

**ЭВ  
&  
ЭС**

# **ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ**

**6'2003**

[www.webcenter.ru/~iprzhr/](http://www.webcenter.ru/~iprzhr/)

**Т. 8**

**В НОМЕРЕ :**

***Возбуждение незамкнутых конических  
и биконических структур***



Тел./факс: (095) 925-9241  
E-mail: [iprzhr@online.ru](mailto:iprzhr@online.ru)  
<http://www.webcenter.ru/~iprzhr/>

Журнал переводится на английский язык  
и издается компанией Begell House, Inc. под названием  
TELECOMMUNICATIONS AND RADIO ENGINEERING

**ПОДПИСНОЙ ИНДЕКС 71961 В КАТАЛОГЕ АГЕНТСТВА "РОСПЕЧАТЬ": ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ  
ПОДПИСКА НА ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ ПО МОСКВЕ ЧЕРЕЗ ИНТЕРНЕТ [WWW.GAZETY.RU](http://WWW.GAZETY.RU)**

Выходит с июля 1996

ЭВ  
&  
ЭС

Электромагнитные волны  
и  
электронные системы  
2003 г. 8 № 6

EW  
&  
ES

Выходит при участии Российского НИИ Космического приборостроения,  
Московского физико-технического института,  
АО "Радиофизика", Московского НИИ приборостроения,  
Московского государственного университета,  
Научно-технологического центра уникального приборостроения РАН

Международный научно-технический журнал

International Scientific Journal

РЕДКОЛЛЕГИЯ:

Л.П. Андрианова, Л.Д. Бахрах,  
М.А. Басараб, О.М. Белоцерковский, А.С. Бугаев,  
В.А. Буц (Украина), В.К. Волосюк (Украина),  
А.И. Галушкин, Ю.В. Гуляев,  
Ф.Ф. Каменец, В.А. Каплун,  
А.М. Крот (Белоруссия), И.А. Кузьмина,  
А.А. Кураев (Белоруссия), Б.Г. Кутуза,  
И.К. Лифанов, Д.С. Лукин, В.В. Мериакри,  
Ю.А. Митропольский (Украина),  
Г.А. Несененко, А.А. Потапов, В.И. Пустовойт,  
В.Л. Рвачев (Украина), В.А. Садовничий,  
А.В. Соколов, А.П. Сухоруков, К.В. Черевков,  
В.А. Черепенин, А.Д. Шатров, Ю.В. Шестопалов,  
Б.И. Шахтарин, Я.С. Шифрин (Украина),  
В.М. Яковенко (Украина), В.П. Яковлев.

С.Батлер (США), Е.Джат (Канада),  
А.Ишимару (США), Р.Клемм (Германия),  
К.Кобаяши (Япония),  
Р.Миттра (США), М.Невиере (Франция),  
Э.Перес-Меана (Мексика),  
Р.Пиерри (Италия),  
Д.Ра (Корея), А.Сихвола (Финляндия),  
М.Хашимото (Япония),  
Е.Хейман (Израиль), С.Чен (Тайвань).

Главный редактор  
докт. физ.-мат. наук,  
профессор В.Ф.Кравченко

EDITORIAL BOARD:

L.P.Andrianova, L.D.Bakhrakh,  
O.M.Belotserkovskii, A.S.Bugaev, M.A. Basarab  
V.A.Buts (Ukraine), K.V.Cherevkov,  
V.A.Cherepenin, A.I.Galushkin, Yu.V.Gulyaev,  
F.F.Kamenets, V.A. Kaplun,  
A.M.Krot (Belorussia), I.A.Kuz'mina,  
A.A.Kuraev (Belorussia),  
B.G.Kutuza, I.K.Lifanov, D.S.Lukin,  
V.V.Meriakri, Yu.A.Mitropolskii (Ukraine),  
G.A.Nesenenko, A.A. Potapov, V.I.Pustovoi, t,  
V.L.Rvachev (Ukraine), V.A.Sadovnichii,  
A.V.Sokolov, A.D.Shatrov, B.I.Shakhtarin,  
Yu.V.Shestopalov, Ya.S.Shifrin (Ukraine),  
A.P.Sukhorukov, V.K.Volosyuk (Ukraine),  
V.M.Yakovenko (Ukraine), V.P. Yakovlev.

S.M.Butler (USA), C.H.Chen (Taiwan),  
M.Hashimoto (Japan), E.Neyman (Israel),  
A.Ishimaru (USA),  
E.V.Jull (Canada), R.Klemm (Germany),  
K.Kobayashi (Japan),  
R.Mittra (USA), M.Neviere (France),  
H.Perez-Meana (Mexico),  
R.Pierri (Italy), J-W.Ra (Korea),  
A.H.Sihvola (Finland).

Editor-in-Chief.  
Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
Professor, V.F.Kravchenko

# Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур

## СОДЕРЖАНИЕ

От авторов	3
Введение	4
Глава 1. Возбуждение незамкнутой биконической структуры точечным источником, поле которого произвольно меняется во времени	7
1.1. Представление для полей импульсных элементарных источников	7
1.2. Решение второй краевой задачи для волнового уравнения с незамкнутыми коническими границами	11
Глава 2. Рассеяние поля гармонического источника на конической поверхности с продольными щелями	16
2.1. Постановка задачи. Система функциональных соотношений	16
2.2. Возбуждение конуса с продольными щелями электрическим диполем	18
2.3. Рассеяние поля магнитного диполя на конусе с продольными щелями	30
Глава 3. Дифракция плоских электромагнитных волн на конусе с продольными щелями	39
3.1. Постановка задачи	39
3.2. Дифракция плоской E - поляризованной волны на конусе с продольными щелями	40
3.3. Случай H - поляризации	48
Глава 4. Возбуждение биконической поверхности специального вида монохроматическим радиальным источником	52
4.1. Возбуждение биконуса электрическим радиальным диполем	52
4.2. Возбуждение магнитным радиальным диполем незамкнутого конуса со сплошным коническим экраном	61
Глава 5. Сингулярные интегральные уравнения в задачах рассеяния электромагнитных волн на незамкнутых конических поверхностях	67
5.1. Возбуждение незамкнутого конуса электрическим радиальным диполем. Сингулярное интегральное уравнение (СИУ)	67
5.2. Возбуждение конуса с продольными щелями магнитным радиальным диполем. Решение СИУ методом дискретных особенностей	69
Заключение	73
Литература	75

На нашей странице в Internet — <http://www.webcenter.ru/~iprzhr/> —

Вы можете увидеть содержание очередного номера журнала с аннотациями к статьям за месяц до выхода его в свет.

Зав. редакцией: И. А. Кузьмина,

Редактор: В.М. Масюк

Учредитель ЗАО ИПРЖР. Зарегистрировано в Российском комитете по печати под номером 014558 от 12.03.96.

Сдано в набор 25.02.2003. Подписано в печать 25.03.2003. Формат 60×88 1/8. Бумага Zoom. Гарнитура таймс.

Печать матричная цифровая. Печ. л. 9. Изд. № 60

Адрес ИПРЖР: 103031, Москва, К-31, Кузнецкий мост, д. 20/6. Тел. 921-48-37. Тел./факс 925-92-41.

E-mail: iprzhr@online.ru

<http://www.webcenter.ru/~iprzhr/>

Компьютерная верстка Издательства "Радиотехника".

Типография ООО "Формат А", Моск. обл., г. Электросталь, пер. Строительный, 12, корп. 1.

©Издательство "Радиотехника", 2003 г.

Тиражирование содержания журнала в электронном и любом другом виде — только с разрешения издательства "Радиотехника".

### От авторов

Дорогие читатели! Вашему вниманию предлагается первая часть монографии «Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур», состоящая из пяти глав (журнальный вариант).

Научная направленность данного исследования заключается в дальнейшем развитии авторами математических методов при рассмотрении стационарных и нестационарных задач рассеяния электромагнитных волн на сложных трехмерных незамкнутых конических и биконических структурах, а также изучении их электродинамических характеристик с помощью аналитических и численных решений.

Полученные результаты могут быть полезны специалистам, занимающимся проблемами современной антенной техники и радиолокации, при проектировании и разработке широкополосных и сверхширокополосных радиотехнических систем и устройств, а также аспирантам и студентам старших курсов соответствующих специальностей.

**В.А. Дорошенко**  
**В.Ф. Кравченко**

## ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕЗАМКНУТЫХ КОНИЧЕСКИХ И БИКОНИЧЕСКИХ СТРУКТУР

В.А. Дорошенко, В.Ф. Кравченко

В работе рассмотрены задачи рассеяния электромагнитных волн на неограниченных идеально проводящих круговых конических и биконических поверхностях с периодическими продольными щелями. Найдены представления для потенциалов Дебая диполей, поле которых произвольно меняется во времени и алгоритм решения второй краевой задачи для волнового уравнения в случае незамкнутого биконуса. Метод решения задачи основан на использовании преобразования Лапласа (с последующим обращением), интегрального преобразования Конторовича-Лебедева, метода полуобращения и сингулярных интегральных уравнений. В случаях возбуждения незамкнутых конусов и биконусов точечными монохроматическими источниками, а также дифракции плоских электромагнитных волн получены как аналитические, так и численные решения электродинамических задач. Изучено влияние щелей на основные электродинамические характеристики. Приведены диаграммы рассеяния.

### Введение

Одной из актуальных проблем современной антенной техники и радиолокации является проектирование и создание широкополосных и сверхширокополосных радиолокационных комплексов, радиотехнических систем с управляемыми диаграммами и поляризацией излучения. Конические и биконические структуры обладают ненаправленными свойствами и сверхширокополосностью как по диаграмме направленности, так и по согласованию [1]. Поэтому интерес представляет как теоретическое, так и экспериментальное исследование физических процессов, связанных с рассеянием и дифракцией электромагнитных волн на конических и биконических поверхностях. Для теоретического исследования граничных электродинамических задач важно построить адекватную математическую модель рассматриваемого процесса и решить соответствующую математическую задачу [2].

Неограниченные и конечные идеально проводящие конусы и биконусы соответственно являются моделями конических антенн, отражателей СВЧ-диапазона и конических вибраторов. Рассеянию электромагнитных волн на неограниченных сплошных идеально проводящих конусах и биконусах посвящен ряд работ [3-14]. В последнее время значительно повысился интерес к изучению рассеивающих свойств неоднородных, в частности, незамкнутых конических и биконических структур, которые нашли применение в системах спутниковой связи и телеметрии, антенной, измерительной и ускорительной технике, радиолокации и телевидении [15-26]. Использование вместо сплошных структур незамкнутых структур (например, многоэлементных или щелевых) позволяет еще больше расширить рабочий диапазон и создавать широкополосные и сверхширокополосные антенны с управляемой поляризацией излучения [22, 27, 28]. Решение электродинамических задач для таких экранов связано с большими математическими трудностями и требует построения новых, а также развитие и модификацию существующих подходов и методов.

Одним из распространенных методов исследования электродинамических задач является метод, связанный с представлением решения граничной задачи в виде ряда по собственным функциям [29, 30]. В [6-8, 31] приведены решения граничных задач для полубесконечного сплошного идеально проводящего конуса в форме по собственным функциям. Но в высокочастотной области эти ряды сходятся медленно и по этой причине мало пригодны для численных расчетов [8, 22, 32]. При изучении рассеянного полубесконечным конусом поля в высокочастотной области более удобным оказалось представление в виде контурного интеграла.

Весьма эффективным средством для исследования двумерной идеально проводящего конуса задачи возбуждения является интегральное преобразование, предложенное М.И. Конторовичем и Н.Н. Лебедевым [33, 34]. С помощью этого преобразования найдены решения трехмерных задач для неограниченных сплошных круговых идеально проводящих конической и биконической поверхностей [22, 23], а также для неограниченных, как радиально проводящих конусов и биконусов, так и для спирально проводящих конических и биконических структур [22].

В результате использования интегрального преобразования Конторовича-Лебедева [36] и метода факторизации [37] удалось получить решение электродинамических задач для ограниченных сплошных идеально проводящих [38, 24], радиально и спирально проводящих поверхностей (проводимость предполагается в строго заданном направлении без учета размеров проводников и их числа) [22, 39]. Последние являются моделями конических и биконических проволочных, спиральных антенн и отражателей [22, 25]. Однако больший практический интерес представляет решение граничных задач, в которых учитывается форма, число и размеры проводников. Известно, что использование многоэлементной структуры из от-

дельных проводников вместо сплошной позволяет расширить диапазон и создавать широкополосные и сверхширокополосные антенны с управляемой поляризацией излучения [22, 27, 40]. Наличие неоднородностей, в частности, щелей на поверхности экрана, влияет на структуру и поляризацию рассеянного поля [22, 24, 41], а изменением их числа и размеров представляется возможным управлять характеристиками рассеяния и излучения. В [42] предложен метод для нахождения функции Грина второй краевой задачи для уравнения Гельмгольца в случае незамкнутой границы, представляющей собой полубесконечный тонкий круговой конус с периодически прорезанными от вершины вдоль образующих щелями. Этот метод основан на использовании интегрального преобразования Конторовича–Лебедева в сочетании с методом задачи Римана–Гильберта применительно к теории дифракции [43,44]. В приближении “полупрозрачного” конуса, когда число щелей велико и их ширина мала по сравнению с периодом, было найдено представление для функции Грина второй краевой задачи в этом предельном случае. С помощью этого метода авторам работы [45] удалось получить решение задачи возбуждения конической поверхности с продольными щелями электрическим радиальным диполем. Но уже в постановке задачи конические ленты предполагались узкими. Такая поверхность по своим свойствам близка к радиально проводящему конусу [22] и в ней (в отличие от радиально проводящего конуса) учитывается параметр заполнения структуры, связывающий неограниченное число щелей и малость ширины конических секторов по сравнению с периодом. Результаты исследования задачи возбуждения многоконической линии из идентичных конических идеальных проводников приведены в [46]. Решение электродинамической задачи получено в предположении, что проводники располагаются вдоль образующих некоторой конической поверхности и их число велико, а угловая ширина каждого из них по азимуту постоянна и мала по сравнению с угловым расстоянием между проводниками. Источниками возбуждения служили  $\delta$ -генераторы, включенные в разрывы конических проводников на некотором расстоянии от общей вершины. В математической постановке задачи автором использовался метод усредненных граничных условий [47]. По описанию системы проводников в [46] во многом сходна с радиально проводящей конической поверхностью из [22]. Рассмотренные в [45,46] конические поверхности учитывают угловые размеры проводников, из которых они состоят, но существенным является ограничение их числа и размеров. В случае произвольных размеров проводников (щелей) и их количества результаты [45,46] непригодны. Задача дифракции на полубесконечном идеально проводящем эллиптическом конусе с конечной продольной щелью исследовалась в [41]. При этом предполагалось, что щель с шириной, намного меньшей ее длины, прорезана на некотором расстоянии от вершины конуса.

Принципиальным вопросом теории дифракции является определение электромагнитного поля вблизи нерегулярностей рассеивающих экранов [29,48-50]. Знание поведения поля в окрестности этих точек дает возможность оценить правильность полученного решения, а также улучшить сходимость используемого алгоритма при численных расчетах [51]. Условия на ребре двумерного идеально проводящего клина, полученного методом Мейкснера [50], приведены в [49].

Определение же поведения поля вблизи сингулярностей (ребер, кромок, вершин) трехмерных экранов представляет достаточно сложную математическую задачу [52]. Плоский угловой сектор является одной из базовых трехмерных структур, которые входят в качестве элементов в широкий класс рассеивателей. Эта структура представляет собой часть плоскости, ограниченной полупрямыми (ребрами), исходящими из общей точки, вершины сектора. Если угол между полупрямыми прямой, то плоский угловой сектор превращается в четверть плоскости (важный частный случай плоского углового сектора).

В [41, 55-65] получены решения задачи дифракции волн на плоском угловом секторе различными методами и изучались эффекты, обусловленные вершиной сектора. Точное решение скалярной задачи дифракции для четверти плоскости с условием Дирихле приведено в [55]. Краевая задача сведена автором к интегральным уравнениям, решение которых проводилось с привлечением метода Винера–Хопфа. Математический аппарат, используемый в [55], в сочетании с геометрической теорией дифракции (ГТД) применялся в [56] к решению задачи дифракции электромагнитных волн на четверти плоскости. Поскольку плоский угловой сектор представляет собой предельный случай эллиптического конуса, то решение задачи дифракции волн на плоском угловом секторе может быть получено из решения дифракционной задачи для эллиптического конуса [57], где был предложен метод решения задачи дифракции волн на эллиптическом конусе и построены функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения Гельмгольца в случае такой поверхности. Он базируется на разделении переменных при решении уравнения Гельмгольца в сферо-конической системе координат, в которой эллиптический конус является одной из координатных поверхностей [58]. Идея метода разделения переменных в сферо-конической системе координат была использована в [59] для исследования задачи дифракции электромагнитных волн на четверти плоскости. Строгое решение граничной электродинамической задачи было получено в виде ряда по

собственным функциям. В связи с плохой сходимостью ряда при численных расчетах учитывалось 50 членов ряда и более, что существенно усложнило анализ электродинамических характеристик, например, в высокочастотной области. Чтобы обойти эти сложности, при решении задачи дифракции на плоском угловом секторе были предложены подходы, основанные на примененной теории дифракции [63].

[61], физической теории дифракции, физической оптики [62], инкрементной теории дифракции [63]. В [64,65] строгое решение задачи дифракции плоской волны на плоском угловом секторе получено в виде интеграла Зоммерфельда в высокочастотном приближении. Однако эти выражения очень сложные для численных расчетов [62]. Методом разделения переменных в [66] найдено точное решение электростатической задачи о распределении плотности заряда по поверхности тонкой проводящей секториальной пластины и определено асимптотическое поведение плотности заряда вблизи вершины сектора в случае малого параметра, связанного с углом раствора сектора.

Проведенные по результатам этой работы оценки показали, что рассматриваемый угол раствора находится в пределах от  $50$  до  $180^\circ$ . В [61, 67] даны представления для плотности наведенного на плоском секторе поверхностного тока, которые проанализированы численно, в результате чего определен характер поведения поля у вершины сектора. Решение задачи о возбуждении электрическим радиальным диполем конуса с периодически прорезанными щелями [45], частным случаем которого является плоский угловой сектор, найдено только для предельного случая большого числа узких радиальных проводников и поэтому далеко не исчерпывает возможностей, заложенных в рассматриваемой структуре.

Развитие и модификация численно-аналитического метода [42] позволили исследовать как стационарные, так и нестационарные граничные электродинамические задачи для конических и биконических неограниченных и идеально проводящих поверхностей с произвольным числом продольных щелей и любыми их геометрическими размерами [68-86]. Важным частным случаем этих структур является плоский угловой сектор [72,76], конус с двумя щелями (модель V-образной антенны), конус с продольными щелями и расположенным на плоскости (моделирование задачи об излучении из щелей конической антенны [77, 78] в присутствии плоской подстилающей поверхности, например, земли), биконус, состоящий из конусов сплошного и с продольными щелями [73], симметричной биконической поверхности с продольными щелями [79,80].

В [68-71, 74, 81] с помощью метода, основанного на использовании интегрального преобразования Конторовича-Лебедева, проведены исследования стационарной задачи возбуждения сосредоточенным радиальным источником одиночного конуса с продольными щелями. На базе полученных аналитических решений в некоторых частных случаях конической поверхности изучены структура рассеянного поля и его поведение вблизи нерегулярностей границы (вершина конуса, ребра конических секторов). Стационарная задача дифракции плоских электромагнитных волн на конусе с продольными щелями рассмотрена в [83,85].

Исследованию стационарных граничных электродинамических задач для конуса с продольными щелями, расположенного над плоскостью, некоторых типов биконических структур с продольными щелями посвящены [73, 77, 79]. Решение стационарных электродинамических задач для идеально проводящего плоского сектора рассмотрено в [72]. В [75, 76, 78, 80, 82, 86] приведены аналитические решения нестационарных краевых задач для конических структур и ее производных.

Одним из современных методов решения граничных задач электродинамики является метод, основанный на привлечении аппарата сингулярных интегральных уравнений (СИУ) [2, 88-90]. Применение СИУ оказалось, в частности, продуктивным для решения задач дифракции волн на неидеально проводящих структурах [90], в то время как использование хорошо известных методов решения задач рассеяния волн на идеально проводящих экранах несколько проблематично.

В [84, 87] предложен подход, базирующийся на использовании интегрального преобразования Конторовича-Лебедева и СИУ для исследования задач рассеяния электромагнитных волн на полубесконечном идеально проводящем тонком круговом конусе с периодическими продольными щелями. Показано, что решение граничной электродинамической задачи эквивалентно СИУ с ядром Коши, решение которого получено численно методом дискретных особенностей [89,90].

Цель данной работы – дальнейшее развитие методов, используемых в [68-87], для исследования стационарных и нестационарных задач рассеяния электромагнитных волн на сложных трехмерных незамкнутых конических и биконических структурах и изучение их электродинамических свойств на основе полученных как численного, так и аналитического решений.

## ГЛАВА 1. Возбуждение незамкнутой биконической структуры точечным источником, поле которого произвольно меняется во времени

В данной главе рассмотрена задача рассеяния волн на неограниченном биконусе с продольными щелями, предполагая, что поле источника волн произвольно меняется во времени. Метод решения задачи основан на использовании преобразования Лапласа по временному параметру и метода полуобращения. В результате исходная краевая задача свелась к двум связанным системам функциональных уравнений, которые удается развязать в некоторых частных случаях биконической поверхности.

### 1.1. Представление для полей импульсных элементарных источников

Математическая модель распространения электромагнитных волн определяется системой уравнений Максвелла. В среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$  эти уравнения записываются в виде

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}^{(e)}, \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mathbf{j}^{(m)}, \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho^{(e)}, \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = \rho^{(m)}, \tag{1.4}$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей.

Векторы плотности электрического тока  $\mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{r}, t)$  и магнитного тока  $\mathbf{j}^{(m)}(\mathbf{r}, t)$  связаны с плотностями электрических зарядов  $\rho_e(\mathbf{r}, t)$  и магнитных зарядов  $\rho_m(\mathbf{r}, t)$  уравнениями непрерывности

$$\nabla \cdot \mathbf{j}^{(e)} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \mathbf{j}^{(m)} = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}.$$

Для единственности определения векторов поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в свободном пространстве требуется, чтобы источники, соответствующие  $\mathbf{j}^{(e)}$  и  $\mathbf{j}^{(m)}$  отсутствовали при  $t < t_0$ , а поля удовлетворяли начальному условию (принципу причинности)

$$\mathbf{E} \equiv 0, \quad \mathbf{H} \equiv 0, \quad \text{при } t < t_0.$$

Считая среду однородной и изотропной, запишем уравнения (1.1)...(1.4) в криволинейных ортогональных координатах  $x_1, x_2, x_3$ , в которых квадрат элемента  $d\vec{l}$  определяется по формуле

$$d\vec{l}^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2,$$

где  $h_1, h_2, h_3$  – коэффициенты Ламе [91, 92],

$$\frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 H_2) \right] = \epsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} + j_1^{(e)}, \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 H_3) \right] = \epsilon \frac{\partial E_2}{\partial t} + j_2^{(e)}, \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 H_1) \right] = \epsilon \frac{\partial E_3}{\partial t} + j_3^{(e)}; \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 E_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 E_2) \right] = -\mu \frac{\partial H_1}{\partial t} + j_1^{(m)}; \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 E_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 E_3) \right] = -\mu \frac{\partial H_2}{\partial t} + j_2^{(m)}; \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 E_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 E_1) \right] = -\mu \frac{\partial H_3}{\partial t} + j_3^{(m)}; \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 E_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 E_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 E_3) = h_1 h_2 h_3 \frac{\rho_e}{\varepsilon}; \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 H_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 H_3) = h_1 h_2 h_3 \frac{\rho_m}{\mu}; \quad (1.12)$$

$$\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3); \quad \mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3); \quad \mathbf{j}^{(e)} = (j_1^{(e)}, j_2^{(e)}, j_3^{(e)}); \quad \mathbf{j}^{(m)} = (j_1^{(m)}, j_2^{(m)}, j_3^{(m)}).$$

Для нахождения полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  требуется решить систему (1.5)...(1.10) относительно неизвестных скалярных функций  $E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3$ . Задача упрощается, если электромагнитное поле представляется в виде суммы полей электрического и магнитного типа. В этом случае задача на определение шести составляющих поля сводится к нахождению двух скалярных функций [26, 93].

