнта поглинання за відношенням другої гармоніки до нульової:

$$\alpha = \frac{1}{K(\delta)} \cdot \frac{b_2}{b_0}, \quad (3.6)$$

де b_2 та b_0 – амплітуди другої та нульової гармонік відповідно,

$K(\delta)$ – калібрувальний коефіцієнт (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Значення коефіцієнта $K(\delta)$

δ	1,0	1,5	1,8	2,197
$K(\delta)$	0,243	0,318	0,336	0,343

Використовуючи дані моделювання з Mathcad, отримано значення:

$$b_2 = 0,017515, b_0 = 0,05, \delta = 2,197 \rightarrow K(\delta) = 0,343$$

Підставляємо дані значення в формулу (3.6):

$$\alpha = \frac{1}{0,343} \cdot \frac{0,017515}{0,05} = 0,999.$$

Отже, коефіцієнт поглинання йоду в даних умовах становить приблизно:
 $\alpha \approx 0,999$.

Таким чином, поглинання йоду при досліджуваних умовах майже повне. Це підтверджує ефективність модуляційної спектроскопії як точного методу дослідження вузьких резонансних ліній у йоді [15].

Окрему роль у спектроскопії відіграє йодна комірка, яка являє собою скляну ампулу, заповнену парами молекулярного йоду I_2 . Завдяки більш ніж тисячі чітко вираженим лініям поглинання у видимій області спектру, вона широко використовується як оптичний еталон. Її температура стабілізується термостатом, а лазерне випромінювання, проходячи крізь комірку, дозволяє визначити положення резонансних частот за зміною інтенсивності.

Поведінку гармонік у функції параметра розстроювання β і δ було вивчено за допомогою чисельного моделювання. На рисунках (3.1, 3.2) наведено залежності амплітуд гармонік a_1 , a_3 і b_2 при різних значеннях δ . Спостерігається, що саме при $\delta = 2,197$ друга гармоніка досягає максимуму при $\beta = 0$, що відповідає умовам найвищої чутливості.

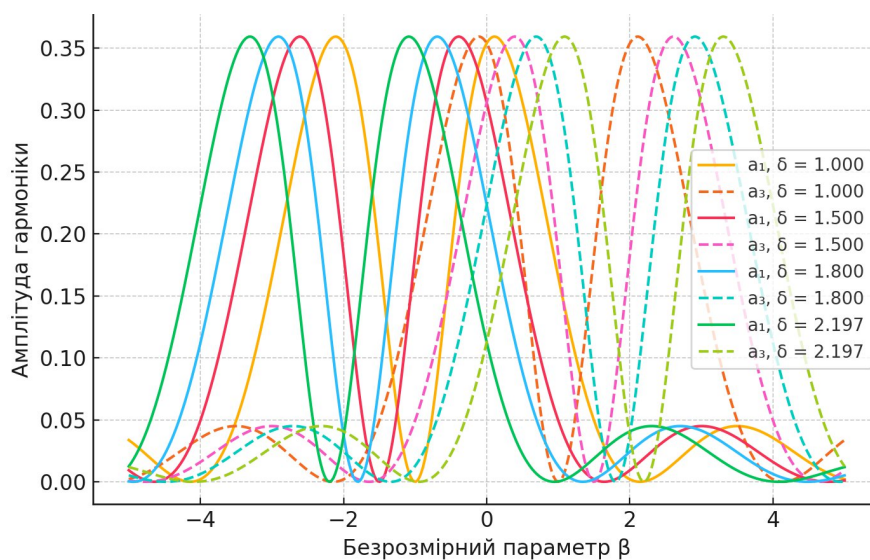


Рисунок 3.1 – Залежність відносної амплітуди другої гармоніки (b_2/b_0) від параметра β при різних значеннях δ для йоду (I_2). Визначено положення максимуму при $\delta = 2,197$, що відповідає умовам експерименту

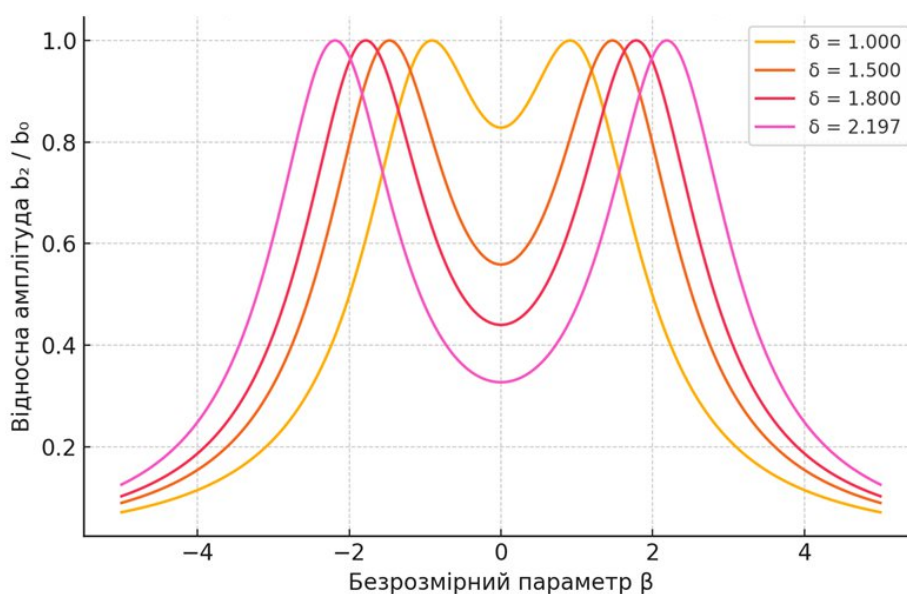


Рисунок 3.2 – Залежність b_2/b_0 від β для I_2

Важливо підкреслити, що розрахункове співвідношення (3.7) не залежить від вхідної потужності лазера. Це дозволяє не лише зменшити вплив шумів, а й оцінювати концентрацію поглинаючого середовища без потреби в абсолютному калібруванні потужності.

$$\frac{b_2}{b_0} \approx \alpha K(\delta). \quad (3.7)$$

Отже, метод модуляційної спектроскопії у поєднанні з йодною коміркою є потужним інструментом точного вимірювання коефіцієнта поглинання. Результати розрахунків і графічні ілюстрації підтверджують можливість застосування цього підходу в метрології та лазерній діагностиці.

ВИСНОВКИ

У ході виконання кваліфікаційної роботи було здійснено комплексне дослідження фізичних принципів функціонування, конструктивних особливостей та методів стабілізації частоти випромінювання He-Ne лазера, що є ключовим елементом у складі систем оптичної когерентної томографії (ОКТ). Проведений аналіз підтвердив актуальність використання гелій-неонових лазерів у прецизійних вимірювальних приладах, зокрема завдяки їх високій когерентності, спектральній стабільності та здатності до одночастотної генерації.

У роботі було детально розглянуто енергетичні процеси в активному середовищі He-Ne лазера, зокрема механізми передачі енергії між атомами гелію та неону, які забезпечують ефективне збудження та інверсію населеності. Особлива увага приділена проблемі поляризаційної нестабільності випромінювання та методам вибору однієї моди генерації, що є критично важливим для метрологічних застосувань.

Розділ, присвячений методам стабілізації частоти, висвітлює сучасні технічні рішення, серед яких найбільш ефективним визнано використання йодної комірки як зовнішнього еталона з фіксованими спектральними лініями поглинання. Поєднання йодної комірки з ПІ-регулятором та п'єзокерамічним елементом дозволяє досягти частотної стабільності на рівні 10^{-12} . Також було проаналізовано вплив температурного дрейфу, вібраційних збурень та варіацій тиску в активному середовищі, а також засоби їхньої компенсації шляхом застосування зворотних електронних схем регулювання та систем термостабілізації.

Практична значущість отриманих результатів полягає у можливості їх безпосереднього використання при розробці або модернізації лазерних вимірювальних систем, які потребують високого рівня частотної стабільності. Крім того, узагальнені технічні підходи до конструкції та стабілізації He-Ne

лазерів можуть бути адаптовані для інших класів когерентних джерел у спектроскопії, навігації та біомедичних приладах.