Электромагнитное поле, у которого одна из составляющих вектора напряженности магнитного поля равна нулю (для определенности положим  $H_3 = 0$ ) называется полем электрического типа ( $E$ -полем или поперечно-магнитным полем). Поле магнитного типа ( $H$ -поле или поперечно-электрическое поле) – такое, у которого  $E_3 = 0$ . Для поля магнитного типа в областях, где  $\rho_e = 0, j_3^{(e)} = 0$ , из (1.7), (1.11) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 H_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 H_1); \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 E_1) = -\frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 E_2). \quad (1.14)$$

Предположим, что  $h_3 \neq h_3(x_1, x_2)$ . Тогда выполнимость (1.13), (1.14) обеспечивается, если

$$H_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \quad H_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \quad (1.15)$$

$$E_1 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad E_2 = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad (1.16)$$

где  $\Psi$  и  $\Phi$  – неизвестные вспомогательные функции.

Рассмотрим случай, когда  $j_1^{(m)} = j_2^{(m)} = 0$ . Подставляя (1.15), (1.16) в (1.8), (1.9), получаем

$$-\frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right); \quad (1.17)$$

$$\frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right). \quad (1.18)$$

Пусть

$$\frac{h_1}{h_2} \neq \chi(x_3), \quad h_3 = 1. \quad (1.19)$$

В такой системе координат (1.17), (1.18) преобразуется к виду

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right), \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right). \quad (1.21)$$

Для выполнения (1.19), (1.20) достаточно положить

$$\Phi = -\mu \frac{\partial v^*}{\partial t}; \quad \Psi = \frac{\partial v^*}{\partial x_3}, \quad (1.22)$$

где  $v^*(\mathbf{r}, t)$  – неизвестная скалярная функция.

Тогда из (1.15), (1.16), (1.22) имеем

$$E_1 = -\mu \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial t \partial x_2}; E_2 = \mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 v^*}{\partial t \partial x_1}; E_3 \equiv 0; \quad (1.23)$$

$$H_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x_1 \partial x_3}; H_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x_2 \partial x_3}.$$

Подставляя (1.23) в (1.5), (1.6) и предполагая при этом, что  $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, j_1^{(m)} = j_2^{(m)} = 0$ , имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ H_3 - \frac{\partial^2 v^*}{\partial x_3^2} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2} \right\} = 0; \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{\partial^2 v^*}{\partial x_3^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2} - H_3 \right\} = 0. \quad (1.25)$$

Уравнения (1.24), (1.25) удовлетворяются, если положить

$$H_3 = \frac{\partial^2 v^*}{\partial x_3^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}. \quad (1.26)$$

Если известна функция  $v^*$ , то составляющие  $H$ -поля определяются из (1.23), (1.26).

Уравнение для  $v^*$  получается из (1.10) после подстановки в последнее выражений для составляющих электромагнитного поля через функцию  $v^*$  и имеет вид

$$\left\{ \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] \right\} \frac{\partial v^*}{\partial t} = \frac{1}{\mu} j_3^{(m)}. \quad (1.27)$$

Таким образом, при ограничениях на систему координат (1.19) и источник ( $\rho_e = 0, j^{(e)} = 0, j^{(m)} = (0, 0, j_3^{(m)})$ ) составляющие векторов  $E, H$  поля  $H$ -типа выражаются по (1.23), (1.26) через одну скалярную функцию  $v^*$ , удовлетворяющую уравнению (1.27).

Используя приведенный алгоритм в случае поля  $E$ -типа и ограничений на систему координат (1.19) и источник ( $\rho_m = 0, j^{(m)} = 0, j^{(e)} = (0, 0, j_3^{(e)})$ ), приходим к выводу, что составляющие векторов  $E, H$  выражаются через скалярную функцию  $u^*(r, t)$  по формулам

$$E_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1 \partial x_3}; E_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_2 \partial x_3}; E_3 = \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_3^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}; \quad (1.28)$$

$$H_1 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial t \partial x_2}; H_2 = -\varepsilon \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 u^*}{\partial t \partial x_1}; H_3 = 0.$$

При этом функция  $u^*$  удовлетворяет неоднородному уравнению (1.27) с правой частью  $j_3^{(e)} / \varepsilon$ .

Введенные функции  $u^*, v^*$  называются функциями Борнгиса [2,93], использование которых для нахождения векторов напряженности ограничивается условием (1.19), налагаемых на коэффициенты Ламе. Эти условия выполняются в системах координат, где  $\chi_3 = \text{const}$  (любая из констант) определяет семейство переменных плоскостей или концентрических сфер [93,94]. Условия (1.19), в частности, имеют место в сферической системе координат  $x_1 = \theta, x_2 = \varphi, x_3 = r$ , где  $h_1 = r, h_2 = r \sin \theta, h_3 = 1$ . Здесь вместо функций Борнгиса удобно использовать электрический потенциал Дебая  $u(r, t)$  и магнитный потенциал Дебая  $v(r, t)$  по формулам  $u^* = ru, v^* = rv$ .

Тогда представления (1.23), (1.26)...(1.28) преобразуются для поля  $E$ -типа

$$E_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (ru); E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (ru); E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (ru); \quad (1.29)$$

$$H_r \equiv 0; H_\theta = \frac{\varepsilon}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial t}; H_\varphi = -\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial t}$$

для поля  $H$ -типа

$$E_r = 0; E_\theta = -\frac{\mu}{\sin\theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial t}; E_\varphi = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial t}; \quad (1.30)$$

$$H_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (rv); H_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (rv); H_\varphi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (rv).$$

Потенциалы Дебая  $u$  и  $v$  удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\left( \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon r} j_r^{(e)}; \left( \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\mu r} j_r^{(m)}; \quad (1.31)$$

где

$$\Delta \tilde{W} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \varphi^2}. \quad (1.32)$$

В случае непроводящей среды и отсутствия сторонних источников ( $j^{(e)} = 0, j^{(m)} = 0$ ) функции  $\partial u/\partial t$  и  $\partial v/\partial t$  удовлетворяют однородным волновым уравнениям

$$\left( \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = 0. \quad (1.33)$$

Интегрируя обе части (1.33) по  $t$  от  $-\infty$  до  $t$  и учитывая условия, соответствующие начальному условию для поля, приходим к однородным волновым уравнениям для потенциалов  $u$  и  $v$

$$\left( \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = 0.$$

Рассмотрим решение неоднородного волнового уравнения

$$\Delta v - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0), \quad (1.34)$$

где  $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0)$  – заданная функция;  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_0$  соответствуют точке пространства наблюдения и некоторой фиксированной точке пространства (источник поля).

Решение уравнения (1.34) находим с помощью функции Грина

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \frac{\delta(t - t' - \sqrt{\varepsilon\mu} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

удовлетворяющей уравнению  $\Delta G - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$ , где  $\delta(\xi)$  – дельта-функция.

Тогда интегральное представление для решения (1.34) имеет вид [95,96]

$$v(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{\Omega} \phi(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0, t', t_0) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') d\mathbf{r}' = - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{\Omega} \phi(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0, t', t_0) \frac{\delta(t - t' - \sqrt{\varepsilon\mu} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (1.35)$$

Интегрирование в (1.35) ведется по всему пространству  $\Omega$ . Предположим, что  $\phi$  можно представить

в виде (1.36)

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = h^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f^*(t - t_0),$$

причем  $f^*(t - t_0) = 0$  для  $t < t_0$ . Тогда из (1.35), (1.36) получаем

$$v(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{h^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} f^*(t - t_0 - \sqrt{\varepsilon\mu} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}'. \quad (1.37)$$

Найдем магнитный потенциал Дебая, соответствующий полю  $H$ -типа, возникающего при  $t = t_0$  в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  магнитного сосредоточенного источника с моментом

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = \mathbf{e}_r M \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(t - t_0), \quad M = \text{const}. \quad (1.38)$$

и плотностью тока

$$\mathbf{j}^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0), \quad \mathbf{j}^{(m)} = (j_r^{(m)}, 0, 0). \quad (1.39)$$

Согласно (1.31) искомый потенциал удовлетворяет уравнению

$$\left( \Delta - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{c}v = -\frac{1}{\mu r} j_r^{(m)}. \quad (1.40)$$

$$j_r^{(m)} = M \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \frac{d}{dt} f(t - t_0). \quad (1.41)$$

Интегрируя обе части (1.40) по  $t$  с учетом (1.41), приходим к неоднородному волновому уравнению для  $v$

$$\Delta v - \epsilon\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(t - t_0). \quad (1.42)$$

Полученное уравнение является частным случаем уравнения (1.34) с правой частью  $\phi$  в виде

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = \frac{1}{\mu r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(t - t_0), \quad (1.43)$$

Представление для магнитного потенциала Дебая  $v_0$ , соответствующего полю рассматриваемого источника (1.38), (1.39), получаем из (1.37) с учетом (1.43)

$$v_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = -\frac{M}{4\pi\mu r_0 R} f(t - t_0 - \sqrt{\epsilon\mu}R) \eta(t - t_0 - \sqrt{\epsilon\mu}R), \quad (1.44)$$

где  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ ;  $\eta(z)$  – функция Хевисайда.

Выражение для электрического потенциала Дебая  $u_0$ , отвечающему полю  $E$  – типа электрического сосредоточенного источника, возникающего при  $t = t_0$  в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  с плотностью тока

$$\mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0)$$

и моментом  $\mathbf{p} = \mathbf{e}_r p \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f_1(t - t_0)$ ,  $p = \text{const}$  имеет вид

$$u_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = -\frac{p}{4\pi\epsilon r_0 R} f_1(t - t_0 - \sqrt{\epsilon\mu}R) \eta(t - t_0 - \sqrt{\epsilon\mu}R).$$

В частном случае импульсного электрического или магнитного диполя с импульсным дипольным моментом

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{4\pi r_0 R} \begin{Bmatrix} p/\epsilon \\ M/\mu \end{Bmatrix} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0). \quad (1.45)$$

Составляющие электромагнитного поля по (1.29) или (1.30) выражаются соответственно через потенциалы Дебая

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{4\pi r_0 R} \begin{Bmatrix} p/\epsilon \\ M/\mu \end{Bmatrix} \delta(t - t_0 - \sqrt{\epsilon\mu}R) \eta(t - t_0 - \sqrt{\epsilon\mu}R). \quad (1.46)$$

## 1.2. Решение второй краевой задачи для волнового уравнения с незамкнутыми коническими границами

Рассмотрим решение второй краевой задачи для волнового уравнения в случае границы, представляющей собой биконическую структуру, которая состоит из двух соосных полубесконечных круговых конусов  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  с периодически прорезанными вдоль образующих  $N$  щелями (оси щелей совпадают). Во введенной сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  с началом в центре биконуса  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  уравнение  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  записываются в виде  $\theta = \gamma_1$  и  $\theta = \gamma_2$  соответственно (рис. 1.1). Обозначим через  $d_1$  угловую ширину щелей конуса  $\Sigma_1$ , а через  $d_2$  – угловую ширину щелей,  $l = 2\pi/N$  – период биконической структуры,  $r_0, \theta_0, \varphi_0$  – координаты источника, расположенного в точке  $M_0$ . Особенностью данной структуры является то, что она имеет нерегулярности (центр биконуса – вершины конусов, ребра конических лент), а ее характерные геометрические размеры являются угловыми величинами. Так, ширина щелей и период – величины двугранных углов, которые образованы пересечением плоскостей, проведенных через ось бико-

нуса и ребра соседних конических лент (секторов). Требуется найти скалярную функцию  $v(\mathbf{r}, t)$  (магнитный потенциал Дебая), удовлетворяющую однородному волновому уравнению

$$\Delta v - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad a = \text{const}, \quad (1.47)$$

граничному условию

$$\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0 \quad (1.48)$$

в каждый момент времени и условию причинности

$$v \equiv 0 \equiv \frac{\partial v}{\partial t}, \quad t \leq t_0. \quad (1.49)$$

Для обеспечения единственности решения краевой задачи потребуем выполнения условий

$$\left| \frac{\partial v}{\partial t} \right| < C, \quad \lim_{r' \rightarrow 0} (r')^2 \frac{\partial v}{\partial r'} = 0 \quad (1.50)$$

в некоторой окрестности нерегулярностей равномерно по  $t, \theta', \varphi'$ , где  $r', \theta', \varphi'$  – сферическая система координат с центром в рассматриваемой нерегулярности.

Краевая задача в такой постановке (1.47)...(1.50) имеет единственное решение [8, 96, 97], а искомая функция принадлежит пространству Соболева  $W_2^1(\Omega^T)$ ,  $\Omega^T = \Omega \times (t_0, T)$ ,  $T < +\infty$  [97]. Представим  $v$  в виде

$$v(\mathbf{r}, t) = v_0(\mathbf{r}, t) + v_1(\mathbf{r}, t), \quad (1.51)$$

где

$$v_0(\mathbf{r}, t) = \frac{b}{4\pi R} f\left(t - t_0 - \frac{1}{a}R\right) \eta\left(t - t_0 - \frac{1}{a}R\right) \quad (1.52)$$

соответствует полю источника (решение волнового уравнения в свободном пространстве);  $f(t)$  – заданная функция;  $b$  – известная постоянная величина, а функция  $v_1(\mathbf{r}, t)$  обусловлена присутствием биконуса  $\Sigma$ .

Используем преобразование Лапласа по  $t$

$$v^s = v^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t_0) = \int_0^{+\infty} v(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) e^{-st} dt \quad (1.53)$$

и сведем решение нестационарной задачи к решению стационарной. Для определенности считаем, что  $s > 0$  (в конечных результатах проводится аналитическое продолжение). Сформулируем стационарную краевую задачу для  $v^s$ , удовлетворяющую

а) однородному уравнению Гельмгольца  $\Delta v^s - q^2 v^s = 0$  вне биконуса и источника, где  $q = \frac{s}{a} > 0$ ;

б) краевому условию на биконусе

$$\frac{\partial v^s}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0;$$

в) условию на бесконечности в форме предельного поглощения;

г) условию ограниченности энергии

$$\int_{\Omega} \left( |v^s|^2 + |\nabla v^s|^2 \right) d\mathbf{r}' < +\infty.$$

Стационарная задача в такой постановке имеет единственное решение, которое принадлежит энергетическому пространству Соболева  $W_2^1(\Omega)$  [2, 8, 48, 97]. В соответствии с (1.51)

$v^s = v_0^s + v_1^s$ , где  $v_0^s, v_1^s$  – трансформанты функций  $v_0, v_1$  (1.53):

$$v_0^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t_0) = g^s \frac{e^{-qR}}{4\pi R};$$

$$g^s = \frac{b}{r_0} e^{-st_0} \tilde{F}(s), \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|, \quad \tilde{F}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

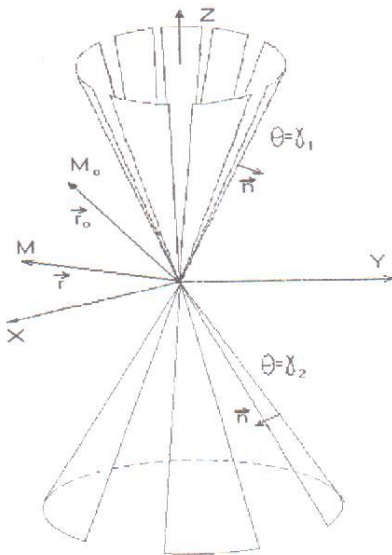


Рис. 1.1. Геометрия структуры

Для  $e^{-qR}/R$  имеет место следующее представление [22, 98 – 100]:

$$\frac{e^{-qR}}{R} = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m-1} e^{im(\varphi-\varphi_0)} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau \frac{K_{i\tau}(qr_0) K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r_0} \sqrt{r}} \frac{\Gamma(1/2 - m + i\tau)}{\Gamma(1/2 + m + i\tau)} F_{m\tau}(\theta, \theta_0) d\tau; \quad (1.47)$$

$$F_{m\tau}(\theta, \theta_0) = \begin{cases} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos\theta) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos\theta_0), \theta < \theta_0; \\ P_{-1/2-i\tau}^m(-\cos\theta) P_{1/2+i\tau}^m(\cos\theta_0), \theta_0 < \theta, \end{cases} \quad (1.56)$$

где  $K_\mu(qr)$  – функция Макдональда;  $\Gamma(z)$  – гамма-функция;  $P_{-1/2+i\tau}^m(\cos\theta)$  – присоединенная функция Лежандра 1-го рода [98].

Для решения краевых задач в сферической системе координат с конической геометрией одним из эффективных средств является интегральное преобразование Конторовича–Лебедева относительно радиальной координаты [33, 34, 22]

$$\hat{\Phi}(\tau) = \int_0^{+\infty} \Phi(r) \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} dr; \quad (1.57)$$

$$\Phi(r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \hat{\Phi}(\tau) \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau. \quad (1.58)$$

В соответствии с (1.55)–(1.58)

$$\hat{v}_0^s(\tau, \theta, \varphi) = \int_0^{+\infty} v_0^s(r, \theta, \varphi) \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} dr; \quad (1.59)$$

$$v_0^s(r, \theta, \varphi) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \hat{v}_0^s \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau; \quad (1.60)$$

$$\hat{v}_0^s = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau}^s F_{m\tau}(\theta, \theta_0) e^{im\varphi};$$

$$a_{m\tau}^s = \frac{1}{4} (-1)^m e^{im\varphi_0} \frac{g^s(t_0, r_0) \Gamma(1/2 - m + i\pi) K_{i\tau}(qr_0)}{ch\pi\tau \Gamma(1/2 + m + i\pi) \sqrt{r_0}}.$$

Для определенности считаем, что источник находится внутри конуса  $\Sigma_2$  ( $\gamma_2 < \theta_0 < \pi$ ). В соответствии с (1.59), (1.60) неизвестный потенциал  $v_1^s$  ищем в виде интеграла Конторовича–Лебедева (1.57), (1.58)

$$\hat{v}_1^s(\tau, \theta, \varphi) = \int_0^{+\infty} v_1^s(r, \theta, \varphi) \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} dr; \quad (1.61)$$

$$v_1^s(r, \theta, \varphi) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \hat{v}_1^s \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (1.62)$$

где

$$\hat{v}_1^s = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau}^s \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos\gamma_2) \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2-i\tau}^m(-\cos\theta) U_{m\tau}(\theta, \varphi); \quad (1.63)$$

$$U_{m\tau} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{mn} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos\theta) e^{i(m+nN)\varphi}, 0 < \theta < \gamma_1; \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\beta_{mn} P_{-1/2+i\tau}^{m-nN}(\cos\theta) + \xi_{mn} P_{1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos\theta)] e^{i(m+nN)\varphi}, \gamma_1 < \theta < \gamma_2; \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_{mn} P_{1/2-i\tau}^{m+nN}(-\cos\theta) e^{i(m-nN)\varphi}, \gamma_2 < \theta < \pi. \end{cases} \quad (1.64)$$

Принимая во внимание непрерывность  $\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{v}_1^s$  на периоде конусов  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , находим связь между известными коэффициентами  $\alpha_{mn}$ ,  $\beta_{mn}$ ,  $\xi_{mn}$ ,  $\zeta_{mn}$

$$\beta_{mn} = \frac{\zeta_{mn} \frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2-ir}^{m+nN}(-\cos\gamma_1) - \alpha_{mn} \frac{d}{d\gamma_1} P_{1/2+ir}^{m+nN}(\cos\gamma_1)}{(1 - C_{ir}^{m+nN}) \frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2-ir}^{m+nN}(\cos\gamma_1)} C_{ir}^{m+nN}; \quad (1.65)$$

$$\xi_{mn} = \frac{\alpha_{mn} \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2-ir}^{m+nN}(\cos\gamma_2) - \zeta_{mn} \frac{d}{d\gamma_2} P_{1/2+ir}^{m+nN}(-\cos\gamma_2)}{(1 - C_{ir}^{m+nN}) \frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2-ir}^{m+nN}(-\cos\gamma_2)} C_{ir}^{m+nN}; \quad (1.66)$$

$$C_{ir}^m = \frac{\frac{d}{d\gamma_1} P_{1/2+ir}^m(\cos\gamma_1) \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2-ir}^m(-\cos\gamma_2)}{\frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+ir}^m(-\cos\gamma_1) \frac{d}{d\gamma_2} P_{1/2+ir}^m(\cos\gamma_2)}. \quad (1.67)$$

Используя краевое условие (54) на конических лентах конуса  $\Sigma_j$ :  $\theta = \gamma_j, \pi d_j/l < |N\varphi| \leq \pi$ ,  $j=1,2$ , получаем уравнения для  $\alpha_{mn}$  и  $\zeta_{mn}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{mn} \frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2-ir}^{(n+v)N}(\cos\gamma_1) e^{inN\varphi} = b_{ir}^{(m_0+v)N}(\gamma_1, \gamma_2) e^{im_0N\varphi}, \quad \pi d_1/2 < |N\varphi| \leq \pi; \quad (1.68)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_{mn} \frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+ir}^{(n+v)N}(-\cos\gamma_2) e^{inN\varphi} = e^{im_0N\varphi}, \quad \pi d_2/2 < |N\varphi| \leq \pi, \quad (1.69)$$

где

$$b_{ir}^{(n-v)N}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+ir}^{(n-v)N}(\cos\gamma_1)}{\frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+ir}^{(n-v)N}(\cos\gamma_2)}; \quad \frac{m}{N} = m_0 + v;$$

$m_0$  – ближайшее целое число к  $\frac{m}{N}$ ;  $-1/2 \leq v < 1/2$ .

Учитывая принадлежность  $v_1^s$  пространству Собольева  $W_2^1(\Omega)$  и непрерывность в щелях конуса  $\Sigma_j$ :  $\theta = \gamma_j$ ,  $|N\varphi| \leq \pi d_j/l$ , приходим к соотношениям, связывающим неизвестные коэффициенты

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{mn} P_{-1/2-ir}^{(n+v)N}(\cos\gamma_1) e^{inN\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\beta_{mn} P_{-1/2+ir}^{(n+v)N}(\cos\gamma_1) + \xi_{mn} P_{-1/2+ir}^{(n+v)N}(-\cos\gamma_1)] e^{inN\varphi}, \quad |N\varphi| < \pi d_1/l; \quad (1.70)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_{mn} P_{-1/2-ir}^{(n+v)N}(-\cos\gamma_2) e^{inN\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\beta_{mn} P_{-1/2+ir}^{(n+v)N}(\cos\gamma_2) + \xi_{mn} P_{-1/2+ir}^{(n+v)N}(-\cos\gamma_2)] e^{inN\varphi}, \quad |N\varphi| < \pi d_2/l. \quad (1.71)$$

Воспользовавшись [100]

$$P_{-1/2+ir}^m(-\cos\theta) \frac{d}{d\theta} P_{-1/2+ir}^m(\cos\theta) - P_{-1/2+ir}^m(\cos\theta) \frac{d}{d\theta} P_{-1/2+ir}^m(-\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{m_1} \operatorname{ch} \pi r}{\sin \theta} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + ir + m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + ir - m)},$$

а также (1.65), (1.66), преобразуем (1.70), (1.71) к виду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_{mn}^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2) \left\{ \alpha_{mn} \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2-ir}^{(n+v)N}(\cos\gamma_2) - \zeta_{mn} \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+ir}^{(n+v)N}(-\cos\gamma_2) \right\} e^{inN\varphi} = 0, \quad |N\varphi| < \pi d_1/l; \quad (1.72)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_{mn}^{(2)}(\pi - \gamma_1, \pi - \gamma_2) \left\{ \alpha_{mn} \frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+ir}^{(n+v)N}(\cos\gamma_1) - \zeta_{mn} \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+ir}^{(n+v)N}(-\cos\gamma_1) \right\} e^{inN\varphi} = 0, \quad |N\varphi| < \pi d_2/l; \quad (1.73)$$

$$\tilde{B}_{mn}^{(\kappa)}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N(n+v)} \frac{|n|}{n} \left( 1 - \varepsilon_{mn}^{(\kappa)} \right) \left[ b_{ir}^{(n+v)N}(\theta_1, \theta_2) \right]^{3-2\kappa},$$

где

ду нс-

$$(1.65) \quad \frac{(-1)^{N(n+\nu)+1} \operatorname{ch} \pi \tau \Gamma(1/2 + (n+\nu) + i\tau)}{\pi \sin^2 \gamma_j \Gamma(1/2 - (n+\nu) + i\tau)} \frac{1}{\frac{d}{d\gamma_j} P_{-1/2-i\tau}^{(n+\nu)N}(\cos \gamma_j) \frac{d}{d\gamma_j} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos \gamma_j)} \times$$

$$\times \frac{1}{1 - C_{i\tau}^{(n+\nu)N}} = \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} \left(1 - \varepsilon_{mn}^{(j)}\right).$$

Введем коэффициенты

(1.66) 
$$W_n^{(m_0)} = \alpha_{mn} \frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(\cos \gamma_1) - \zeta_{mn} b_{i\tau}^{(n+\nu)N}(\gamma_1, \gamma_2) \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos \gamma_2);$$

(1.67) 
$$Z_n^{(m_0)} = \alpha_{mn} \frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(\cos \gamma_1) - \zeta_{mn} \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2-i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos \gamma_2)$$

перепишем функциональные уравнения (1.70)–(1.73) для определения коэффициентов  $\alpha_{mn}$  и  $\zeta_{mn}$  в виде

λ, по-

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} W_n^{(m_0)} e^{inN\varphi} = b_{i\tau}^{(m_0+\nu)N}(\gamma_1, \gamma_2) e^{im_0N\varphi} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_{nm} b_{i\tau}^{(n+\nu)N}(\gamma_1, \gamma_2) \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2-i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos \gamma_2) e^{inN\varphi},$$

$$\pi d_1/2 < |N\varphi| \leq \pi;$$

(1.68) 
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} \left(1 - \varepsilon_{mn}^{(1)}\right) W_n^{(m_0)} e^{inN\varphi} = 0, \quad |N\varphi| < \pi d_1/l;$$

(1.69) 
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z_n^{(m_0)} e^{inN\varphi} = -e^{im_0N\varphi} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{nm} \frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(\cos \gamma_1) \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2-i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos \gamma_2) e^{inN\varphi}, \quad \pi d_2/2 < |N\varphi| \leq \pi;$$

(1.80) 
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} \left(1 - \varepsilon_{mn}^{(2)}\right) Z_n^{(m_0)} e^{inN\varphi} = 0, \quad |N\varphi| < \pi d_2/l.$$

Следует отметить, что коэффициенты  $\alpha_{mn}$ ,  $\zeta_{mn}$ , являющиеся решением систем линейных уравнений (1.77)–(1.80) не зависят от параметра  $q = s/a$ , что упрощает процедуру обращения трансформанты (1.53) и позволяет воспользоваться алгоритмом обращения [101].

Суть его заключается в использовании формул

са  $\Sigma_j$ :

$$K_{i\tau}(qr_0)K_{i\tau}(qr) = \frac{1}{2} \int_0^{-\infty} K_0\left(q\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \operatorname{ch} \bar{\mu}}\right) e^{i\tau \bar{\mu}} d\bar{\mu}, \quad K_0(q\bar{\chi}) = \int_{\bar{\chi}/a}^{\infty} \frac{e^{-sv}}{\sqrt{v^2 - \bar{\chi}^2/a^2}} dv$$

(1.70) **выделении нестационарной функции в подынтегральном выражении ее преобразования Лапласа (1.15).**

Вследствие использования этого алгоритма обращаем  $v_1^s$  и получаем решение второй краевой задачи для волнового уравнения в случае незамкнутой биконической структуры (1.47)–(1.50)

(1.71) 
$$v_1(\mathbf{r}, t) = -\frac{ab}{4rr_0^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m e^{im\varphi_0} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau \frac{\Gamma(1/2 - m + i\tau)}{\Gamma(1/2 + m + i\tau)} \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma_2) P_{-1/2-i\tau}^m(-\cos \theta_0) \times$$

$$\times U_{m\tau}(\theta, \varphi) \Phi_{i\tau}(t - t_0) d\tau;$$

(1.72) 
$$\Phi_{i\tau}(t - t_0) = \int_0^{t-t_0} \eta\left(z - \frac{r+r_0}{a}\right) f(t-t_0-z) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \chi(z)) dz = \int_{(r-r_0)/a}^{t-t_0} f(t-t_0-z) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \chi(z)) dz;$$

(1.73) 
$$\operatorname{ch} \chi(z) = \frac{a^2 z^2 - r^2 - r_0^2}{2rr_0}.$$

Таким образом, вторая краевая задача для волнового уравнения с незамкнутой биконической границей (1.47)–(1.50) сведена к двум связанным системам функциональных уравнений (1.77)–(1.80). В случаях одиночного конуса с продольными щелями и биконической поверхностью, состоящей из сплошного и незамкнутого конусов, полученные системы удастся развязать и свести к одной системе функциональных уравнений. В последующих главах рассматриваются электродинамические задачи для таких геометрий и их частных случаев.

## ГЛАВА 2. Рассеяние поля гармонического источника на конической поверхности с продольными щелями

Данная глава посвящена изучению рассеивающих свойств идеально проводящей конической поверхности с неоднородностями в виде продольных щелей. Рассматриваемая коническая структура является моделью слабонаправленной широкополосной антенны. В главе проводится исследование задач о возбуждении идеально проводящего полубесконечного кругового конуса с периодически прорезанными вдоль образующими щелями электрическим и магнитным радиальными диполями, поле которых меняется по гармоническому закону. Для решения электродинамической задачи используется подход, основанный на применении интегрального преобразования Конторовича–Лебедева [33,34] в сочетании с методом задачи Римана–Гильберта [43 – 45, 69 – 71, 81]. Этот подход заключается в сведении задачи возбуждения к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода (СЛАУ-2) фредгольмовского типа. Аналитическое решение задачи возбуждения получено в случаях полупрозрачного конуса, узких щелей, узких конических секторов. На его основе изучена структура рассеянного поля, определен характер поведения поля вблизи вершины конуса, показано существование волн типа щелевой и секториальной, построены диаграммы рассеяния.

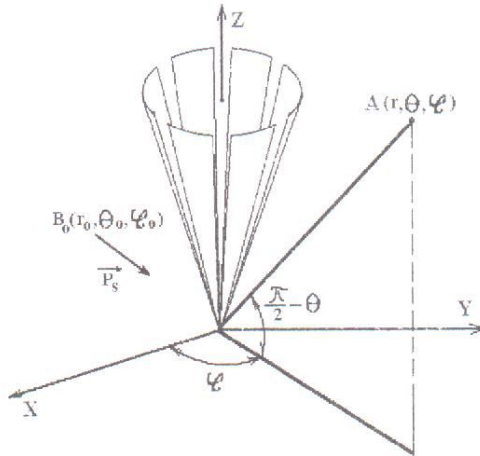


Рис.2.1. Коническая структура

### 2.1. Постановка задачи. Система функциональных соотношений

Рассмотрим задачу о возбуждении неограниченного идеально проводящего бесконечно тонкого кругового конуса с периодически прорезанными щелями (рис.2.1) электрическим или магнитным радиальным диполем (моменты диполей по величине равны  $p_1$  или  $p_2$  соответственно).

Поле диполей меняется во времени по закону  $f(t) = e^{i\omega t}$ . Введем сферическую систему координат  $r, \theta, \varphi$  с началом в вершине конуса и обозначим через  $2\gamma$  угол раствора конуса,  $N$  – число щелей,  $l = 2\pi/N$  – период структуры,  $d$  – угловая ширина щелей ( $l$  и  $d$  – величины соответствующих двугранных углов, которые образованы пересечением плоскостей, проведенных через ось конуса и ребра соседних секторов),  $r_0, \theta_0, \varphi_0$  – координаты источника,  $k$  – волновое число ( $\text{Im } k \leq 0$ ).

Электрический (магнитный) радиальный диполь возбуждает в свободном пространстве поле  $\mathbf{E}_0^{(1)}, \mathbf{H}_0^{(1)}$  ( $\mathbf{E}_0^{(2)}, \mathbf{H}_0^{(2)}$ ), компоненты которого определяются электрическим  $U_0^{(1)}$  (магнитным  $U_0^{(2)}$ ) потенциалом Дебая из (1.29):

$$E_{r,0}^{(1)} = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (rU_0^{(1)}), \quad H_{r,0}^{(1)} = 0; \quad (2.1)$$

$$E_{\theta,0}^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (rU_0^{(1)}); \quad H_{\theta,0}^{(1)} = \frac{ik}{w \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} U_0^{(1)};$$

$$E_{\varphi,0}^{(1)} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (rU_0^{(1)}); \quad H_{\varphi,0}^{(1)} = -\frac{ik}{w} \frac{\partial}{\partial \theta} U_0^{(1)},$$

а для магнитного диполя из (1.30):

$$E_{r,0}^{(2)} = 0; \quad H_{r,0}^{(2)} = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (rU_0^{(2)});$$

$$E_{\theta,0}^{(2)} = -\frac{ikw}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} U_0^{(2)}; \quad H_{\theta,0}^{(2)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (rU_0^{(2)}); \quad (2.2)$$

$$E_{\varphi,0}^{(2)} = ikw \frac{\partial}{\partial \theta} U_0^{(2)}; \quad H_{\varphi,0}^{(2)} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (rU_0^{(2)}).$$

СОЙ

$\epsilon = \sqrt{\mu/\epsilon}$ ,  $U_0^{(j)} = \frac{p_j e^{-ikR}}{r_0 R}$ ,  $j=1,2$ ;  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$  – расстояние от точки наблюдения до источника;

$\epsilon, \mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды.

Присутствие в безграничном пространстве конической поверхности с продольными щелями приводит к появлению рассеянного поля  $\mathbf{E}_1^{(j)}$ ,  $\mathbf{H}_1^{(j)}$ , которое может быть определено по формулам (2.1), (2.2),

если известен соответствующий ему потенциал Дебая  $U_1^{(j)}$ , удовлетворяющий

- а) однородному уравнению Гельмгольца всюду, вне конуса и источника  $\Delta U_1^{(j)} + k^2 U_1^{(j)} = 0$ ;
- б) граничному условию, соответствующему обращению в нуль тангенциальной составляющей вектора полного электрического поля  $\mathbf{E}^{(j)} = \mathbf{E}_0^{(j)} + \mathbf{E}_1^{(j)}$  на поверхности конуса;
- в) условию конечности энергии в любой ограниченной области пространства;
- г) принципу предельного поглощения.

Электродинамическая задача в такой постановке имеет единственное решение [50]. Учитывая пред-

$$\frac{e^{-ikr}}{R} = \frac{\pi}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-1} e^{im(\varphi-\varphi_0)} \int_0^{\infty} \tau ih\pi\tau e^{\pi\tau} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-m+i\tau) H_{i\tau}^{(2)}(kr_0)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+i\tau) \sqrt{r_0}} F(\theta, \theta_0, m, \tau) d\tau; \quad (2.3)$$

$$F(\theta, \theta_0, m, \tau) = \begin{cases} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos\theta) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos\theta_0), & 0 < \theta < \theta_0; \\ P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos\theta) P_{-1/2-i\tau}^m(\cos\theta_0), & \theta_0 < \theta < \pi, \end{cases}$$

решение граничной задачи ищем с помощью интегрального преобразования Конторовича–Лебедева [55, 44, 70] относительно радиальной координаты

$$U_1^{(j)} = \int_0^{\infty} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(j)}(\tau, k) U_{m\tau}^{(j)}(\theta, \varphi) d\theta, \quad (2.4)$$

$$U_{m\tau}^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{m,n+m_0}^{(j)}(\tau) \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos\theta)}{d^{j-1} P_{-1/2-i\tau}^{m+nN}(\pm \cos\gamma)} e^{i(m+nN)\varphi},$$

$$a_m^{(j)}(\tau, k) = \frac{\pi p_j}{2r_0} (-1)^m e^{-im\varphi_0} \tau ih\pi\tau e^{\pi\tau} \frac{\Gamma(1/2-m+i\tau) H_{i\tau}^{(2)}(kr_0)}{\Gamma(1/2+m+i\tau) \sqrt{r_0}} P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos\theta_0) \frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1}} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos\gamma).$$

Знак “+” в (2.4) соответствует области  $0 < \theta < \gamma$ , “-”  $\gamma < \theta < \pi$ ;  $H_{i\tau}^{(2)}(kr)$  – функция Ханкеля 2-го рода;  $\Gamma(x)$  – гамма-функция;  $P_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)$  – присоединённая функция Лежандра 1-го рода;  $x_{m,n+m_0}^{(j)}(\tau)$  – искомые коэффициенты  $\gamma < \theta_0 < \pi$ .

Эти представления могут быть также получены из (1.81), (1.82) в предельном случае гармонического установившегося режима. Применение граничного условия на конусе и условия непрерывности поля в щелях приводит к следующей системе функциональных соотношений относительно  $x_{m,n}^{(j)}$ , которую также можно получить и из (1.77) – (1.80)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{m,n}^{(j)} e^{inN\varphi} = e^{im_0N\varphi}, \quad \frac{\pi d}{l} < |N\varphi| \leq \pi; \quad (2.5)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [N(n+\nu)]^{\alpha(j)} \frac{|n|}{n} (1 - \epsilon_{m,n}^{(j)}) x_{m,n}^{(j)} e^{inN\varphi} = 0, \quad |N\varphi| < \frac{\pi d}{l}; \quad (2.6)$$

где  $\alpha(j) = (-1)^{j-1}$ ;

$$[N(n+\nu)]^{\alpha(j)} \frac{|n|}{n} (1 - \epsilon_{m,n}^{(j)}) = \frac{(-1)^{(n-\nu)N-j-1} ch\pi\tau \Gamma(1/2+i\tau+(n+\nu)N)}{\pi (\sin\gamma)^{1-\alpha(j)} \Gamma(1/2+i\tau-(n+\nu)N)} \frac{1}{d\gamma^{j-1} P_{1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(\cos\gamma) d\gamma^{j-1} P_{-1/2-i\tau}^{(n-\nu)N}(-\cos\gamma)}$$

Используя асимптотические разложения функции  $P_\zeta^m(\cos \gamma)$  при  $|m| \gg 1$  [102], нетрудно показать, что для  $\varepsilon_{m,n}$  имеет место оценка при  $(n+\nu)N \gg 1$

$$\varepsilon_{m,n}^{(j)} = O\left(\frac{\sin^2 \gamma}{N^2 (n+\nu)^2}\right). \quad (2.7)$$

Полученные функциональные соотношения (2.5) и (2.6) в дальнейшем рассматриваются как уравнения для определения неизвестных коэффициентов  $x_{m,n}^{(j)}$ , которые находятся в гильбертовом пространстве последовательностей  $\{\ell_p^{(j)}\}$

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |\ell_p^{(j)}|^2 (1-|p|)^{\alpha(j)} < +\infty.$$

Это условие получается в результате применения к подынтегральной функции в представлении (2.4) условия конечности энергии.

## 2.2. Возбуждение конуса с продольными щелями электрическим диполем

В данном случае возбуждения система (2.5), (2.6) принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n}^{(1)} e^{inN\varphi} = e^{im_0N\varphi}, \quad \frac{\pi d}{l} < |N\varphi| \leq \pi; \quad (2.8)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} N(n+\nu) \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) x_{m,n}^{(1)} e^{inN\varphi} = 0, \quad |N\varphi| < \frac{\pi d}{l}. \quad (2.9)$$

Плотность наведенного на конусе поверхностного тока, определяемого по формуле

$$\mathbf{j} = \left[ \mathbf{n} \left( \mathbf{H}|_{\theta=\gamma+0} - \mathbf{H}|_{\theta=\gamma-0} \right) \right].$$

При таком способе возбуждения имеем только радиальную составляющую  $j_r$ , которая выражается через коэффициенты  $x_{m,n}^{(1)}(\tau)$  посредством соотношения

$$j_r = \frac{2ik}{\sin \gamma} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i(n+\nu)N\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{H_{\nu}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} a_m^{(1)}(\tau, k) N(n+\nu) \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) x_{m,n}^{(1)}(\tau) d\tau.$$

После введения  $y_{m,n}^{(1)}$ , связанных с  $x_{m,n}^{(1)}$  линейной зависимостью

$$y_{m,n}^{(1)} = (-1)^{n-m_0} \frac{n+\nu}{m_0+\nu} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) x_{m,n}^{(1)} \quad (2.10)$$

и дифференцирования по  $\varphi$  уравнения, определенного в интервале  $\frac{\pi d}{l} < |N\varphi| \leq \pi$ , приходим к следующей системе функциональных уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|n|}{n} (1 - \delta_{m,n}^{(1)}) y_{m,n}^{(1)} e^{im\psi} = e^{im_0\psi}, \quad |\psi| < \frac{l-d}{l} \pi; \quad (2.11)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_{m,n}^{(1)} e^{im\psi} = 0, \quad \pi \frac{l-d}{l} < |\psi| \leq \pi \quad (2.12)$$

с дополнительным уравнением

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n+\nu} \frac{|n|}{n} (1 - \delta_{m,n}^{(1)}) y_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{m_0+\nu},$$

здесь

$$1 - \delta_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}}, \quad \psi = N\varphi - \frac{|\varphi|}{\varphi} \pi.$$

С помощью метода задачи Римана-Гильберта для дуги единичной окружности, развитого в [43, 44], полученные функциональные уравнения (2.11), (2.12) сводятся к СЛАУ-2 фредгольмовского типа относительно  $y_{m,n}^{(1)}$

$$(2.7) \quad \frac{2P_{v-1}(-u)}{v(P_v(-u) + P_{v-1}(-u))} y_{m,0}^{(1)} = V^{m_0}(u) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{|p|}{p} \delta_{m,p}^{(1)} V^p(u) y_{m,p}^{(1)} ; \quad (2.13)$$

$$y_{m,n}^{(1)} = V_{n-1}^{m_0-1}(u) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{|p|}{p} \delta_{m,p}^{(1)} V_{n-1}^{p-1}(u) y_{m,p}^{(1)} + y_{m,0}^{(1)} P_n(u), \quad (2.14)$$

где  $u = \cos \frac{l-d}{l} \pi$ ,  $P_v(u)$  – функция Лежандра;

$$V_{n-1}^{m-1}(u) = \frac{n}{2(n-m)} [P_{n-1}(u)P_m(u) - P_n(u)P_{m-1}(u)]; \quad (2.15)$$

$$V^n(u) = \frac{1}{n+v} \left\{ P_n(u) - \frac{P_{v-1}(-u)}{P_v(-u) + P_{v-1}(-u)} [P_n(u) - P_{n-1}(u)] \right\}. \quad (2.16)$$

Следует отметить, что искомые коэффициенты  $y_{m,n}^{(1)}$ , представляющие собой решение СЛАУ-2 (2.13), (2.14), не зависят от волнового числа, что является, в частности, удобным для выяснения поведения поля вблизи острого конуса ( $kr \ll 1$ ), так и вдали от него ( $kr \gg 1$ ).

Таким образом, определение потенциала Дебая  $U_1^{(1)}$ , соответствующего рассеянному конусом полю сводится к решению СЛАУ-2. Матричный оператор этой системы является вполне непрерывным и ее решение можно получить методом редукции [103]. В частных случаях полупрозрачного конуса, когда число щелей велико и их ширина сравнима с периодом структуры, узких щелей ( $d/l \ll 1$ ), конуса с малым углом раствора ( $\gamma \ll 1$ ), узких конических секторов ( $(l-d)/l \ll 1$ ) норма матричного оператора по норме расширенного гильбертова пространства меньше единицы, что позволяет использовать для решения СЛАУ-2 также метод последовательных приближений [103] и получить аналитическое решение исходной электродинамической задачи.

**Аналитическое решение.** Аналитическое решение электродинамической задачи может быть найдено в случае полупрозрачного конуса, узких щелей, конуса с малым углом раствора, конической поверхности, образованной узкими коническими секторами на основе аналитического решения СЛАУ-2 методом последовательных приближений. Используя его и ограничиваясь первым приближением, получаем для  $y_{m,0}^{(1)}$  следующие представления:

$$(2.10) \quad y_{m,0}^{(1)} = \frac{V^{m_0}(u) + \sum_{p=0} \frac{|p|}{p} \delta_{m,p}^{(1)} V^p(u)}{1 - \frac{|p|}{p} \delta_{m,p}^{(1)} V_{p-1}^{p-1}(u)} [V_{p-1}^{m_0-1}(u) + \Theta_p^{m_0}(u)]; \quad (2.17)$$

$$(2.11) \quad \frac{1}{v} \frac{P_{v-1}(-u) - P_v(-u)}{P_{v-1}(-u) + P_v(-u)} + \frac{1}{v} (1 - \delta_{m,0}^{(1)}) - \sum_{p=0} \frac{|p|}{p} \delta_{m,p}^{(1)} V_{p-1}^{p-1}(u) [P_p(u) + \delta_{m,0}^{(1)} V_{p-1}^{-1}(u) + \Theta_p(u)]$$

$$(2.12) \quad y_{m,p}^{(1)} = \frac{1}{1 - \frac{|p|}{p} \delta_{m,p}^{(1)} V_{p-1}^{p-1}(u)} \left\{ V_{p-1}^{m_0-1}(u) + \Theta_p^{m_0}(u) + [P_p(u) + \delta_{m,0}^{(1)} V_{p-1}^{-1}(u) + \Theta_p(u)] y_{m,0}^{(1)} \right\}, \quad p \neq 0, \quad (2.18)$$

$$V_{n-1}^{-1}(u) = \frac{1}{2} [P_{n-1}(u) - P_n(u)]; \quad \delta_{m,0}^{(1)} = \delta_{m,n}^{(1)}|_{n=0}; \quad \Theta_p^{m_0}(u) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq p}} \frac{1}{1 - \frac{n}{n} \delta_{m,n}^{(1)} V_{n-1}^{n-1}(u)} \frac{|n|}{n} \delta_{m,n}^{(1)} V_{p-1}^{n-1}(u) V_{p-1}^{m_0-1}(u);$$

$$\Theta_p(u) = \sum_{n=p} \frac{1}{1 - \frac{|n|}{n} \delta_{m,n}^{(1)} V_{n-1}^{n-1}(u)} \frac{|n|}{n} \delta_{m,n}^{(1)} V_{p-1}^{n-1}(u) [P_n(u) + \delta_{m,0}^{(1)} V_{n-1}^{-1}(u)].$$

Для  $\Theta_p^{m_0}(u)$  и  $\Theta_p(u)$  имеют место следующие оценки:

$$|\Theta_p(u)| < \frac{\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}} \left(1 + |\delta_{m,0}^{(1)}| \sqrt{1-u}\right); \quad (2.19)$$

$$|\Theta_p^{m_0}(u)| < \frac{\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}} \left[ \frac{1-u}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-u} \ln(1+|m_0|) \right], \quad m_0 \neq 0; \quad (2.20)$$

$$|\Theta_p^0(u)| < \frac{\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}} \sqrt{1-u}; \quad (2.21)$$

$$\tilde{\mu} = \max_p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\delta_{m,n}^{(1)}| |V_{p-1}^{n-1}(u)|}{1 - \frac{|p|}{n} |\delta_{m,n}^{(1)}| V_{n-1}^{n-1}(u)}; \quad \tilde{\mu} < \text{const} \frac{\sqrt{1-u^2}}{N^2} \sin^2 \gamma.$$

Получим аналитическое решение для полупрозрачного конуса, конуса с узкими щелями и конической поверхности из узких секторов.