Таким чином, виконана кваліфікаційна робота повністю реалізувала поставлену мету та завдання, і може слугувати як теоретичною, так і прикладною основою для подальших досліджень і практичних розробок у галузі метрологічного приладобудування та оптичної когерентної томографії.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Мачехін Ю. П., Гнатенко О. С. Лазерні, оптико-електронні прилади та системи. Частина 2: Параметри лазерного випромінювання: монографія. Харків: ХНУРЕ, 2021. 248 с.
2. Мачехін Ю. П., Гнатенко О. С., Курський Ю. С., Семенець В. В., Неофітний М. В. Лазерні, оптико-електронні прилади та системи. Частина 1: Лазерна інформаційно-вимірювальна техніка для задач військового призначення: монографія. Харків: ХНУРЕ, 2019. 296 с.
3. Курський Ю. С., Гнатенко О. С., Мачехін Ю. П., Семенець В. В. Стабілізація частоти випромінювання в системах лазерної метрології. Київ: Інститут фізики НАН України, 2015. 232 с.
4. Мачехін Ю. П., Негрійко А. М., Яценко Л. П. Оптичні стандарти частоти. Частина 3: Напівпровідникові лазери, особливості стабілізації частоти випромінювання, фізичні та конструктивні особливості. Київ: Інститут фізики НАН України, 2010. 128 с.
5. Шандибіна Г. Д., Парфьонов В. А. Інформаційні лазерні технології: навчальний посібник. Санкт-Петербург: СПбГТУ, 2004. 180 с.
6. Демтредер В. Лазерна спектроскопія: основи та застосування. Київ: Наук. думка, 2005. 312 с.
7. Rubinsztein-Dunlop H. et al. Frequency Modulation Spectroscopy: a review // *Optics Communications*. 2010. Vol. 283. P. 1–13.
8. Оптоелектроніка. Ч.2. Прилади та пристрої: навч. посіб. / Е.І. Черняков, Ю.П. Мачехін, С.М. Кухтін. Харків: ХНУРЕ, 2016. 292 с.
9. Barger R.L., Hall J.L. Refractive index of iodine vapor // *Applied Physics Letters*. 1973. Vol. 22(4). P. 196–198.
10. Zibrov A.S. et al. Diode laser spectroscopy of molecular iodine // *Quantum Electronics*. 2005. Vol. 35(2). P. 135–139.
11. Конончук С. В., Стукаленко А. В. Поляризаційні моди в He-Ne лазерах та їх вплив на стабільність частоти // *Вісник Харківського*

національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Фізика. 2003. Вип. 603. С. 45–50.

12. Афанасьєва О. В. Конструктивні особливості He-Ne лазерів для метрологічних застосувань // Вісник Національного технічного університету України «КПІ». Серія: Приладобудування. 2016. № 52(2). С. 12–18.

13. Курський Ю. С. Стабілізація частоти He-Ne лазера за допомогою йодної комірки // Журнал метрології та вимірювальної техніки. 2016. № 4(1). С. 22–28.

14. Мачехін Ю. П., Гнатенко О. С., Курський Ю. С. Використання He-Ne лазерів у військових приладах вимірювання. Харків : ФОП Панов А. М., 2019. 156 с.

15. Мачехін Ю. П., Негрійко А. М., Яценко О. І. Стабілізація частоти He-Ne лазера за допомогою йодної комірки // Простір науки. 2010. № 1(21). С. 35–42.

16. Лазерна техніка та технології / За ред. Л.І. Смирнова. Харків: УАД, 2017. 240 с.

17. Зінов'єв Д. В. Основи спектроскопії для інженерів. Львів: ЛНУ, 2021. 118 с.

18. Demtröder W. Laser Spectroscopy: Basic Concepts and Instrumentation. – 5th ed. // Springer, 2014. 759 p.

19. Hall J. L., Ye J. Optical frequency standards and measurements // IEEE J. Quantum Electron. 2000. Vol. 37. P. 1482–1492.