**Полупрозрачный конус.** Переходя в приближении (2.17), (2.18) к пределу  $N \rightarrow \infty$ ,  $d/l \rightarrow 1$ , найдем коэффициенты Фурье в случае полупрозрачного конуса, который определяется существованием предела

$$Q = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d/l \rightarrow 1}} \left[ -\frac{1}{N} \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right]. \quad (2.22)$$

При этом

$$x_{m,0}^{(1)} = \frac{1}{1 + 2m(1 - \varepsilon_{m,0})Q}, \quad \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d/l \rightarrow 1}} U_{m\tau}^{(1)} = x_{m,0} \frac{P_{-1/2+i\tau}^m(\pm \cos \theta)}{P_{-1/2-i\tau}^m(\pm \cos \gamma)} e^{im\varphi}.$$

Подставляя предельные значения  $x_{m,0}^{(1)}$  в (2.4), получаем выражение для электрического потенциала Дебая  $U_1^{(1)}$ , соответствующего рассеянному полупрозрачным конусом полю при возбуждении электрическим радиальным диполем

$$U_1^{(1)} = \frac{\pi p_1}{2r_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m e^{im(\varphi-\varphi_0)} \int_0^{+\infty} \frac{\tau \text{th} \pi \tau e^{\pi \tau}}{1 + 2m(1 - \varepsilon_{m,0}^{(1)})Q} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - m + i\tau) H_{i\tau}^{(2)}(kr_0)}{\Gamma(\frac{1}{2} + m + i\tau) \sqrt{r_0}} \times \\ \times \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} P_{-1/2-i\tau}^m(-\cos \theta_0) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta) d\tau, \quad 0 < \theta < \gamma; \quad (2.23)$$

$$U_1^{(1)} = \frac{\pi p_1}{2r_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m e^{im(\varphi-\varphi_0)} \int_0^{+\infty} \frac{\tau \text{th} \pi \tau e^{\pi \tau}}{1 + 2m(1 - \varepsilon_{m,0}^{(1)})Q} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - m + i\tau) H_{i\tau}^{(2)}(kr_0) H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\Gamma(\frac{1}{2} + m + i\tau) \sqrt{r_0} \sqrt{r}} \times \\ \times \frac{P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma)}{P_{-1/2-i\tau}^m(-\cos \gamma)} P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta_0) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta) d\tau, \quad \gamma < \theta < \pi. \quad (2.24)$$

На поверхности  $\theta = \gamma$  компоненты электромагнитного поля удовлетворяют усредненным граничным условиям вида

$$E_r^+ = E_r^-; \quad -\frac{ik}{wQ \sin \gamma} E_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (r \tilde{H} \varphi), \quad (2.25)$$

где  $\tilde{H} = H^+ - H^-$ ;  $f^+$  и  $f^-$  означают предельные значения функции  $f$  при  $\theta = \gamma \pm 0$  соответственно.

Полупрозрачный конус представляет собой модель конической пленки, пропускающей и отражающей электромагнитное поле, на поверхности которой заданы усредненные граничные условия (2.25). Полученные выражения для потенциалов Дебая (2.23), (2.24) в этом частном случае рассматриваемой поверхности хорошо согласуются с результатами, приведенными в [22, 45, 47].

Для простоты и удобства анализа рассеянного конической поверхностью поля рассмотрим случай, когда источник расположен на оси конуса ( $\varphi_0 = 0$ ,  $\theta_0 = \pi$ ). После перехода в представлении для потенциалов Дебая от интегрирования по вещественной оси ( $0 \leq \tau < +\infty$ ) к интегрированию по мнимой ( $\mu = i\tau$ ) выражение (2.24) запишется в виде

$$U_P^{(0)} = \frac{\pi^2 p_1}{2r_0 \sqrt{rr_0}} \int_{-\infty}^{-ix} \frac{\mu T_\mu(r, r_0)}{\Delta_\mu \cos \pi \mu} [P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma)]^2 P_{1/2+\mu}(-\cos \theta) d\mu, \quad \gamma < \theta < \pi;$$

$$U_P^{(0)} = \frac{\pi^2 p_1}{2r_0 \sqrt{rr_0}} \int_{-\infty}^{-ix} \frac{\mu T_\mu(r, r_0)}{\Delta_\mu \cos \pi \mu} \left[ P_{\frac{1}{2}+\mu}(\cos \gamma) \right]^2 P_{\frac{1}{2}+\mu}(-\cos \theta) d\mu, \quad \gamma < \theta < \pi; \tag{2.26}$$

$$\Delta_\mu = \pi P_{-1/2-\mu}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) + 2Q \cos \pi \mu; \tag{2.27}$$

$$T_\mu(r, r_0) = \begin{cases} J_\mu(kr) H_\mu^{(2)}(kr_0), & r < r_0; \\ H_\mu^{(2)}(kr) J_\mu(kr_0), & r > r_0; \end{cases} \quad T_\mu(r, r_0) = \begin{cases} J_\mu(kr) H_\mu^{(2)}(kr_0), & r < r_0; \\ H_\mu^{(2)}(kr) J_\mu(kr_0), & r > r_0. \end{cases} \tag{2.28}$$

Аналогичное выражение и для  $0 < \theta < \gamma$ .

Выбрав контур интегрирования в (2.26) в правой полуплоскости ( $\text{Re } \mu > 0$ ) и используя теорему Коши можно представить  $U_1^{(1)}$  в виде ряда вычетов относительно полюсов подынтегральной функции [104].

Применив это представление в (2.1) и получаем выражение для составляющих рассеянного поля, вид одних из которых приводится ниже в области  $\gamma < \theta < \pi$

$$E_{\theta n}^{(1)} = -E_{\theta 0}^{(1)} - \frac{\pi^3 i p_1}{r r_0 \sqrt{r_0}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mu_n (\mu_n^2 - 1/4) \frac{d}{dr} (\sqrt{r} T_{\mu_n}(r, r_0))}{\cos \pi \mu_n \frac{d}{d\mu} \Delta_\mu |_{\mu=\mu_n}} [P_{-1/2-\mu_n}(\cos \gamma)]^2 P_{-1/2-\mu_n}(-\cos \theta), \quad \Delta_{\mu_n} = 0.$$

Спектр собственных значений рассматриваемой граничной задачи для полупрозрачного конуса определяется корнями уравнения  $\Delta_\mu = 0$ , которые характеризуют поведение поля в окрестности вершины конуса. В случае полупрозрачного конуса, когда  $Q$  мало, корни уравнения с малой правой частью

$$\frac{\pi}{\cos \pi \mu} P_{-1/2-\mu}(\cos \gamma) P_{-1/2-\mu}(-\cos \gamma) = -2Q \tag{2.29}$$

лежат вблизи корней  $P_{-1/2+\mu}(\pm \cos \gamma) = 0$  [81]:

$$\mu_q^\pm = \alpha_q^\pm - \frac{2Q \cos \pi \alpha_q^\pm}{\pi \frac{d}{d\mu} [P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma) P_{-1/2-\mu}(-\cos \gamma)] |_{\mu=\alpha_q^\pm}} + O(Q^2); \tag{2.30}$$

$$P_{-1/2-\alpha_q^\pm}(\cos \gamma) = 0, \quad P_{-1/2-\alpha_q^\pm}(-\cos \gamma) = 0.$$

Таким образом, спектр собственных значений в этом случае представляет собой возмущенный спектр собственных значений граничной задачи Дирихле для сплошного конуса [8] при осесимметричном возбуждении. Вблизи вершины компоненты электрического поля ведут себя как  $(kr)^{-1/2+\mu_0^-}$ , а магнитного  $(kr)^{-1/2+\mu_0^+}$ .

Принимая во внимание поведение функции Лежандра  $P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma)$  в окрестности своего первого нуля  $\alpha_0^-$  [105] и предполагая  $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$  (при этом  $\frac{1}{2} < \alpha_0^- \leq \frac{3}{2}$ ), приходим к выводу, что

$$\frac{\cos \pi \alpha_0^-}{\pi P_{-1/2-\alpha_0^-}(\cos \gamma) \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) |_{\mu=\alpha_0^-}} > 0. \tag{2.31}$$

Поведение электрического поля вблизи острия сплошного конуса определяется слагаемым порядка  $(kr)^{-1/2+\alpha_0^-}$ , а магнитного  $(kr)^{-1/2-\alpha_0^-}$  [51]. Отсюда следует, что особенность поля у вершины полупрозрачного конуса в больше, чем у сплошного.

В случае полупрозрачного конуса при  $Q \gg 1$  корни  $\Delta_\mu = 0$  имеют вид

$$\mu_n = 1/2 + q + \frac{1}{2Q} [P_n(\cos \gamma)]^2 + O(Q^{-2}). \tag{2.32}$$

Поле в окрестности острия ведет себя следующим образом:

$$|\mathbf{E}| \sim (kr)^{-1+1/2Q}, \quad |\mathbf{H}| \sim (kr)^{1/2Q}.$$

Отсюда следует, что особенность поля вблизи острия конуса слабо зависит от угла раствора конуса  $\gamma$ .

Выражение для  $E_{\theta 1}^{(1)}$  составляющей поля приводится ниже:

$$\begin{aligned} E_{\theta 1}^{(1)} = & -\frac{\pi p_1 i}{r r_0 \sqrt{r_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{kr_0}{2} \right)^{\mu_n - (1/2+n)} \right] (-1)^n (1/2+n)n(n+1) J_{1/2+n}(kr_0) \frac{d}{dr} \left[ \sqrt{r} H_{1/2+n}^{(2)}(kr) \right] P_n^{-1}(\cos \theta) + \\ & + \frac{p_1}{2Q} \left\{ \frac{ik}{2} \left( \frac{kr_0}{2} \right)^{-3/2+\mu_0} \frac{\sin kr_0}{r_0} \frac{e^{ikr}}{r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{\pi i}{r r_0 \sqrt{r_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{kr_0}{2} \right)^{\mu_n - (1/2+n)} (-1)^n [P_n(\cos \gamma)]^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sqrt{r} M_n^{-1} \right] \right\} + \\ & + O(Q^2), \quad r > r_0, \quad 0 < \theta < \gamma, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где

$$\begin{aligned} M_n^{-1} = & \widehat{Z}_n^{-1} + 2n(n+1) J_{1/2+n}(kr_0) H_{1/2+n}^{(2)}(kr) \frac{P_n^{-1}(\cos \theta)}{P_n(\cos \gamma)} \left\{ \frac{d}{d\mu} P_{-\frac{1}{2}+\mu}(\cos \gamma) \Big|_{\mu=1/2+n} + (-1)^n \frac{d}{d\mu} P_{1/2+\mu}(-\cos \gamma) \Big|_{\mu=1/2+n} \right\}, \\ \widehat{Z}_n^{-1} = & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{kr_0}{2} \right)^{1/2+n+2m} \frac{d}{d\mu} \left\{ \mu(\mu^2 - 1/4) H_{\mu}^{(2)}(kr) \frac{P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \theta)}{\Gamma(\mu+m+1)} \right\} \Big|_{\mu=1/2+n} \end{aligned}$$

Аналогичное представление имеет место и для  $\gamma < \theta < \pi$ .

С практической точки зрения интерес представляет способ возбуждения, когда источник расположен вблизи вершины конуса ( $kr_0 \ll 1$ ) [9,22]. Выражение для радиальной составляющей вектора Умова-Пойтинга в случае близкого расположения источника к вершине имеет вид

$$S_r = \frac{\beta}{Q^2 r^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < \gamma, \quad r > r_0, \quad (2.34)$$

где  $\beta$  – известный коэффициент.

Из (2.34) видно, что максимум потока энергии направлен вдоль конической поверхности. Это вполне согласуется с результатами для радиально проводящего конуса [22].

Выражения для решения задачи рассеяния поля электрического диполя на полупрозрачной плоскости получаются из (2.23), (2.24), полагая в последних  $\gamma = \pi/2$ .

**Конус с узкими щелями.** Поместим диполь внутри и на оси конуса ( $\theta_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ ) и рассмотрим задачу об излучении из  $N$  узких щелей ( $d/l \ll 1, 1+u \ll 1$ ), периодически прорезанных вдоль образующих конической поверхности. В этом случае

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} = & \frac{D_{ir}}{D_{ir} - \frac{1}{N} \ln \frac{1-u}{2}} + O\left( (1+u)^2 \ln(1+u) \right); \\ x_n^{(1)} = & -\frac{1}{N} \left( \frac{1+u}{2} \right) \frac{1}{D_{ir} + \frac{1-\delta_n^{(1)}}{N|n|} \frac{1}{\delta_n^{(1)}} \Phi_{ir}^{nN}} + O\left( (1+u)^2 \ln(1+u) \right); \\ D_{ir} = & \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \tau} P_{-1/2-ir}(\cos \gamma) P_{-1/2+ir}(-\cos \gamma). \end{aligned}$$

Используя оценки и асимптотики функции  $V_{p-1}^{n-1}(u)$  при  $u \rightarrow -1$  [43,44] и учитывая, что  $m = m_0 = 0$  находим асимптотическое разложение по параметру  $(1+u) \ll 1$  электрического потенциала Дебая  $U_1^{(1)}$  соответствующего полю вдали от щелей

$$U_p^{(1)} = \pi \int_0^{\infty} \frac{H_{ir}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{d_0^{(1)}(\tau, k)}{\operatorname{ch} \pi \tau} \frac{P_{-1/2+ir}(\mp \cos \gamma) P_{-1/2-ir}(\pm \cos \theta)}{D_{ir} - \frac{1}{N} \ln \frac{1-u}{2}} d\tau - \frac{(1+u)}{2N} \sum_{n=0}^{\infty} e^{inN\varphi} \int_0^{\infty} \frac{H_{ir}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \times$$

$$x \frac{a_0^{(1)}(\tau, k)}{D_\tau + \frac{1 - \delta_n^{(1)}}{N|n|\delta_n^{(1)}}} \frac{1}{N|n|} \frac{1 - \delta_n^{(1)}}{\delta_n^{(1)}} \frac{1}{\Phi_{ir}^{nN}} \frac{P_{-1/2+ir}^{nN}(\pm \cos \theta)}{P_{-1/2+ir}^{nN}(\pm \cos \gamma)} d\tau + O((1+u)^2 \ln(1+u)); \quad (2.35)$$

$$a_n^{(1)}(\tau, k) = \frac{\pi p_1}{2r_0} \tau i h \pi r e^{\pi \tau} \frac{H_{ir}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r_0}} P_{\frac{1}{2}+ir}(-\cos \gamma); \quad \Phi_{ir}^{nN} = \frac{D_{ir} \frac{1}{N|n|} (1 - \delta_n^{(1)})}{D_{ir} \delta_n^{(1)} + \frac{1}{N|n|} (1 - \delta_n^{(1)})} + \frac{1}{N} \left( \frac{1+u}{2} \right). \quad (2.36)$$

Здесь верхние знаки в аргументах присоединенных функций Лежандра относятся к области  $0 < \theta < \gamma$ , а нижние – к области  $\gamma < \theta < \pi$ .

Устремляя ширину щелей к нулю ( $u \rightarrow -1$ ) в интегральном представлении (2.35), получаем известные выражения для электрического потенциала Дебая в случае сплошного конуса [8]

$$U_{\text{Lsol}}^{(1)} = \int_0^{+\infty} \frac{H_{ir}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} a_0^{(1)}(\tau, k) \frac{P_{-1/2+ir}(\mp \cos \gamma) P_{-1/2-ir}(\pm \cos \theta)}{P_{-1/2+ir}(\cos \gamma) P_{-1/2-ir}(-\cos \gamma)} d\tau, \quad (2.37)$$

откуда следует, что рассеянное сплошным конусом поле обладает такой же поляризацией, как и независимое от азимутального угла падающее поле (2.1). При наличии же щелей рассеянное поле (ТМ-типа) имеет все компоненты, что свидетельствует об изменении поляризационной структуры поля.

Переходя к интегрированию по мнимой оси в (2.35), представим электрический потенциал Дебая в виде ряда вычетов по полюсам подынтегральной функции для поля вдали от щелей

$$U_1^{(1)} = -U_0^{(1)} + \frac{1}{N} (1+u) \frac{\pi i p_1}{r_0 \sqrt{r_0} r} \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon_n \cos nN\varphi \left\{ \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{\alpha_q^+ \bar{B}(\alpha_q^+, \nu_q^+)}{\frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma) \Big|_{\mu=\alpha_q^+}} \frac{P_{-1/2+\mu}(-\cos \theta)}{P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) \Big|_{\mu=\alpha_q^+}} \right\} + \left. \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\mu \bar{B}(\mu, \nu_m^{nN-})}{P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma)} \frac{P_{-1/2+\mu}(-\cos \theta)}{\frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) \Big|_{\mu=\alpha_m^{nN-}}} \right\} + O((1+u)^2 \ln(1+u)), \quad \gamma < \theta < \pi; \quad (2.38)$$

$$\bar{B}(\mu, \nu; r, r_0) = \begin{cases} \left(\frac{kr}{2}\right)^{\nu-\mu} J_\mu(kr) H_\mu^{(2)}(kr_0), & r < r_0, \\ \left(\frac{kr_0}{2}\right)^{\nu-\mu} J_\mu(kr_0) H_\mu^{(2)}(kr), & r > r_0; \end{cases} \quad \epsilon_n = \begin{cases} 1/2, & n = 0, \\ 1, & n \neq 0; \end{cases} \quad P_{\frac{1}{2}+\alpha_m^{nN+}}(\pm \cos \gamma) = 0,$$

где корни  $\alpha_m^{nN+}$  соответствуют верхнему знаку у аргумента присоединенной функции Лежандра, а корни  $\alpha_m^{nN-}$  – нижнему:

$$\Phi_\mu^{nN} \Big|_{\mu=\nu_q^{nN\pm}} = 0; \quad (2.39)$$

$$\nu_q^{nN\pm} = \alpha_q^{nN\pm} - \frac{1}{N} \left( \frac{1+u}{2} \right) \frac{(-1)^{nN} \cos \pi \mu}{\pi \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu + nN)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - nN)} \frac{d}{d\mu} [P_{-1/2-\mu}^{nN}(\cos \gamma) P_{-1/2-\mu}^{nN}(-\cos \gamma)] \Big|_{\mu=\alpha_q^{nN\pm}}} + O((1+u)^2);$$

$$\alpha_q^{nN\pm} \Big|_{n=0} = \alpha_q^\pm, \quad u = \cos \frac{l-d}{l} \pi.$$

Подставим выражение для  $U_1^{(1)}$  в (2.1) и получим асимптотическое разложение по параметру с точностью до членов порядка  $(1+u)^2 \ln(1+u)$  для рассеянного поля вдали от щелей. Выражение для  $E_{\theta 1}^{(1)}$  приводится ниже:

$$E_{\theta 1}^{(1)} = -E_{\theta 0}^{(1)} + \frac{\pi i p_1}{r r_0 \sqrt{r r_0}} \frac{1+u}{N} \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon_n \cos nN\varphi \left\{ \sum_{q=0}^{-\infty} \alpha_q^- \left( \frac{kr_0}{2} \right)^{\nu_q^- - \alpha_q^+} J_{\alpha_q^-} (kr_0) \frac{d}{dr} \left[ \sqrt{r} H_{\alpha_q^-}^{(2)} (kr) \right] \frac{d}{d\theta} P_{-\frac{1}{2} + \alpha_q^+}^{-nN} (-\cos \theta) \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{-\infty} \frac{\mu \left( \frac{kr_0}{2} \right)^{\nu_m^{nN} - \mu} J_{\mu} (kr_0) \frac{d}{dr} \left[ \sqrt{r} H_{\mu}^{(2)} (kr) \right] \frac{d}{d\theta} P_{-\frac{1}{2} + \mu}^{-nN} (-\cos \theta)}{P_{-1/2 + \mu}^{-nN} (\cos \gamma)} \right\}, \quad \gamma < \theta < \pi, \quad r > r_0. \quad (2.40)$$

Структура рассеянного конуса с узкими щелями поля такова, что в ней, помимо слагаемого, соответствующего полю для сплошного конуса, присутствуют слагаемые, обусловленные наличием щелей. Рассеянное поле в этом случае представляется бесконечным набором ТМ-волн эллиптической поляризации.

Спектр собственных значений исследуемой граничной задачи для конуса с узкими щелями состоит из корней  $\nu_q^{nN \pm}$  уравнения с малой правой частью

$$\frac{\pi}{\cos \pi \mu} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu + nN\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - nN\right)} P_{-1/2 + \mu}^{-nN} (\cos \gamma) P_{-1/2 + \mu}^{-nN} (-\cos \gamma) P_{-1/2 + \mu}^{-nN} (\cos \gamma) = -\frac{1}{N} (1+u), \quad nN \geq 1 \quad (2.41)$$

$$P (\cos \gamma) P_{-1/2 + \mu}^{-nN} (-\cos \gamma) + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu + nN\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - nN\right)} P_{-1/2 + \mu}^{-nN} (\cos \gamma) P_{-1/2 + \mu}^{-nN} (-\cos \gamma)$$

и представляет собой возмущенный щелями спектр собственных значений соответствующей граничной задачи для сплошного конуса [8]. Спектр для сплошного конуса определяется множеством корней  $\alpha_m^{P \pm}$  присоединенных функций Лежандра  $P_{-1/2 + \mu}^p (\pm \cos \gamma)$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ . Поведение поля вблизи острия ( $kr \ll 1$ ) для  $\gamma \leq \pi/2$  характеризуется наименьшим корнем  $\nu_0^-$  уравнения (2.41)

$$\nu_0^- = \alpha_0^- - \frac{1+u}{2N} \frac{\cos \pi \alpha_0^-}{\pi P_{-1/2 + \alpha_0^-}^{-nN} (\cos \gamma) \frac{d}{d\mu} P_{-1/2 + \mu}^{-nN} (-\cos \gamma) \Big|_{\mu = \alpha_0^-}} + O\left((1+u)^2\right),$$

причем электрическое поле при  $kr \ll 1$  имеет особенность порядка  $(kr)^{-3/2 + \nu_0^-}$ , а магнитное убывает как  $(kr)^{-1/2 - \nu_0^-}$  по мере приближения к вершине.

Учитывая (2.31), приходим к выводу, что наличие радиальных щелей увеличивает, по сравнению со сплошным конусом, особенность поля вблизи острия [71, 81].

Выражения (2.35), (2.38) были получены в предположении, что точка наблюдения находится вдали от щелей. В окрестности кромок щелей перпендикулярные ребру компоненты  $E$ - и  $H$ -полей должны иметь известную особенность [48, 49], в то время как параллельные ограничены.

Вблизи нерегулярности границы (кромки щелей, острие)  $E_{\theta}$  - составляющая поля, перпендикулярная кромке, характеризуется следующим выражением:

$$\tilde{A}_N (kr)^{-3/2 - \nu_0^-} \left\{ -1 + \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left[ \frac{1 - \tilde{t}}{\sqrt{\tilde{t}^2 + 2u\tilde{t} + 1}} \right] \right\}, \quad 0 < \theta < \gamma, \quad r < r_0, \quad \tilde{t} = \left( \frac{\operatorname{tg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \gamma / 2} e^{-i\varphi} \right)^N \quad (2.42)$$

Анализ (2.42) показал, что перпендикулярные кромке щели компоненты электромагнитного поля вблизи ребра по  $\theta$  ведут себя как  $(\gamma - \theta)^{-1/2}$ . Поведение же радиальной составляющей электрического поля (параллельной кромке) определяется слагаемым

$$B_N^* (kr)^{-3/2 + \nu_0^-} \ln \left| 1 - \tilde{t} + \sqrt{\tilde{t}^2 + 2u\tilde{t} + 1} \right|, \quad 0 < \theta < \gamma, \quad r < r_0, \quad (2.43)$$

где  $\tilde{A}_N$  и  $B_N^*$  - известные коэффициенты.

В случае конуса с одной узкой щелью ( $N = 1$ ) для азимутальной составляющей электрического поля в щели имеет место выражение

9)  
)

$$E_{\text{ext}} = -\frac{1}{\sin \gamma} \frac{\sqrt{2\pi} p_1}{r r_0 \sqrt{r_0}} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos \varphi - \cos d/2}} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{\alpha_q^+ \left(\frac{kr_0}{2}\right)^{\mu_q^+ - \alpha_q^+} J_{\alpha_q^+}(kr_0)}{\frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma) \Big|_{\mu=\alpha_q^+}} \frac{d}{dr} \left[ \sqrt{r} H_{\alpha_q^+}^{(2)}(kr) \right] \left[ 1 + O(1+u) \right],$$

$\theta = \gamma, r > r_0, |\varphi| < d/2.$  (2.44)

(2.40) Из (2.44) следует, что у кромки щели тангенциальная составляющая электрического поля имеет особенность порядка  $\left((d/2)^2 - \varphi^2\right)^{-1/2}$ , что вполне согласуется с условием на ребре в форме Мейкснера [48–50].

Важным и интересным случаем рассматриваемой задачи является задача рассеяния волн плоским угловым сектором. Выражения для потенциала Дебая  $U_1^{(1)}$  при возбуждении плоскости с узким вырезом получаются из (2.35), полагая  $N = 1$  и  $\gamma = \pi/2$

ответ-  
сеянное

состоит

$$U_1^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{a_0^{(1)}(\tau, k)}{D_{i\tau} - \ln \frac{1-u}{2}} \Gamma\left(\frac{1+i\tau}{4} + \frac{i\tau}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-i\tau}{4} - \frac{i\tau}{2}\right) P_{-1/2+i\tau}(\pm \cos \theta) d\tau - \frac{(1+u)}{2N} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{a_0^{(1)}(\tau, k)}{D_{i\tau} + \frac{1-\delta_n^{(1)}}{|n|}} \frac{1}{\delta_n^{(1)}} \frac{1}{\Phi_{i\tau}^n} \Gamma\left(\frac{1+i\tau-n}{4} + \frac{i\tau}{2} - \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-i\tau-n}{4} - \frac{i\tau}{2} - \frac{n}{2}\right) P_{1/2+i\tau}^n(\pm \cos \theta) d\tau +$$

$$+ O\left((1+u)^2 \ln(1+u)\right),$$

(2.41) (2.45)

ничной  
й  $\alpha_m^{p\pm}$   
острия

$$a_0^{(1)} = \frac{p_1}{4\sqrt{\pi} r_0} \tau \operatorname{sh} \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r_0}} \Gamma\left(\frac{1+i\tau}{4} + \frac{i\tau}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-i\tau}{4} - \frac{i\tau}{2}\right).$$

В отличие от конуса с узкой щелью, у вершины которого поле имеет большую особенность по сравнению со сплошным, в случае плоскости с узким вырезом особенность поля появляется и характеризуется при  $kr \ll 1$  слагаемым порядка  $(kr)^{\zeta}$  [71, 81], где  $\zeta = -\left(\frac{1+u}{2}\right) + O\left((1+u)^2\right)$ .

**Коническая поверхность, состоящая из узких секторов.** Диполь расположен внутри и на оси конуса ( $\theta_0 = 0, \varphi_0 = 0$ ). Под узкими секторами подразумеваются секторы, угловая ширина которых мала по сравнению с периодом структуры  $((l-d)/l \ll 1, 1-u \ll 1)$ . В этом случае

нию со  
вдали  
южны

$$x_{\tau}^{(1)} \approx -\frac{N}{\ln \frac{1-u}{2}} (-1)^n \frac{a_0^{(1)}(\tau, k)}{D_{i\tau} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{|p|} \delta_p^{(1)}} \frac{1}{|n|} (1-\delta_n^{(1)}) \frac{1}{F_{i\tau}}, \quad F_{i\tau} = \frac{1}{D_{i\tau} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{|p|} \delta_p^{(1)}} - \frac{1}{N \ln \frac{1-u}{2}},$$

в асимптотическое разложения потенциала Дебая по малому параметру  $(1-u)$  с точностью до членов порядка  $O\left((1-u)/\ln(1-u)\right)$  имеет вид

(2.42) (2.46)

$$U_1^{(1)} = -\frac{1}{\ln \frac{1-u}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{a_0^{(1)}(\tau, k)}{F_{i\tau} \left( D_{i\tau} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{|p|} \delta_p^{(1)} \right)} \frac{1}{|n|} (1-\delta_n^{(1)}) \frac{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\pm \cos \theta)}{P_{-1/2-i\tau}^{nN}(\pm \cos \gamma)} d\tau.$$

Здесь знак “+” соответствует области  $0 < \theta < \gamma$ , а “-”  $\gamma < \theta < \pi$ .

Интегральное представление (2.46) справедливо для поля вдали от кромок секторов. Поле, рассеянное конической поверхностью из  $N$  узких секторов, является полем эллиптической поляризации ТМ-типа. При сужении конических секторов ( $u \rightarrow 1$ ) рассеянное поле (2.46) убывает пропорционально

(2.43)  $1/\ln\left(\frac{1-u}{2}\right)$ , при этом спектр собственных значений определяется корнями уравнения

го поля

$$\frac{\cos \pi \mu}{\pi P_{-1/2-\mu}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) - \cos \pi \mu \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{|p|} \delta_{p,2}^{(1)}} = \frac{1}{N \ln \frac{1-u}{2}}, \quad (2.47)$$

которые находятся вблизи корней  $\cos \pi \mu = 0$ :

$$\mu_q = \frac{1}{2} + q - \frac{1}{N \ln \frac{1-u}{2}} \left\{ [P_q(\cos \gamma)]^2 + N \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{1+q}{N} \rfloor} \frac{(q+pN)!}{(q-pN)!} [P_q^{-pN}(\cos \gamma)]^2 \right\} + O(\ln^{-2}(1-u)), \quad q=0, 1, 2, \dots;$$

под  $\left[ \frac{1+q}{N} - 1 \right]$  понимается целая часть  $\frac{1+q}{N} - 1$ .

Первый корень  $\mu_0$  уравнения (2.47) характеризует поведение поля вблизи острия конуса, при этом электрическое поле у вершины имеет особенность порядка  $(kr)^{3/2-\mu_0}$ , а магнитное убывает как  $(kr)^{-1/2-\mu_0}$  по мере приближения к вершине, где

$$\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{N \ln \frac{1-u}{2}} + O(\ln^{-2}(1-u)). \quad (2.48)$$

Приведем здесь слагаемое, характеризующее распределение  $E_\theta$  составляющей поля вблизи острия

$$E_\theta^* = -\frac{1}{\ln \frac{1-u}{2}} A_1^* \left( \frac{kr}{2} \right)^{-3/2+\mu_0} G^*(\theta, \varphi), \quad (2.49)$$

где

$$G^*(\theta, \varphi) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sin \theta} \left[ -1 + \operatorname{Re} \left( \frac{1 - b_N e^{iN\varphi}}{\sqrt{b_N^2 e^{2iN\varphi} + 2e^{iN\varphi} b_N \cos \tilde{\delta} + 1}} \right) \right], & 0 < \theta < \gamma; \\ \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sin \theta} \left[ -1 + \operatorname{Re} \left( \frac{1 - c_N e^{iN\varphi}}{\sqrt{c_N^2 e^{2iN\varphi} + 2e^{iN\varphi} c_N \cos \tilde{\delta} + 1}} \right) \right], & \gamma < \theta < \pi, \end{cases}$$

$$\tilde{\delta} = \frac{\ell - d}{\ell}; \quad b_N = \left( \frac{\operatorname{tg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \gamma / 2} \right)^N; \quad c_N = \left( \frac{\operatorname{ctg} \theta / 2}{\operatorname{ctg} \gamma / 2} \right)^N; \quad A_1^* - \text{известный множитель.}$$

Из (2.49) следует, что особенность у электрического поля вблизи острия появляется при  $|kr| \ll 2 \exp(-\ln \alpha_N / (1 - \alpha_N))$ , где  $\alpha_N = -N / \ln \left( \frac{1-u}{2} \right)$ , а  $\max_{\theta, \varphi} |G^*|$  достигается на секторах.

Волна, соответствующая собственному значению  $\mu_0$  в области между вершиной и источником  $r < r_0$  является стоячей, а при  $r > r_0$  бегущей волной. Причем, когда источник находится в точках  $kr_0 = n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$  поле этой волны пренебрежительно мало в области  $r > r_0$ . В случае близкого расположения источника к вершине ( $kr_0 \ll 1$ ) рассеянное конической поверхностью поле характеризуется полем соответствующей собственному значению бегущей волны. Анализ аналитического решения в таком приближении показал, что максимум поля достигается на каждом секторе. Таким образом, волна с собственным значением  $\mu_0$  является бегущей волной ( $kr_0 \ll 1$ ), распространяющейся вдоль каждого из секторов и по этой причине в дальнейшем будем называть ее секториальной.

**Численное решение.** Численное решение исходной электродинамической задачи основано на численном решении СЛАУ-2 (2.13), (2.14), которое проводится методом редукции (усечения) для произвольных параметров задачи. Однако для частных случаев полупрозрачного конуса, узких щелей, конуса с ма-

(2.47) лым углом раствора, узких конических секторов целесообразнее воспользоваться методом последовательных приближений и найти асимптотическое решение задачи. Коэффициенты  $x_n$ , являющиеся решением СЛАУ-2, зависят от ширины щели  $d$  и их числа, угла полураствора конуса  $\gamma$  и параметра интегрирования  $\tau$  в интеграле Конторовича–Лебедева, причем  $|x_n| \leq 1, \forall n$ .

2...; Рассмотрим случай осесимметричного возбуждения ( $\theta_0 = \pi, \varphi_0 = 0$ ) конуса с одной щелью ( $N = 1$ ) и проанализируем поведение искомых коэффициентов от угловых размеров  $d$  и  $\gamma$  при  $\tau = 1$  на примере  $x_0, x_1, x_2, x_3$ . Графики зависимостей абсолютных величин коэффициентов от этих параметров приведены на рис.2.2 – 2.5. Следует отметить, что при осесимметричном возбуждении сплошного идеально проводящего конуса  $x_0 = 1$ , а  $x_n = 0$  для  $n \neq 0$  [8].

и этом (2.48) На рис.2.2 даны графики функции  $|x_0(d)|$  при различных фиксированных значениях  $\gamma$ . При увеличении ширины щели функция  $|x_0(d)|$  сначала убывает, достигая в окрестности точки  $d = 180^\circ$  своего локального минимума, а затем возрастает и имеет размытый локальный максимум вблизи значения  $d = 250^\circ$ . При дальнейшем увеличении ширины щели убывает до нуля. Поведение  $|x_0(d)|$  при малых  $d$  (узкие щели) и близких к  $360^\circ$  хорошо согласуется с асимптотиками для  $x_0$  в случае узких щелей и узких секторов. Сравнение  $|x_0(d)|$  при конкретных  $d$  показывает, что с увеличением угла  $\gamma$  их значения уменьшаются.

(2.49) Графики функции  $|x_1(d)|$  для конкретных фиксированных  $\gamma$  приведены на рис.2.3. Кривые при каждом значении  $\gamma$  имеют резко выраженный максимум в некоторой окрестности точки  $d = 180^\circ$  (в отличие от  $|x_0(d)|$ ) и одну точку перегиба в промежутке возрастания. Из сравнения кривых на рис.2.3 – 2.5. приходим к выводу, что величины  $|x_n|$  с ростом номера  $n$  уменьшаются (свойство коэффициентов Фурье), а число локальных максимумов каждой кривой совпадает с номером соответствующего коэффициента.

и при (2.50) На рис.2.6 и 2.7 приведены зависимости  $|x_n|, n = 1, 2, 3$  от угла  $\gamma$  при конкретных фиксированных  $d$ . Из рис.2.6 видно, что при уменьшении ширины щели график  $|x_0(\gamma)|$  приближается к величине  $|x_0(\gamma)| = 1$ . Это объясняется, в частности, и тем, что коэффициент  $x_0$  связан с отражательными свойствами конической поверхности и принимает наибольшее значение в случае сплошного(замкнутого) конуса. Принимая во внимание это замечание, становится понятным поведение  $|x_1(\gamma)|$  на рис.2.7, где коэффициент  $x_1$  связан с прохождением поля через щель конуса.

$r < r_0$  Диаграммы рассеяния в азимутальной плоскости для конуса с одной щелью ( $N = 1, \theta_0 = \pi, \varphi_0 = 0, kr_0 = 1, \gamma = \pi/8, \theta = \pi/4 + \pi/20$ ) в зависимости от ширины щели даны на рис.2.8. Ось щели соответствует значению азимутального угла  $\varphi = 0^\circ$ .

и ис- Из приведенных диаграмм следует, что при таком способе возбуждения заметное влияние щели проявляется при  $d > 10^\circ$ . По мере увеличения угловых размеров щели изменяется и форма диаграмм (рис.2.8,а,б,в,г,д). Диаграмма на рис.2.8,е соответствует случаю “срезанного вдоль напополам” конуса и значению  $d$ , для которого  $|x_0(d)|$  имеет минимум (рис.2.2). По мере расширения щели рассматриваемая структура превращается в конический сектор, для которого диаграммы рассеяния даны на рис.2.8,ж,з,и,к,л.

а чис- зволь- с ма-

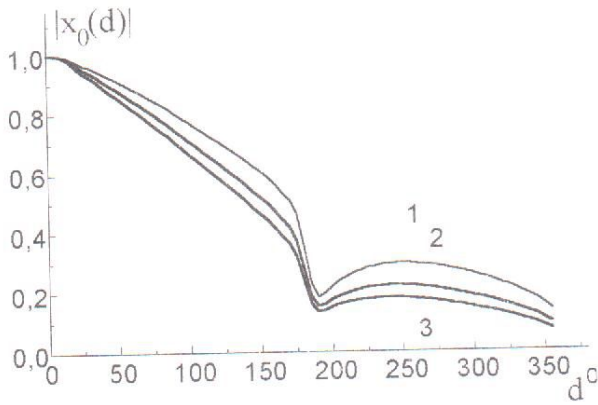


Рис.2.2. Графики зависимости  $|x_0|$  от ширины щели  $d^0$  при фиксированном  $\gamma$ :

$$1 - \gamma = \frac{\pi}{8}; 2 - \gamma = \frac{\pi}{4}; 3 - \gamma = \frac{\pi}{2}$$

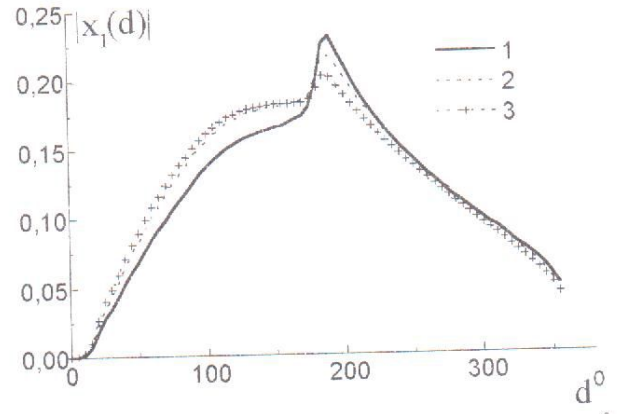


Рис.2.3. Графики зависимости  $|x_1|$  от ширины щели  $d^0$  при фиксированном  $\gamma$ :

$$1 - \gamma = \frac{\pi}{8}; 2 - \gamma = \frac{\pi}{4}; 3 - \gamma = \frac{\pi}{2}$$

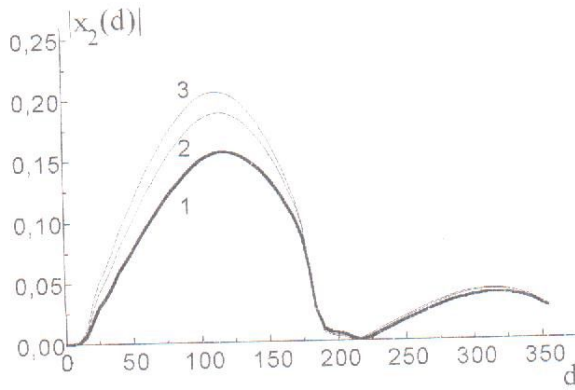


Рис.2.4. Графики зависимости  $|x_2|$  от ширины щели  $d^0$  при фиксированном  $\gamma$ :

$$1 - \gamma = \frac{\pi}{8}; 2 - \gamma = \frac{\pi}{4}; 3 - \gamma = \frac{\pi}{2}$$

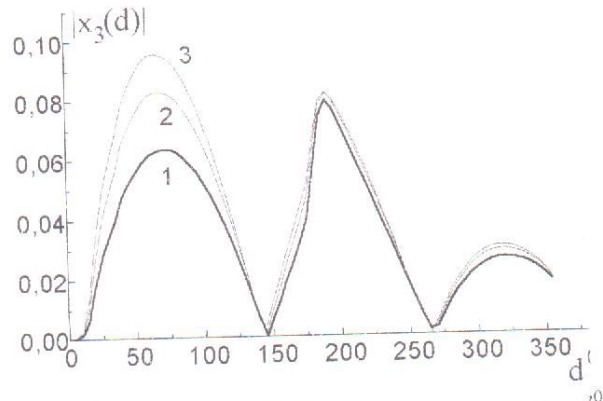


Рис.2.5. Графики зависимости  $|x_3|$  от ширины щели  $d^0$  при фиксированном  $\gamma$ :

$$1 - \gamma = \frac{\pi}{8}; 2 - \gamma = \frac{\pi}{4}; 3 - \gamma = \frac{\pi}{2}$$

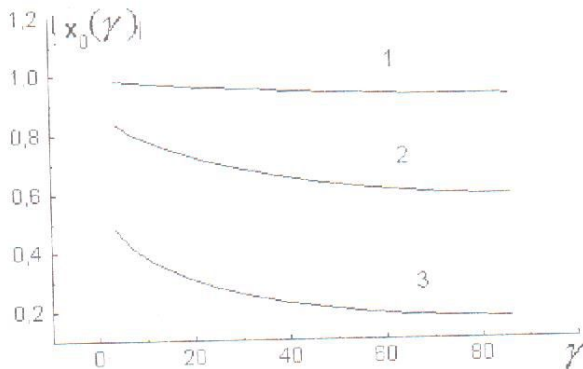


Рис.2.6. Графики зависимости  $|x_0|$  от угла раствора конуса  $\gamma$  при фиксированной ширине щели  $d^0$ :

$$1 - d = 30^0; 2 - d = 120^0; 3 - d = 270^0$$

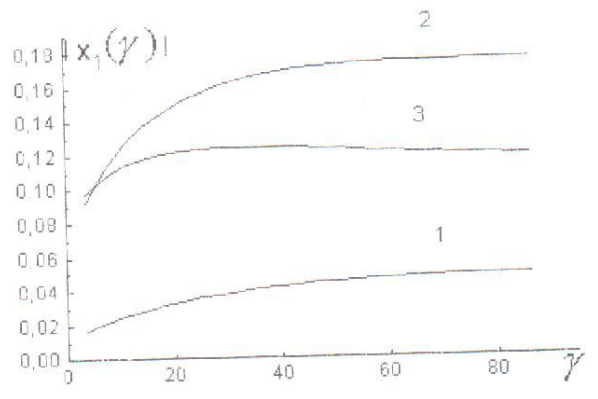


Рис.2.7. Графики зависимости  $|x_1|$  от угла раствора конуса  $\gamma$  при фиксированной ширине щели  $d^0$ :

$$1 - d = 30^0; 2 - d = 120^0; 3 - d = 270^0$$

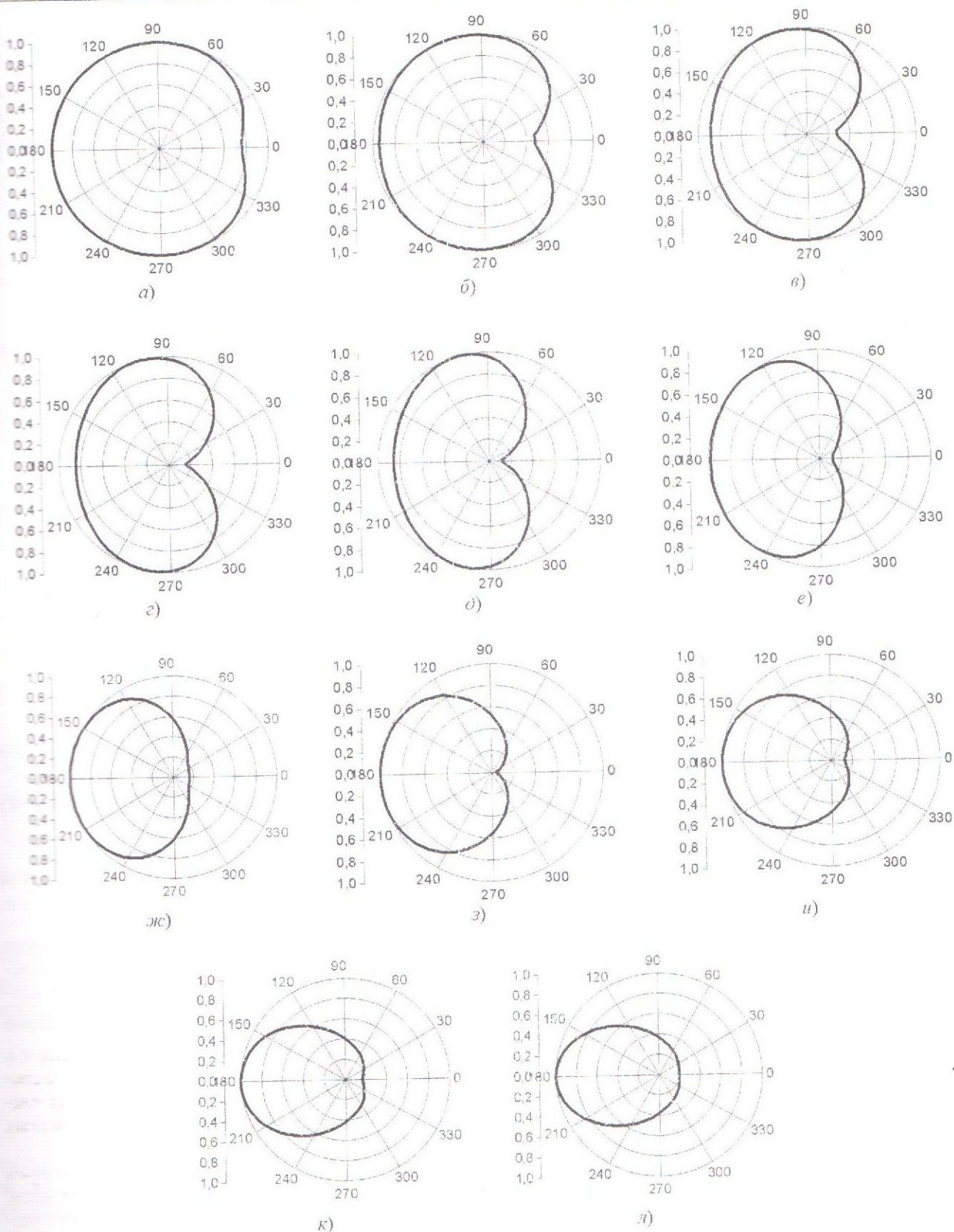


Рис. 2.8. Диаграммы рассеяния конуса с одной целью ( $N = 1$ )  $\gamma = \pi/8$ :

$a - d = 30^\circ$ ;  $b - d = 60^\circ$ ;  $v - d = 90^\circ$ ;  $z - d = 120^\circ$ ;  $d - d = 150^\circ$ ;  $e - d = 180^\circ$ ;  $ж - d = 210^\circ$ ;  
 $з - d = 240^\circ$ ;  $и - d = 270^\circ$ ;  $к - d = 300^\circ$ ;  $л - d = 330^\circ$

Следует отметить, что интегралы в (2.4), (2.23), (2.24), (2.35), (2.46) при чисто мнимом волновом числе  $k$  сходятся при любых соотношениях параметров задачи [24, 32]. Если волновое число не является чисто мнимым, то интегралы сходятся вне зоны зеркального отражения от поверхности конуса [8, 22, 24, 32]. Для исследования поля в зоне зеркального отражения следует воспользоваться процедурой выделения вклада от зеркально отраженных лучей [32], где диаграммы рассеяния строились вне зоны зеркального отражения.

### 2.3. Рассеяние поля магнитного диполя на конусе с продольными щелями

После преобразований, аналогичных тем, которые проводились в случае электрического диполя, система функциональных соотношений (2.5), (2.6) запишется в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n}^{(2)} e^{in\psi_1} = e^{im_0\psi_1}, \quad \frac{\pi d}{l} < |\psi_1| \leq \pi; \quad (2.50)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(2)}) x_{m,n}^{(2)} e^{in\psi_1} = 0, \quad |\psi_1| < \frac{\pi d}{l} \quad (2.51)$$

с дополнительным условием

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n+v} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(2)}) x_{m,n}^{(2)} = 0, \quad (2.52)$$

где  $\psi_1 = N\varphi$ ,  $\varepsilon_{m,n}^{(2)}$  определяется в (2.7),  $v = \frac{m}{N} - m_0$ .

Используя метод задачи Римана-Гильберта, сведем уравнения (2.50) и (2.51) с дополнительным условием (2.52) к СЛАУ-2 фредгольмовского типа относительно  $x_{m,n}^{(2)}$  получим

$$x_{m,n}^{(2)} - \delta_n^{m_0} = -\frac{|m_0|}{m_0} (1 - \varepsilon_{m,m_0}^{(2)}) V_{n-1}^{m_0-1}(u_1) + \sum_{p=0}^{\infty} (x_{m,p}^{(2)} - \delta_p^{m_0}) \frac{|p|}{p} \varepsilon_{m,p}^{(2)} V_{n-1}^{p-1}(u_1) + \\ + (x_{m,0}^{(2)} - \delta_0^{m_0}) [P_n(u_1) + \varepsilon_{m,0}^{(2)} V_{n-1}^{-1}(u_1)], \quad n \neq 0; \quad (2.53)$$

$$\frac{2P_{v-1}(-u_1)}{P_v(-u_1) + P_{v-1}(-u_1)} (x_{m,0}^{(2)} - \delta_0^{m_0}) = -v \frac{|m_0|}{m_0} (1 - \varepsilon_{m,m_0}^{(2)}) V^{m_0}(u_1) + v \sum_{p=-\infty}^{\infty} (x_{m,p}^{(2)} - \delta_p^{m_0}) \frac{|p|}{p} \varepsilon_{m,p}^{(2)} V^p(u_1), \quad (2.54)$$

где  $\delta_n^{m_0}$  – символ Кронекера,  $\delta_n^{m_0} = \begin{cases} 0, & n \neq m_0, \\ 1, & n = m_0; \end{cases}$   $u_1 = \cos \frac{\pi d}{l}$ ; функции  $V_{n-1}^{m_0-1}(u_1)$  и  $V^n(u_1)$  определены в (2.15) и (2.16) соответственно.

Неизвестные коэффициенты, являющиеся решением СЛАУ-2 (2.53) и (2.54), не зависят от волнового числа, что делает удобным получение коротковолновой асимптотики решения задач, а также выяснение поведения поля вдали от вершины конуса. Как и в случае электрического диполя, задача о нахождении магнитного потенциала Дебая  $U_p^{(2)}$  сводится к решению СЛАУ-2 (2.53), (2.54), матричный оператор которой является вполне непрерывным, причем обоснование разрешимости СЛАУ-2 (2.53), (2.54) такое же, как и в случае возбуждения электрическим диполем. При любых параметрах рассматриваемой задачи решение системы (2.53), (2.54) может быть получено методом редукции, а в случае полупрозрачного конуса, когда число щелей велико и их ширина мала по сравнению с периодом структуры узких щелей, узких конических секторов, конуса с малым углом раствора также методом последовательных приближений.

Следует отметить, что при возбуждении сплошного идеально проводящего полубесконечного конуса магнитным радиальным диполем [8] плотность поверхностного тока, наведенного на поверхности сплошного конуса, имеет только азимутальную составляющую в то время, как наличие продольных щелей приводит к появлению и радиальной составляющей.

Составляющие плотности поверхностного тока выражаются через коэффициенты  $x_{m,n}^{(2)}$  следующим образом:

$$j_\varphi = -\frac{2 \sin \gamma}{r \sqrt{r}} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \int_0^{+\infty} (\tau^2 + 1/4) a_m^{(2)}(\tau, k) H_{\tau}^{(2)}(kr); \quad x_{m,n}^{(2)} \frac{1}{N(n+v)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(2)}) e^{i(n+v)N\varphi} d\tau; \quad (2.55)$$

$$E = -\frac{2i}{r} \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} a_m^{(2)}(\tau, k) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sqrt{r} H_{\tau}^{(2)}(kr) \right]; \quad x_{m,n}^{(2)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(2)}) e^{i(n+\nu)N\varphi} d\tau, \quad \frac{\pi d}{l} \ll |N\varphi| \leq \pi. \quad (2.56)$$

**Аналитическое решение в частных случаях конической поверхности.** Аналитическое решение задачи возбуждения основывается на аналитическом решении СЛАУ-2 (2.53), (2.54) для полупрозрачного конуса, конуса с узкими щелями, конуса с малым углом раствора и конической поверхностью, образованной узкими коническими секторами. Для нахождения аналитического решения СЛАУ-2 (2.53), (2.54) используется метод последовательных приближений

**Полупрозрачная коническая структура.** В предельном случае полупрозрачного конуса, который получается при существовании предела

$$W = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d/l \rightarrow 0}} \left[ -\frac{1}{N} \ln \sin \frac{\pi d}{2l} \right]$$

(2.50) выводим решение граничной задачи в следующем виде:

$$U_p^{(2)} = \frac{\pi p_2}{r_0} W \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{im(\varphi - \varphi_0)} \int_0^{\infty} \frac{\tau \ln \pi \tau e^{\pi \tau}}{\frac{1}{m} (1 - \varepsilon_{m,0}^{(2)}) + 2W} \frac{\Gamma(1/2 - m + i\tau)}{\Gamma(1/2 + m + i\tau)} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r_0}} \times$$

$$\times \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{d}{dy} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta_0) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta) d\tau, \quad \gamma < \theta < \pi. \quad (2.57)$$

(2.52) Аналогично и для  $0 < \theta < \gamma$ . На поверхности  $\theta = \gamma$  компоненты электромагнитного поля удовлетворяют усредненным граничным условиям

$$E_{\varphi} = E_{\varphi}^+; \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (r E_{\varphi}) = \frac{ik}{4W \sin \gamma} \tilde{H}_r. \quad (2.58)$$

Полученные граничные условия (2.58) согласуются с [42, 47].

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда источник находится на оси конической поверхности ( $\varphi_0 = 0, \theta_0 = \pi$ ). Приведем выражение (2.57) при таком способе возбуждения:

$$U_p^{(2)} = -\frac{\pi p_2}{r_0 \sqrt{r r_0}} W \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\mu T_{\mu}(r, r_0)}{\tilde{\Delta}_{\mu} \cos \pi \mu} \frac{P_{1/2-\mu}^{-1}(\cos \gamma)}{P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} P_{-1/2-\mu}^{-1}(-\cos \theta) d\mu, \quad \gamma < \theta < \pi, \quad (2.59)$$

(2.54) где  $T_{\mu}(r, r_0)$  определяется (2.28).

Используя теорему Коши, можно представить  $U_p^{(2)}$  (2.59) в виде ряда вычетов по полюсам подынтегральной функции. После подстановки этого выражения для  $U_p^{(2)}$  в (2.2) получим представление для компонент поля в виде ряда.

Следует отметить, что рассеянное поле, как и поле магнитного диполя, расположенного на оси структуры, имеет три составляющие  $E_{\varphi p}, H_{rp}, H_{\theta p}$  и, таким образом, обладает линейной поляризацией. Здесь приводится выражение для одной из составляющих поля, так как для остальных двух выражения аналогичны

$$H_{\theta p}^{(2)} = -H_{\theta,0}^{(2)} + \frac{2\pi^2 i p_2}{r r_0 \sqrt{r_0}} W \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tilde{\mu}_n (\tilde{\mu}_n^2 - \frac{1}{4})}{\cos \pi \mu \frac{d}{d\mu} \tilde{\Delta}_{\mu} \Big|_{\mu=\tilde{\mu}_n}} \frac{d}{dr} \left( \sqrt{r} T_{\tilde{\mu}_n}(r, r_0) \right) P_{-1/2+\tilde{\mu}_n}^{-1}(\cos \theta), \quad 0 < \theta < \gamma, \tilde{\Delta}_{\tilde{\mu}_n} = 0. \quad (2.60)$$

Суммирование в (2.60) проводится по корням  $\tilde{\Delta}_{\mu} = 0$ , которые и определяют в данном случае спектр собственных значений рассматриваемой граничной задачи. В частности, эти собственные значения, зависящие от угла раствора конуса и параметра заполнения  $W$ , характеризуют поведение поля вблизи острия.

Рассмотрим корни  $\tilde{\Delta}_{\mu} = 0$  в двух частных случаях полупрозрачного конуса, когда  $W \ll l$  и  $W \sin^2 \gamma \gg l$ . При малых  $W$  корни уравнения с малой правой частью

$$\frac{\cos \pi \mu}{\pi \sin^2 \gamma (\mu^2 - \frac{1}{4})^2} P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) = -2W \quad (2.61)$$

находятся вблизи корней  $\cos \pi \mu_p = 0, \mu_p = \frac{1}{2} + p, p = 1, 2, \dots$  (точка  $\mu = 1/2$  исключается)

$$\tilde{\mu}_n = \frac{1}{2} + n - 2W \sin^2(\gamma) n^2(n+1)^2 [P_n^{-1}(\cos\gamma)]^2 + O(W^2), \quad n=1,2,\dots \quad (2.62)$$

В этом случае полупрозрачного конуса поведение рассеянного поля вблизи острия ( $kr \ll 1$ ) определяется наименьшим корнем уравнения (2.61)  $\tilde{\mu}_1$  из (2.62); причем магнитное поле имеет особенность порядка  $(kr)^{-2W \sin^4 \gamma}$ , в то время как электрическое – ограничено.

Плотность поверхностного тока, наведенного на полупрозрачном конусе, имеет только азимутальную составляющую (2.55)

$$j_\varphi = \frac{4\pi i W p_2}{\sin \gamma r r_0 \sqrt{r r_0}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tilde{\mu}_n T_{\tilde{\mu}_n}(r, r_0)}{P_{-1/2+\tilde{\mu}_n}^{-1}(\cos\gamma) \frac{d}{d\mu} \tilde{\mu}_n \Big|_{\mu=\tilde{\mu}_n}}$$

В случае полупрозрачного конуса, когда  $W \sin^2 \gamma \gg 1$  множество корней уравнения

$$\frac{\pi \sin^2 \gamma (\mu^2 - \frac{1}{4})^2}{\cos \pi \mu} P_{-1/2-\mu}^{-1}(\cos\gamma) P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos\gamma) = -\frac{1}{2W} \quad (2.63)$$

представляет собой возмущенный спектр собственных значений граничной задачи Неймана для магнитного потенциала Дебая при возбуждении сплошного конуса магнитным радиальным диполем [8].

Таким образом, интересующие корни уравнения (2.63) (замыкание контура интегрирования производится в области  $\text{Re } \mu > 0$ ) находятся в окрестности нулей функций  $P_{-1/2+\mu}^{-1}(\pm \cos\gamma)$ , а также точки  $\mu = 1/2$ .

$$\eta_n^+ = \alpha_n^{1-} - \frac{1}{2W} \frac{\cos \pi \alpha_n^{1\pm}}{\pi \sin^2 \gamma (\mu^2 - \frac{1}{4}) \frac{d}{d\mu} \left[ P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos\gamma) P_{-1/2-\mu}^{-1}(-\cos\gamma) \right]_{\mu=\alpha_n^{1\pm}}} + O(W^{-2});$$

$$\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2W \sin^2 \gamma} + O(W^{-2}); \quad P_{-1/2-\alpha_n^{1+}}^{-1}(\cos\gamma) = 0; \quad P_{-1/2-\alpha_n^{1-}}^{-1}(-\cos\gamma) = 0.$$

Магнитное поле вблизи острия конуса имеет особенность порядка  $(kr)^{-1+1/2W \sin^2 \gamma}$ , а электрическое ограничено [70, 71].

Следует отметить, что составляющие магнитного поля, рассеянного сплошным конусом у вершины, ведут себя как  $(kr)^{-1-\nu(\gamma)}$ , где  $\nu(\gamma)$  – наименьший из корней  $P_\nu^{-1}(-\cos\gamma) = 0$ , которые все вещественны и больше единицы. В структуре рассеянного поля при  $W \sin^2 \gamma \gg 1$  кроме слагаемого, соответствующего полю для сплошного конуса, появляется обусловленная наличием щелей волна, которая и характеризует отмеченную выше особенность. В случае близкого расположения источника к вершине соответствующее волне слагаемое определяет распределение рассеянной энергии по углам наблюдения.

Радиальная составляющая вектора Умова–Пойтинга этой волны имеет вид

$$S_r = \frac{p_2^2 C |k|^4 \tilde{\beta} \text{tg}^4 \frac{\gamma}{2}}{108 \pi W^2 \sin^4 \gamma r^2} \text{ctg}^2 \frac{\theta}{2} [1 + O(W^{-1})], \quad r > r_0, \quad \gamma < \theta < \pi, \quad (2.64)$$

где  $\tilde{\beta}$  – известный коэффициент.

Аналогичное выражение имеет место и для  $0 < \theta < \gamma$ .

Из (2.64) следует, что в случае полупрозрачного конуса при  $kr_0 \ll 1$  максимум потока энергии направлен вдоль поверхности  $\theta = \gamma$ .

**Решение для конуса с узкими щелями. Щелевая волна.** В случае узких щелей ( $d/l \ll 1$ ,  $1-u_1 \ll 1$ ) решение СЛАУ-2 (2.53), (2.54) находится с помощью метода последовательных приближений. После подстановки найденных асимптотик для коэффициентов Фурье по малому параметру  $(1-u_1)$  в (2.4) получаем асимптотическое разложение магнитного потенциала Дебая по соответствующему параметру малости для поля вдали от щелей

$$U_p^{(2)} = \int_0^{+\infty} \frac{H_{it}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \left[ \tilde{B}_{it} - \frac{1}{N} \sum_{p=0} \frac{1}{|p|} \varepsilon_p^{(2)} \right] \tilde{\Phi}_{it} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}(\pm \cos\theta) P_{-1/2-i\tau}(\pm \cos\gamma) d\tau +$$

(2.62) пределы по-  
уаль-

$$\frac{1}{N \ln \frac{1-u_1}{2}} \left\{ \frac{1}{N} \int_0^{-x} \frac{H_{ir}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} a_0^{(2)}(\tau, k) \left[ \tilde{B}_{ir} - \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{|p|} \varepsilon_p^{(2)} \right] \tilde{\Phi}_{ir} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+ir}(\pm \cos \theta) d\tau + \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{(2)} \int_0^{-x} \frac{H_{ir}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} a_0^{(2)}(\tau, k) \frac{P_{-1/2+ir}^{nN}(\pm \cos \theta)}{\left[ 1 - \frac{1}{N} \frac{1}{\tilde{B}_{ir}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{|p|} \varepsilon_p^{(2)} \right] \tilde{\Phi}_{ir} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+ir}(\pm \cos \gamma)} d\tau \right\} + O\left(\frac{1-u_1}{\ln(1-u_1)}\right); \quad (2.65)$$

(2.63) Устремляя ширину щелей в разложении (2.65) к нулю ( $u_1 \rightarrow 1$ ), приходим к выражениям для магнитного потенциала Дебая в случае возбуждения сплошного конуса [8].  
Представим асимптотические разложения (2.65) в (2.2) и представим в виде ряда составляющие поля, в которых определяется следующим образом:

$$\tilde{B}_{ir} = \frac{1}{N|p|} (1 - \varepsilon_n^{(2)}) \Big|_{n=0}; \quad \tilde{\Phi}_{ir} = \frac{1/\tilde{B}_{ir}}{1 - \frac{1}{N} \frac{1}{\tilde{B}_{ir}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{|p|} \varepsilon_p^{(2)}} - \frac{1}{N \ln \frac{1-u_1}{2}}.$$

Устремляя ширину щелей в разложении (2.65) к нулю ( $u_1 \rightarrow 1$ ), приходим к выражениям для магнитного потенциала Дебая в случае возбуждения сплошного конуса [8].

Представим асимптотические разложения (2.65) в (2.2) и представим в виде ряда составляющие поля, в которых определяется следующим образом:

(2.64) 
$$\tilde{H}_{\beta_m}^{(2)} = -H_{\beta_m}^{(2)} + \frac{\pi^2 i p_2}{r r_0 \sqrt{r_0}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{kr_0}{2}\right)^{\tilde{\mu}_m - \beta_m} \frac{\beta_m (\beta_m^2 - 1/4)}{\cos \pi \beta_m} J_{\beta_m}(kr_0) \frac{d}{dr} (\sqrt{r} H_{\beta_m}^{(2)}(kr)) \times \\ \times \frac{P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma)}{\frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} \Big|_{\mu=\beta_m} P_{-1/2+\beta_m}^{-1}(-\cos \theta) + \frac{ikp_2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{2 \sin^2 \gamma} \frac{1}{N \ln \frac{1-u_1}{2}} \left(\frac{kr_0}{2}\right)^{-3/2+\xi} \frac{\sin kr_0}{r_0} \times \\ \times \frac{e^{-i\theta}}{r} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \frac{1}{N \ln \frac{1-u_1}{2}} \frac{\pi i p_2}{r r_0 \sqrt{r_0}} \left\{ \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{kr_0}{2}\right)^{\tilde{\mu}_m - \beta_m} \frac{\mu J_{\mu}(kr_0)}{\left[ \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) \right]^2} \right\} \times \\ \times \frac{d}{dr} [\sqrt{r} H_{\beta_m}^{(2)}(kr)] P_{-1/2+\beta_m}^{-1}(-\cos \theta) [\tilde{f}_{\beta_m}^{-1} + \tilde{M}_{\beta_m}] + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \cos nN\varphi \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{kr_0}{2}\right)^{\tilde{\mu}_m - \beta_m} \times \\ \times \left. \frac{\mu \frac{d}{dr} [\sqrt{r} H_{\mu}^{(2)}(kr)]}{\frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} \frac{d}{d\theta} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \theta)}{\frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} \right\} + O(\ln^{-2}(1-u_1)), \quad r_0 < r, \gamma < \theta < \pi, \quad (2.66)$$

(2.64) 
$$h_2(\theta, \varphi) = C_1 + \frac{2 \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} C_N (\cos N\varphi - C_N)}{1 - 2C_N \cos N\varphi + C_N^2}; \quad \beta_n = \alpha_n^{-1}; \quad I_p^{-1}(\mu) = \frac{d}{d\mu} \left\{ \frac{\mu(\mu^2 - 1/4) H_{\mu}^{(2)}(kr)}{\cos \pi \mu \Gamma(\mu + p + 1)} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \theta) \right\};$$

$$C_N = \left( \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{\operatorname{ctg}(\gamma/2)} \right)^N; \quad \tilde{f}_{\mu}^{-1} = \frac{\cos \pi \mu}{\mu(\mu^2 - 1/4) J_{\mu}(kr_0)} \frac{d}{dr} [\sqrt{r} H_{\mu}^{(2)}(kr)] P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \theta) \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{kr_0}{2}\right)^{2p+\mu} \frac{(-1)^p L_p^{-1}(\mu)}{p!};$$

$$\tilde{M}_{\mu} = \frac{\cos \pi \mu}{\pi \sin^2 \gamma \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right) P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma)} \frac{d^2}{d\mu^2} \tilde{\Phi}_{\mu} + \frac{\cos \pi \mu}{\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \left[ P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) \right]^2} \frac{d}{d\mu} \left\{ \frac{\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \left[ P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) \right]^2}{\cos \pi \mu} \right\}$$

$$\tilde{\mu}_n = \beta_n + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \frac{1}{N \ln \frac{1-u_1}{2}} \frac{\cos \pi \mu}{\pi \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right) P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma)} \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) \Big|_{\mu=\beta_n};$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \gamma \frac{1}{N} \ln \frac{1-u_1}{2}} + O(\ln^{-2}(1-u_1)). \quad (2.67)$$

Выражения (2.65) и (2.66) получены в предположении, что точка наблюдения находится вдали от щелей. Аналогичные представления имеют место для  $0 < \theta < \gamma$ .

Спектр собственных значений рассматриваемой граничной задачи определяется множеством корней уравнений с малыми правыми частями

$$\frac{\pi \sin^2 \gamma}{\cos \pi \mu} (\mu^2 - 1/4)^2 P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) P_{-1/2-\mu}^{-1}(-\cos \gamma) = \frac{1}{N \ln \frac{1-u_1}{2}};$$

$$\frac{n \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos \gamma)}{\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos \gamma) + nN \frac{(-1)^{nN} \cos \pi \mu \Gamma(1/2 + \mu - nN)}{\pi \sin^2 \gamma \Gamma(1/2 + \mu + nN)}} = \frac{1-u_1}{2},$$

которые все находятся вблизи корней

$$\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-m}(\pm \cos \gamma) = 0, \quad m \geq 0, \quad \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2-\mu}^{-1}(\cos \gamma) = -(\mu^2 - 1/4) P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma).$$

Слагаемые, соответствующие собственным значениям, расположенным вблизи корней  $\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2-\mu}^{-nN}(\pm \cos \gamma) = 0$  и  $\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) = 0$ , имеют порядок  $O(\ln^{-2}(1-u_1))$  или более высокий, и поэтому в представлениях (2.66) отсутствуют, т.к. последние определены с точностью до такого же порядка. Таким образом, учитываемые члены в разложениях (2.66) соответствуют собственным значениям (2.67) и  $\tilde{\mu}_n$ .

Следует отметить, что спектр собственных значений граничной задачи Неймана для магнитного потенциала Дебая  $U_p^{(2)}$  в случае осесимметричного возбуждения сплошного конуса состоит из корней

$$\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-1}(\pm \cos \gamma) = 0.$$

Ниже приводятся выражения для  $U_{\text{sol}}^{(2)} = U_0^{(2)} + U_{p,\text{sol}}^{(2)}$  в виде ряда при условии, что диполь находится вне конуса [8]

$$U_{\text{sol}}^{(2)} = \frac{p_2}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \frac{\sin(kr_<)}{kr_0^2 r} e^{-ikr_>} + \frac{\pi^2 i p_2}{r_0 \sqrt{r r_0}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_n}{\cos \pi \beta_n} J_{\beta_n}(kr_<) H_{\beta_n}^{(2)}(kr_>) \times$$

$$\times \frac{P_{-1/2+\beta_n}^{-1}(\cos \gamma)}{\left. \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\beta_n}^{-1}(-\cos \gamma) \right|_{\mu=\beta_n}} P_{-1/2+\beta_n}^{-1}(-\cos \theta), \quad \gamma < \theta < \pi; \quad (2.68)$$

$$\sin(kr_<) e^{-ikr_>} = \begin{cases} \sin kr e^{ikr_0}, & r < r_0; \\ e^{-ikr} \sin kr_0, & r > r_0. \end{cases}$$

Подставляя (2.68) в представления для компонент поля (2.2), нетрудно убедиться, что слагаемое, соответствующее собственному значению  $\mu = \frac{1}{2}$  вклад в поле не дает.

Поведение магнитного поля вблизи острия ( $kr \ll I$ ) сплошного конуса при возбуждении магнитным радиальным диполем характеризуется слагаемым  $(kr)^{-3/2-\beta(\gamma)}$ , где  $\beta(\gamma) = \min \beta_n > 3/2$ . Отсюда следует, что в этом случае поле вблизи острия особенности не имеет. Наличие щелей вносит возмущение в спектр сплошного конуса и в структуру рассеянного поля конуса со щелями помимо слагаемого, соответствующего рассеянному полю сплошного конуса, появляются слагаемые, обусловленные присутствием щелей. И в этом случае возмущенное собственное значение  $\mu = \frac{1}{2}$  (2.67) уже вносит вклад в рассеянное поле. Волна, отвечающая собственному значению  $\zeta$ , характеризует поведение поля вблизи острия и дает лучшее приближение для поля в случае  $kr_0 \ll I$ . У вершины конуса  $H_{\theta,p}$  характеризуется слагаемым

$$(2.67) \quad H_{z,0} = \frac{1}{\sin^2 \gamma \frac{1}{N} \ln \frac{1-u}{2}} \bar{A}_1 \left( \frac{kr}{2} \right)^{-3/2+\zeta} F^*(\theta, \varphi); \quad (2.69)$$

$$F(\theta, \varphi) = \begin{cases} b_1 + \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} \left\{ -1 + \operatorname{Re} \left[ \frac{1 + b_N e^{iN\varphi}}{\sqrt{b_N^2 e^{2iN\varphi} - 2b_N e^{iN\varphi} \cos \delta + 1}} \right] \right\}, & 0 < \theta < \gamma, \\ c_1 + \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} \left\{ -1 + \operatorname{Re} \left[ \frac{1 + c_N e^{iN\varphi}}{\sqrt{c_N^2 e^{2iN\varphi} - 2c_N e^{iN\varphi} \cos \delta + 1}} \right] \right\}, & \gamma < \theta < \pi, \end{cases} \quad \delta = \frac{\pi d}{l}.$$

Из (2.69) следует, что при  $|kr| \ll \exp\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ ,  $\alpha = -\left(\sin^2 \gamma \frac{1}{N} \ln \frac{1-u}{2}\right)^{-1}$  наблюдается неограниченный

рост  $H_{z,0}$  по мере приближения к острию. Такую же особенность вблизи острия имеют и остальные компоненты магнитного поля [70,71].

При  $kr \ll l$  электрическое поле особенности не имеет. Наличие радиальных щелей на поверхности конуса приводит к изменению поляризационной структуры поля. В отличие от сплошного конуса, рассеянное поле которого имеет линейную поляризацию (источник на оси), в случае конуса со щелями поляризация рассеянного ТЕ-поля является уже эллиптической. Заметим, что волна, соответствующая собственному значению  $\zeta$  является стоячей в области  $r < r_0$  и бегущей при  $r > r_0$ . В точках расположения источника  $\alpha_k = \pi k$ ,  $k=1,2,3\dots$  поле этой волны при  $r > r_0$  пренебрежимо мало.

Как было отмечено ранее, выражения для потенциала  $U_p^{(2)}$  (2.65) и составляющих поля были получены в предположении, что точка наблюдения находится вдали от щелей. Анализ рассеянного поля вблизи кромок щелей показывает, что перпендикулярные и параллельные кромке компоненты ведут себя так же, как и в случае электрического диполя (2.42), (2.43), причем перпендикулярные имеют известную особенность [48...50], а параллельная ( $H_{rp}$ ) остается ограниченной.

В случае близкого расположения источника к острию ( $kr_0 \ll l$ ) волна, соответствующая собственному значению  $\zeta$ , представляет собой бегущую волну, распространяющуюся от вершины конуса вдоль щелевой щели и дает хорошее приближение для поля при  $r > r_0$ . Волна, соответствующая собственному значению  $\zeta$  имеет свойства, сходные со свойствами щелевой волны в цилиндрической щелевой линии [116] и поэтому в дальнейшем будем называть ее щелевой. Распределение электрического поля в щели ( $N=1$ ,  $\alpha_1 = \cos \frac{d}{2}$ ) определяется следующим выражением:

$$(2.68) \quad E_{\varphi}^2 = E_{e,0}^2 + E_{o,p}^2 = -\frac{kwp_2}{\sin^2 \gamma \ln \frac{1-u_1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos(d/2))}} \times \left[ i \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left( \frac{kr_0}{2} \right)^{-3/2+\zeta} \frac{\sin kr_0 e^{-ikr}}{r_0 r} + \frac{2\pi}{\eta_0 \sqrt{r_0}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{kr_0}{2} \right)^{\tilde{\mu}_n - \beta_n} \frac{J_{\beta_n}(kr_0) H_{\beta_n}^{(2)}(kr)}{(\beta_n^2 - 1/4) \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} \Big|_{\mu=\beta_n} \right] \left[ \cos \frac{\varphi}{2} + O(\ln^{-1}(1-u)) \right], \quad r > r_0, \quad |\varphi| < \frac{d}{2}, \quad \theta = \gamma. \quad (2.70)$$

Из (2.70) видно, что при  $kr_0 \ll l$  слагаемое, соответствующее собственному значению  $\zeta$ , является преобладающим и описывает поле в щели в случае близкого расположения источника. По мере приближения к кромке щели проявляется особенность порядка  $\operatorname{const} \left[ \left( \frac{d}{2} \right)^2 - \varphi^2 \right]^{-1/2}$ .

Радиальная составляющая плотности поверхностного тока (2.56) имеет вид

$$\begin{aligned}
 j_r = & \frac{2\sqrt{2}\pi i p_2}{\sin^2 \gamma \ln \frac{1-u_1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos \frac{d}{2} - \cos \varphi}} \left\{ \cos \frac{\varphi}{2} \left[ \frac{k}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left( \frac{kr_0}{2} \right) \right]^{3/2+\xi} \frac{\sin kr_0 e^{-ikr}}{r_0 r} + \right. \\
 & + \frac{1}{rr_0 \sqrt{r_0}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{kr_0}{2} \right)^{\tilde{\mu}_n - \beta_n} \frac{\beta_n J_{\beta_n}(kr_0)}{(\beta_n^2 - 1/4) \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) \Big|_{\mu=\beta_n}} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} H_{\beta_n}^{(2)}(kr)) - \\
 & - \frac{2}{rr_0 \sqrt{r_0}} \sin \frac{\varphi}{2} \sum_{s=1}^{+\infty} \sin s\varphi \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{kr_0}{2} \right)^{\tilde{\mu}_n - \beta_n} \frac{\beta_n J_{\beta_n}(kr_0) \varepsilon_s \Big|_{\mu=\beta_n}}{(\beta_n^2 - 1/4) \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) \Big|_{\mu=\beta_n}} \times \\
 & \times \frac{d}{dr} (\sqrt{r} H_{\beta_n}^{(2)}(kr)) + O(\ln^{-1}(1-u_1)) \Big\}, \quad \theta = \gamma, \quad r > r_0, \quad \frac{d}{2} < \varphi \leq \pi.
 \end{aligned}$$

В случаях, когда источник находится в точках  $kr_0 = m\pi$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , слагаемое, соответствующее шелевой волне в учитываемых членах представления (2.70) отсутствует. Вблизи острия конуса распределение азимутальной компоненты плотности поверхностного тока (2.55) определяется выражением

$$\tilde{j}_\varphi = \frac{k}{\sin^2 \gamma \ln \frac{1-u_1}{2}} \frac{p_2}{4 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \left( \frac{kr}{2} \right)^{3/2+\xi} \frac{e^{-ikr_0}}{r_0^2}.$$

**Коническая структура, образованная узкими коническими секторами.** Магнитный потенциал Дебая  $U_p^{(2)}$ , соответствующий рассеянному полю вдали от ребер сектора, в этом случае ( $l-d)/l \ll 1$ ,  $1+u_1 \ll 1$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 U_p^{(2)} = & \frac{1}{N} \left( \frac{1+u_1}{2} \right) \int_0^{+\infty} \frac{H_{ir}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{a_0^{(2)}(\tau, k)}{\tilde{B}_{ir} + \frac{1}{N} \left( \frac{1+u_1}{2} \right) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+ir}(\pm \cos \gamma)} \frac{P_{-1/2+ir}(\pm \cos \theta)}{d\tau} d\tau + \\
 & + \frac{1}{N} \left( \frac{1+u_1}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{inN\varphi} \int_0^{\infty} \frac{H_{ir}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{a_0^{(2)}(\tau, k)}{\varepsilon_n^{(2)} \left[ \tilde{B}_{ir} + \frac{1-\varepsilon_n^{(2)}}{N|n|\varepsilon_n^{(2)}} \right] T_{ir}^{nN}} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+ir}(\pm \cos \gamma)}{d\tau} d\tau + O((1+u_1)^2 \ln(1+u_1)),
 \end{aligned}$$

$$\text{где } T_{ir}^{nN} = \frac{\tilde{B}_{ir}}{\tilde{B}_{ir} \frac{N|n|\varepsilon_n^{(2)}}{1-\varepsilon_n^{(2)}} + 1} + \frac{1}{N} \left( \frac{1+u_1}{2} \right).$$

Спектр собственных значений граничной задачи Неймана для узких конических секторов определяется корнями уравнений с малыми правыми частями

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi \sin^2 \gamma} \frac{\cos \pi \mu}{(\mu^2 - 1/4)^2 P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} &= -\frac{1}{N} \left( \frac{1+u_1}{2} \right); \\
 \frac{\cos \pi \mu}{\sin^2 \gamma} \left/ \left( \pi (-1)^{nN} \frac{\Gamma(1/2 + \mu + nN)}{\Gamma(1/2 + \mu - nN)} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos \gamma) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{nN \cos \pi \mu}{\pi \sin^2 \gamma} - \pi (\mu^2 - 1/4)^2 P_{-1/2-\mu}^{-1}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) \right) \right. = \frac{1+u_1}{2N}, \quad nN \geq 1,
 \end{aligned}$$

которые все находятся в окрестности корней  $\cos \pi \mu = 0$ , за исключением точки  $\mu = 1/2$ ,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\eta}_m^{nN} = & \frac{1}{2} + m - \frac{1}{N} \left( \frac{1+u_1}{2} \right) \sin^2 \gamma \left\{ \frac{(m+nN)!}{\Gamma(1+m-nN)} \left[ \frac{d}{d\gamma} P_m^{-nN}(\cos \gamma) \right]^2 + \right. \\
 & \left. + m^2 (m+1)^2 \left[ P_m^{-1}(\cos \gamma) \right]^2 \right\} + O((1+u_1)^2), \quad nN \geq 1, \quad m = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Компоненты электромагнитного поля вблизи вершины характеризуются собственным значением  $\tilde{\eta}_1^{-nN}$

$$nN=1 \quad \tilde{\eta}_1^{-1} = \frac{3}{2} - \left( \frac{1+u_1}{4} \right) \sin^2 \gamma (1 + \sin^2 \gamma) + O((1+u_1)^2);$$

$$nN \geq 2 \quad \tilde{\eta}_1^{-nN} = \frac{3}{2} - \frac{1}{N} \left( \frac{1+u_1}{2} \right) \sin^4 \gamma + O((1+u_1)^2).$$

При этом составляющие электрического поля при  $kr \ll 1$  ведут себя как

$$(kr)^{N-1/2}, \quad N=1; \quad (kr)^{\tilde{\eta}_1^{-nN}-1/2}, \quad N \geq 2,$$

магнитного –

$$(kr)^{-3/2} \tilde{\eta}_1^{-nN}, \quad N=1; \quad (kr)^{-3/2} \tilde{\eta}_1^{-nN}, \quad N \geq 2.$$

Отсюда следует, что электрическое поле убывает по мере приближения к вершине, а магнитное имеет особенность в ее окрестности.

**Численные результаты.** Численное решение задачи возбуждения магнитным диполем проводилось в случае конуса с одной щелью ( $N=1$ ) и расположения источника на оси структуры ( $\theta_0 = \pi, m = m_0 = 0$ ). Система (2.53), (2.54) имеет единственное решение, которое находим методом редукции. В силу того, что коэффициенты  $x_n$  являются коэффициентами Фурье составляющих рассеянного поля, а их модули определяют энергию поля, исследуем их зависимость от параметров задачи. На рис. 2.9 – 2.12 приведены зависимости  $|x_0|, |x_1|, |x_2|, |x_3|$  от ширины щели  $d$  при фиксированных значениях углов полураскрыва конуса  $\gamma$  ( $\tau=1$ ). Значения  $|x_0|, |x_1|, |x_2|, |x_3|$  существенно зависят от ширины щели и угла  $\gamma$ . Как видно из рис. 2.9  $|x_0(d)|$  монотонно убывает от 1 до 0, причем меньшему значению угла  $\gamma$  соответствует более пологая кривая. Кривые на рис. 2.10 определяют зависимость  $|x_1|$  от ширины щели. С уменьшением  $\gamma$  у кривой  $|x_1(d)|$  наблюдается явно выраженный максимум, который с увеличением  $\gamma$  сдвигается и расширяется. С увеличением номера  $n, n \geq 1$ , число локальных максимумов  $|x_n(d)|$  равно числу  $n$ , а минимумов  $n-1$  (рис. 2.10 – 2.12). По мере расширения щели кривые сближаются и, приблизительно, начиная со значения  $d = 270^\circ$ , сливаются и убывают до нуля. При уменьшении ширины щели до нуля  $|x_n(d)|, n=1,2,3$ , стремятся к нулю, а  $|x_0(d)|$  к единице (предельное значение для сплошного конуса), что вполне согласуется с асимптотическим решением СЛАУ-2 в случае узких щелей.

На рис. 2.13, а-ж приведены нормированные диаграммы рассеяния ( $kr \gg 1$ ) в азимутальной плоскости (перпендикулярной оси конуса) для конуса с одной щелью ( $N=1, \theta_0 = \pi, kr_0 = 1, \gamma = \pi/8$ ). В силу того, что плоскость  $\varphi = 0^\circ$  проходит через ось щели, на рис. 2.13, а-ж луч  $\varphi = 0^\circ$  является биссектрисой угла, определяющего ширину щели  $d^0$ . Для ширины щели меньших  $30^\circ$  излучение из щели мало. С расширением щели наблюдается и излучение из щели, причем максимум излучения приходится на ее середину (рис. 2.13, б, в). Дальнейшее увеличение ширины щели приводит к заметному изменению формы диаграммы рассеяния с локализацией максимума рассеяния в направлении  $\varphi = 180^\circ$  (середина конического сектора).

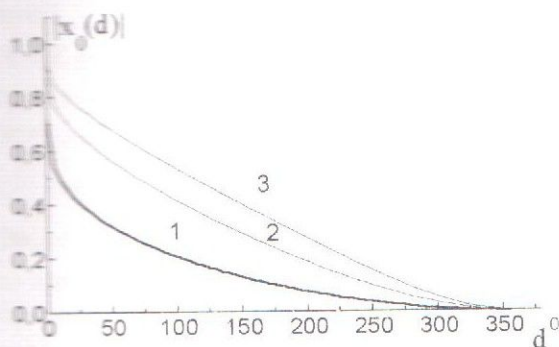


Рис.2.9. Графики зависимости  $|x_0|$  от ширины щели  $d^0$  при фиксированном  $\gamma$ : 1- $\gamma = \pi/8$ ; 2- $\gamma = \pi/4$ ; 3- $\gamma = \pi/2$

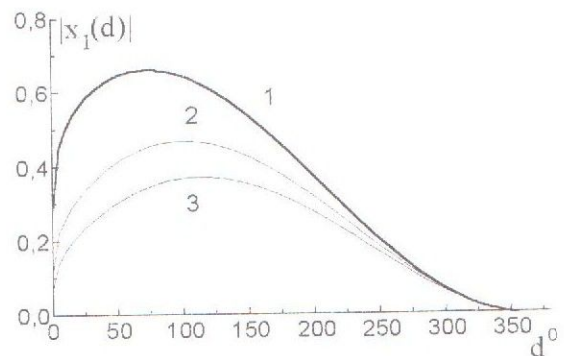


Рис.2.10. Графики зависимости  $|x_1|$  от ширины щели  $d^0$  при фиксированном  $\gamma$ : 1- $\gamma = \pi/8$ ; 2- $\gamma = \pi/4$ ; 3- $\gamma = \pi/2$

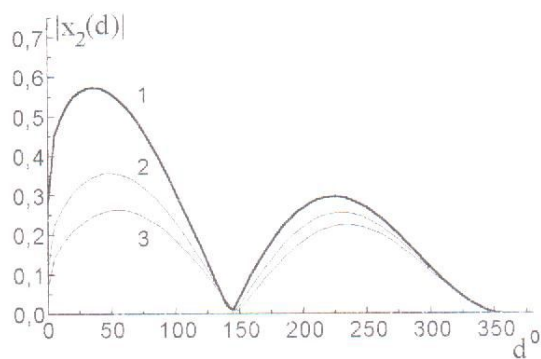


Рис.2.11. Графики зависимости  $|x_2|$  от ширины щели  $d^0$  при фиксированном  $\gamma$ : 1 -  $\gamma = \pi/8$ ; 2 -  $\gamma = \pi/4$ ; 3 -  $\gamma = \pi/2$

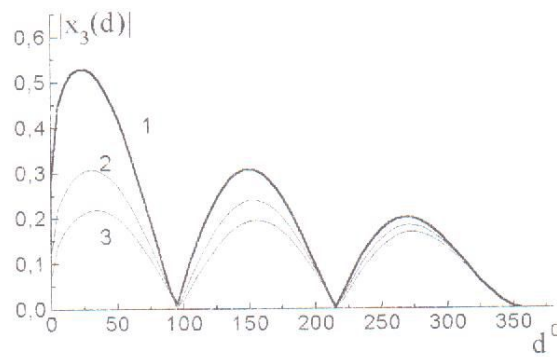


Рис.2.12. Графики зависимости  $|x_3|$  от ширины щели  $d^0$  при фиксированном  $\gamma$ : 1 -  $\gamma = \pi/8$ ; 2 -  $\gamma = \pi/4$ ; 3 -  $\gamma = \pi/2$

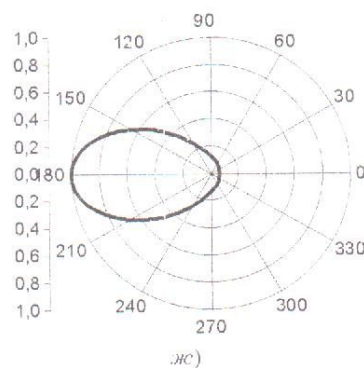
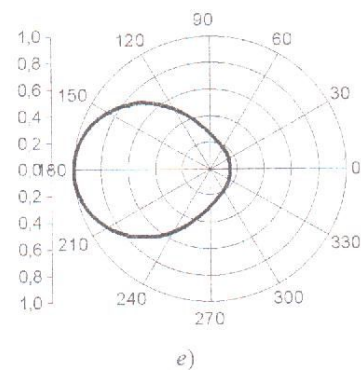
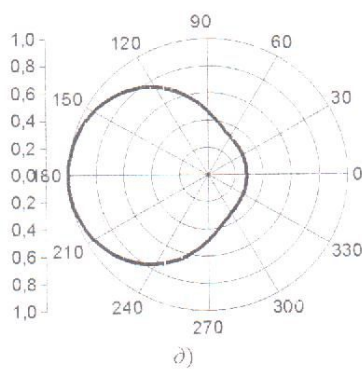
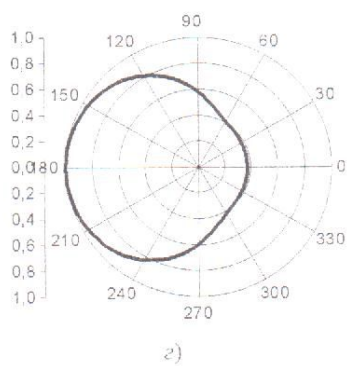
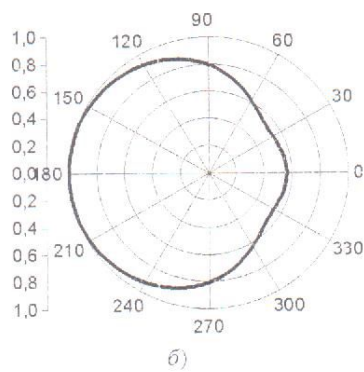
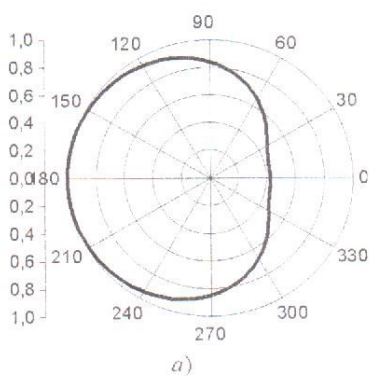


Рис. 2. 13. Диаграмма рассеяния конуса с одной щелью ( $N = 1$ ),  $\gamma = \pi/8$ :

$a - d = 30^\circ$ ;  $б - d = 60^\circ$ ;  $в - d = 90^\circ$ ;  $г - d = 150^\circ$ ;  $д - d = 180^\circ$ ;  $е - d = 240^\circ$ ;  $ж - d = 330^\circ$

### ГЛАВА 3. Дифракция плоских электромагнитных волн на конусе с продольными щелями

В данной главе рассматривается исследование задачи дифракции плоских монохроматических электромагнитных волн на неограниченном идеально проводящем круговом конусе с периодически прорезанными вдоль образующих щелями. Математический аппарат решения электродинамической задачи основан на использовании интегрального преобразования Конторовича–Лебедева в сочетании с методом Римана–Гильберта. При этом векторная задача дифракции сводится к решению первой и второй краевым задачам математической физики для уравнения Гельмгольца, алгоритм решения которых приведен в первой главе.

В частных случаях полупрозрачного конуса, конуса с узкой щелью и узкого конического сектора получено решение задачи и определен характер поведения поля вблизи особых точек во всех рассматриваемых случаях поверхности.

#### 3.1. Постановка задачи

Предположим, что на идеально проводящий бесконечный круговой конус с периодически прорезанными  $N$  щелями падает плоская электромагнитная волна (временная зависимость взята в виде  $\exp(-i\omega t)$ ), распространяющаяся вдоль оси конуса  $z$  (рис. 3.1).

Предполагается, что вектор напряженности электрического (магнитного) падающего поля ориентирован произвольным образом в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Через  $2\gamma$  обозначим угол раствора конуса,  $d$  – ширину щелей,

$T = \frac{2\pi}{N}$  – период рассматриваемой структуры,  $k$  – волновое число.

В отличие от случая возбуждения радиальным (электрическим или магнитным) диполем, в котором составляющие электромагнитного поля выражаются через один (электрический или магнитный) потенциал Дебая, в случае плоской волны составляющие поля определяются с помощью двух потенциалов Дебая (электрического  $V^{(1)}$  и магнитного  $V^{(2)}$ ) по формулам [2,6]

$$E_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (rV^{(1)}), \quad E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (rV^{(1)}) + \frac{ik}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} V^{(2)}, \quad E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (rV^{(1)}) - ik \frac{\partial}{\partial \theta} V^{(2)}; \quad (3.1)$$

$$H_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (rV^{(2)}), \quad H_\theta = -\frac{ik}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} V^{(1)} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (rV^{(2)}), \quad H_\varphi = ik \frac{\partial}{\partial \theta} V^{(1)} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (rV^{(2)}).$$

Присутствие конуса с продольными щелями приводит к появлению дифрагированного поля  $\vec{E}_d, \vec{H}_d$ , составляющие которого выражаются по формулам (3.1) через электрический  $V_d^{(1)}$  и магнитный  $V_d^{(2)}$  потенциалы Дебая. Полное поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  представим в виде суммы падающего  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$  и дифрагированного  $\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d$  полей

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_d, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d,$$

в связи с чем соответствующие полному полю потенциалы запишутся аналогичным образом

$$V^{(j)} = V_0^{(j)} + V_d^{(j)}, \quad j=1,2, \quad (3.2)$$

где  $V_0^{(j)}$  определяют падающее поле.

Введенные потенциалы Дебая  $V_d^{(j)}$  удовлетворяют:

- а) однородному уравнению Гельмгольца вне конической поверхности;
- б) первому ( $j=1$ ) или второму ( $j=2$ ) краевому условию на конических секторах конуса

$$\frac{\partial^{j-1} V}{\partial r^{j-1}} \Big|_{\Sigma} = 0;$$

- в) условию конечности энергии;
- г) условию излучения.

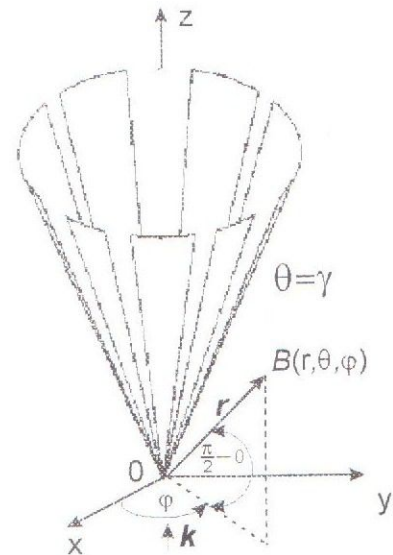


Рис.3.1. Геометрия структуры

Электродинамическая задача в такой постановке имеет единственное решение [48].

При решении задачи ограничимся рассмотрением двух случаев поляризации падающей волны относительно оси конуса: 1) вектор  $\mathbf{E} \parallel OX$ ; 2) вектор  $\mathbf{H} \parallel OX$ , поскольку случай произвольной поляризации падающей волны может быть получен наложением этих типов полей. Волну, отвечающую случаю 1) или 2), назовем волной  $E$  или  $H$  - поляризации.

### 3.2. Дифракция плоской $E$ - поляризованной волны на конусе с продольными щелями

В сферической системе координат потенциал Дебая  $V_0^{(j)}$  для падающего поля  $\mathbf{E}_0 = (E_{0,x}, 0, 0)$ ,  $\mathbf{H}_0 = (0, H_{0,y}, 0)$ ,  $E_{0,x} = H_{0,y} = e^{ikr}$  определяется следующими выражениями [10, 22, 32]:

$$V_0^{(1)} = -\frac{\cos \varphi}{k^2 r \sin \theta} (\cos kr + i \cos \theta \sin kr - e^{ikr \cos \theta}); \quad (3.3)$$

$$V_0^{(2)} = -\frac{\sin \varphi}{k^2 r \sin \theta} (\cos kr + i \cos \theta \sin kr - e^{ikr \cos \theta}).$$

Представим потенциалы  $V_0^{(j)}$  (3.3) с помощью интегрального преобразования Конторовича - Лебедева относительно радиальной координаты

$$V_0^{(1)} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \int_0^{+\infty} \tau \theta \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \theta) d\tau + i \cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \frac{\sin kr}{k^2 r}; \quad (3.4)$$

$$V_0^{(2)} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \int_0^{+\infty} \tau \theta \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} P_{-1/2-i\tau}^{-1}(\cos \theta) d\tau + i \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \frac{\sin kr}{k^2 r}.$$

Введем обозначения

$$V_{0,\text{div}}^{(1)} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \int_0^{+\infty} \tau \theta \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} P_{-1/2-i\tau}^{-1}(\cos \theta) d\tau = \sum_{m=-1;1}^{+\infty} e^{im\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \hat{C}_{m\tau} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta) d\tau;$$

$$\hat{C}_{m\tau} = \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \tau \theta \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} (\tau^2 + 1/4)^{\tilde{\alpha}(m)}, \quad \tilde{\alpha}(m) = -\frac{1}{2} \left( \frac{|m|}{m} + 1 \right); \quad (3.5)$$

$$V_{0,\text{conv}}^{(1)} = \frac{i}{2k^2} \frac{\sin kr}{r} \sum_{m=-1;1} P_0^{-m}(\cos \theta) e^{im\varphi} = i \cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \frac{\sin kr}{k^2 r};$$

$$V_{0,\text{div}}^{(2)} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \int_0^{+\infty} \tau \theta \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} P_{-1/2-i\tau}^{-1}(\cos \theta) d\tau = -i \sum_{m=-1;1} \frac{|m|}{m} e^{im\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \hat{C}_{m\tau} P_{-1/2-i\tau}^m(\cos \theta) d\tau;$$

$$V_{0,\text{conv}}^{(2)} = \frac{i}{2k^2} \frac{\sin kr}{r} \sum_{m=-1;1} \frac{|m|}{m} P_0^{-|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} = i \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \frac{\sin kr}{k^2 r}.$$

В этих обозначениях  $V_0^{(j)} = V_{0,\text{div}}^{(j)} + V_{0,\text{conv}}^{(j)}$  (3.4). Потенциалы Дебая ищем в виде суммы  $V_{d,\text{div}}^{(j)}$  и  $V_{d,\text{conv}}^{(j)}$  [85]

$$V_d^{(j)} = V_{d,\text{div}}^{(j)} + V_{d,\text{conv}}^{(j)}, \quad (3.6)$$

которые представим следующим образом (3.5)

$$V_{d,\text{div}}^{(s)} = -\int_0^{+\infty} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \sum_{m=-1;1} (-i \frac{|m|}{m})^{j-1} \frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1}} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma) \hat{C}_{m\tau} U_{m\tau}^{(j)} d\tau, \quad (3.7)$$

$$U_{m\tau}^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_{m+nN}^{(j)} \frac{P_{-1/2-i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \theta)}{d^{j-1} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \gamma)} e^{i(m+nN)\varphi},$$

$$V_{d,\text{conv}}^{(j)} = -\frac{i}{2k^2} \frac{\sin kr}{r} \frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1}} \left( \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) \sum_{m=1} (-i \frac{|m|}{m})^{j-1} U_m^{(j)}; \quad U_m^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \xi_{m-nN}^{(s)} \frac{P_0^{-|m+nN}(\pm \cos \theta)}{d^{j-1} P_0^{-|m-nN|}(\pm \cos \gamma)} e^{i(m-nN)\varphi}; \quad (3.8)$$

отно-  
ации  
) или

функция Ханкеля 1-го рода;  $P_\nu^m(\cos\theta)$  – присоединенная функция Лежандра 1-го рода;  
 $\Gamma(z)$  – гамма – функция;  $x_p^{(j)}$  и  $\xi_p^{(j)}$  – неизвестные коэффициенты, связанные соотношением

$$\xi_p^{(j)} = \lim_{i \rightarrow 1/2} x_p^{(j)} \quad (3.9)$$

Таким образом, для определения составляющих дифрагированного поля необходимо найти коэффициенты  $x_p^{(j)}$ . Верхние знаки в (3.7) и (3.8) соответствуют области  $0 < \theta < \gamma$ , а нижние  $\gamma < \theta < \pi$ .

Используя граничное условие на конусе и условие непрерывности поля в щелях, получаем следующую систему функциональных соотношений, совпадающих по виду с (2.5), (2.6) в случае возбуждения радиальными диполями:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{m,n}^{(s)} e^{inN\varphi} = e^{im_0N\varphi}, \quad \frac{\pi d}{l} < |N\varphi| \leq \pi; \quad (3.10)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{m,n}^{(j)} [N(n+\nu)]^{\alpha(j)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(j)}) e^{imN\varphi} = 0, \quad |N\varphi| < \frac{\pi d}{l}; \quad (3.11)$$

$$[N(n+\nu)]^{\alpha(j)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(j)}) = \frac{(-1)^{(n+\nu)N+j-1} ch\pi\tau \Gamma(1/2+i\tau+(n+\nu)N)}{\pi(\sin\gamma)^{1-\alpha(j)} \Gamma(1/2+i\tau-(n+\nu)N)} \frac{1}{d\gamma^{j-1} P_{-1/2-i\tau}^{(n-\nu)NN}(\cos\gamma)} \frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)NN}(-\cos\gamma)};$$

$$\frac{m}{N} = m_0 + \nu; \quad -\frac{1}{2} \leq \nu < \frac{1}{2}; \quad \alpha(j) = (-1)^{j-1}, \quad (3.4)$$

$m_0$  – ближайшее к  $m/N$  целое число.

Отсюда можно сделать вывод, что коэффициенты  $x_{m,n}^{(j)}$  являются решением системы функциональных соотношений (2.5), (2.6) при  $m = \pm 1$  и находятся в том же классе, что и  $x_{m,n}^{(j)}$  в случае возбуждения радиальными диполями (2.7). Используя метод Римана – Гильберта, функциональные соотношения (3.10), (3.11) сводятся в двум СЛАУ-2 типа (2.13), (2.14), матричные элементы которых не зависят от волнового числа, что является удобным для построения решения задачи вблизи и вдали от вершины конуса. В случаях полупрозрачного конуса, узких щелей, узких конических секторов решение этих систем может быть получено методом последовательных приближений.

**Полупрозрачный конус.** При использовании метода последовательных приближений, когда существуют

$$a) Q = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d/l \rightarrow 1}} [-\frac{1}{N} \ln \cos \frac{\pi d}{2l}]; \quad (3.12)$$

$$b) W = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d/l \rightarrow 0}} [-\frac{1}{N} \ln \sin \frac{\pi d}{2l}]; \quad (3.13)$$

можно предельное решение задачи для полупрозрачного конуса.

Рассмотрим отдельно случаи а) и б).

Случай а)  $N \rightarrow \infty, d/l \rightarrow 1, W = 0$ . Потенциалы Дебая в этом случае имеют вид [85]

$$V_r^{(0)} = -\frac{1}{k\sqrt{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \int_0^{+\infty} e^{\frac{\pi\tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr) \tau(\tau^2+1/4)}{\sqrt{r} \sigma_{i\tau}} th\pi\tau P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos\gamma) P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos\gamma) \times$$

$$\times P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos\theta) d\tau - \frac{i \cos\varphi}{k^2 1+2Q} \operatorname{tg} \frac{\theta \sin kr}{2r}, \quad 0 < \theta < \gamma; \quad (3.14)$$

$$V_r^{(0)} = -\frac{1}{k\sqrt{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \int_0^{+\infty} e^{\frac{\pi\tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr) \tau(\tau^2+1/4)}{\sqrt{r} \sigma_{i\tau}} th\pi\tau [P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos\gamma)]^2 P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos\theta) d\tau -$$

$$\frac{i \cos\varphi}{k^2 1+2Q} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta \sin kr}{2r}, \quad \gamma < \theta < \pi; \quad (3.15)$$

$$V_r^{(2)} = 0, \sigma_{i\tau} = (\tau^2 + 1/4) P_{-1/2-i\tau}^{-1}(\cos\gamma) P_{-1/2-i\tau}^{-1}(-\cos\gamma) + \frac{2}{\pi} Q ch\pi\tau.$$

Отсюда следует, что дифрагированное поле в случае а) полупрозрачного конуса определяется то одним потенциалом  $V_d^{(1)}$  и по этой причине не имеет радиальной составляющей магнитного поля. Та образом, дифрагированное поле является полем ТМ - типа. На поверхности  $\theta = \gamma$  составляющие электрического поля удовлетворяют усредненным граничным условиям

$$E_r^+ = E_r^-, \quad \frac{ik}{\theta \sin \gamma} E_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (r \tilde{H}_\varphi), \quad \tilde{H} = H^+ - H^-. \quad (3)$$

Условия (3.16) совпадают (с точностью до знака  $k$ ) с усредненными граничными условиями в случае возбуждения такого же типа полупрозрачного конуса электрическим радиальным диполем (2.25). Приходя в (3.14) и (3.15) к интегрированию по мнимой оси, представим  $V_d^{(1)}$  в виде ряда вычетов по полук подынтегральной функции в области  $\gamma < \theta < \pi$

$$V_d^{(1)} = -V_0^{(1)} - \frac{\pi i}{k} \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} e^{i\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\tilde{\nu}_q (\tilde{\nu}_q^2 - 1/4) J_{\tilde{\nu}_q}(kr)}{\cos \pi \tilde{\nu}_q \frac{d}{d\mu} \sigma_\mu \Big|_{\mu=\tilde{\nu}_q}} \left[ P_{-1/2+\tilde{\nu}_q}^{-1}(\cos \gamma) \right]^2 P_{-1/2+\tilde{\nu}_q}^{-1}(-\cos \theta), \quad \sigma_{\tilde{\nu}_q} = 0. \quad (3)$$

Аналогичное выражение для  $V_d^{(1)}$  и в области  $0 < \theta < \gamma$ . Следует отметить, что ряд в (3.17) быстро сходится в том случае, когда точка наблюдения находится вблизи вершины. При  $kr \gg 1$  этот ряд сходится медленно, и поэтому для изучения поля в дальней зоне удобнее воспользоваться непосредственно и графическими представлениями (3.14) и (3.15). Полученный в (3.17) ряд можно также использовать для изучения поведения поля вблизи острия. Спектр собственных значений задачи для случая а) полупрозрачного конуса определяется корнями уравнения  $\sigma_\mu = 0$ , наименьшим из которых и будет характеризовать поведение поля у вершины. Ниже приводятся асимптотики для  $\tilde{\nu}_q$  в некоторых частных случаях  $Q$  (3.12) и

1)  $Q \ll 1$ ,  $\gamma$  – произвольно,

$$\tilde{\nu}_q = \alpha_q^{1\pm} + \frac{2Q \cos \pi \alpha_q^{1\pm}}{\pi \left[ (\alpha_q^{1\pm})^2 - 1/4 \right] \frac{d}{d\mu} \left[ P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) \right] \Big|_{\mu=\alpha_q^{1\pm}}} + O(Q^2); \quad (3)$$

$$P_{-1/2+\alpha_q^{1\pm}}^{-1}(\cos \gamma) = 0, \quad P_{-1/2+\alpha_q^{1\pm}}^{-1}(-\cos \gamma) = 0;$$

2)  $Q \gg 1$ ,  $\gamma$  – произвольно,

$$\tilde{\nu}_q = \frac{1}{2} + q + \frac{1}{2Q} q(q+1) [P_q^{-1}(\cos \gamma)]^2 + O(Q^{-2}), \quad q = 1, 2, \dots; \quad (3)$$

3)  $\gamma \ll 1$ ;  $Q$  – произвольно,

$$\tilde{\nu}_q = \frac{1}{2} + q + \frac{q(q+1)}{4(1+2Q)} \gamma^2 + O(\gamma^4 \ln \frac{2}{\gamma}), \quad q = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Составляющие полного поля вблизи острия ведут себя как  $(kr)^{-3/2+\tilde{\nu}}$ , где  $\tilde{\nu} = \min_q \tilde{\nu}_q$ . Наименьшим корнем в этих частных случаях ( $Q \ll 1$ ;  $Q \gg 1$ ;  $\gamma \ll 1$ ) является корень  $\tilde{\nu}_1$  в (3.18) – (3.20).

Принимая во внимание, что при  $\gamma \ll 1$  полное электрическое поле у вершины сплошного конуса ведет себя как  $(kr)^{\gamma^2/2}$ , заключаем, что в случае а) полупрозрачного конуса ( $\gamma \ll 1$ ) полное электрическое поле убывает медленнее, чем у сплошного по мере приближения к острию. Плотность поверхностного тока, наведенного на полупрозрачном конусе, имеет только радиальную составляющую, так как в этом случае коническая поверхность образована расходящимися из вершины узкими проводниками. Дифрагированное поле, как это следует из (3.15) и (3.17), представляется бесконечным набором ТМ- и эллиптической поляризации.

С л у ч а й б)  $N \rightarrow \infty$ ,  $d/l \rightarrow 0$ ,  $Q = 0$ . Составляющие дифрагированного поля в этом случае (3) выражаются через оба потенциала Дебая, которые определяются следующим образом:

$$V_d^{(1)} = -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{\tau}} \frac{P_{-1/2-i\tau}^{-1}(\cos \gamma)}{P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \gamma)} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \theta) d\tau - \frac{i}{k^2} \cos \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta \sin kr}{2r}, \quad \gamma < \theta < \pi; \quad (3)$$

только  
Таким  
лектро-

$$V_d^{(1)} = -2W \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \int_0^{+\infty} \frac{\tau \operatorname{th} \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\tilde{\Delta}_{i\tau}} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \gamma)}{\sqrt{r}} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \theta) d\tau +$$

$$+ \frac{i}{k^2} \sin \varphi \frac{2W}{1+2W} \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \frac{\sin kr}{r}, \quad \gamma < \theta < \pi. \quad (3.22)$$

Аналогичные представления для потенциалов имеют место при  $0 < \theta < \gamma$ . В этом случае полупрозрачного конуса электрический потенциал Дебая  $V_d^{(1)}$  не испытывает влияния щелей и является таким, как у сплошного конуса [10, 85].

Устремляя в (3.22)  $W \rightarrow \infty$ , что соответствует превращению полупрозрачного конуса в сплошной, получаем выражение для магнитного потенциала Дебая в случае сплошного конуса [10]

(3.17)

$$V_{\text{Доб}}^{(1)} = -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \int_0^{+\infty} \frac{\tau \operatorname{th} \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2-i\tau}^{-1}(\cos \gamma)}{\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \theta)} d\tau +$$

$$+ \frac{i}{k^2} \sin \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \frac{\sin kr}{r}, \quad \gamma < \theta < \pi. \quad (3.23)$$

Усредненные граничные условия для составляющих поля на поверхности полупрозрачного конуса имеют следующий вид:

$$E_\varphi = E_\varphi; \quad -\frac{ik}{4W \sin \gamma} \tilde{H}_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (rE_\varphi). \quad (3.24)$$

Усредненные граничные условия (3.24) совпадают с точностью до знака с (2.58). Для анализа поведения поля вблизи острия перейдем от интегральных представлений (3.21) (3.23) для  $V_d^{(j)}$  к представлению в виде ряда по полюсам подынтегральной функции

(3.18)

$$V_d^{(1)} = -V_0^{(1)} + \frac{\pi i}{k} \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} e^{i\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu}{\cos \pi \mu} J_\mu(kr) \frac{P_{-1/2-\mu}^{-1}(\cos \gamma)}{\frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} \Bigg|_{\mu=a_n^1} P_{-1/2-a_n^1}^{-1}(-\cos \theta), \quad \gamma < \theta < \pi \quad (3.25)$$

(3.19)

$$V_d^{(2)} = -V_0^{(2)} + 2W \frac{\pi i}{k} \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\hat{\nu}_n}{\cos \pi \hat{\nu}_n} \frac{J_{\hat{\nu}_n}(kr)}{\frac{d}{d\mu} \tilde{\Delta}_\mu} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma)}{\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} \Bigg|_{\mu=\hat{\nu}_n} \times$$

(3.20)

$$P_{-1/2+a_n^1}^{-1}(-\cos \theta), \quad 0 < \theta < \gamma, \quad \tilde{\Delta}_{\hat{\nu}_n} = 0, \quad P_{-1/2+a_n^1}^{-1}(-\cos \gamma) = 0. \quad (3.26)$$

Подставляя представление (3.21), (3.22) или (3.25), (3.26) в (3.1), получаем выражение для составляющих дифрагированного поля. Исследуем в некоторых случаях корни уравнения

$$\frac{\cos \varphi}{\cos^2 \gamma} (\mu^2 - 1/4) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2-\mu}^{-1}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2-\mu}^{-1}(-\cos \gamma) + 2W = 0, \quad (3.27)$$

определяющие спектр собственных значений граничной электродинамической задачи и определяющие поведение магнитного поля вблизи острия:

1)  $W \ll 1$ ,  $\gamma$  – произвольно; как следует из (3.27), корни уравнения с малой правой частью находятся в окрестности корней  $\cos \pi \mu = 0$  (за исключением  $\mu = 1/2$ )

$$\hat{\nu}_n = \frac{1}{2} + n + 2W \sin^2 \gamma (-1)^n n(n+1) \frac{d}{d\gamma} P_n^{-1}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_n^{-1}(-\cos \gamma) + O(W^2), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (3.28)$$

2)  $W \sin^2 \gamma \gg 1$ ; перепишем (3.27) в виде

$$\frac{\pi}{\cos \varphi} (\mu^2 - 1/4) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2-\mu}^{-1}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2-\mu}^{-1}(-\cos \gamma) = -\frac{1}{2W \sin^2 \gamma}, \quad (3.29)$$

(3.21)

из чего следует, что корни его находятся вблизи корней  $\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\zeta_n^{1\pm}}^{-1}(\pm \cos \gamma) = 0$ ;

$$\hat{v}_n = \zeta_n^{1\pm} - \frac{1}{2W \sin^2 \gamma} \frac{\cos \pi \zeta_n^{1\pm}}{\pi(\mu^2 - 1/4)} \frac{d}{d\mu} \left[ \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2-\mu}^{-1}(-\cos \gamma) \right]_{\mu=\zeta_n^{1\pm}} + O(W^{-2}); \quad (3)$$

3)  $\gamma \ll 1$ ,  $W$  – произвольно; подставляя асимптотики для  $\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-1}(\pm \cos \gamma)$  при малых  $\gamma$  [10] (3.27), получаем

$$\hat{v}_n = \frac{1}{2} + n - n(n+1) \frac{W}{1+2W} \frac{\gamma^2}{2} + O(\gamma^4 \ln \frac{2}{\gamma}), \quad n=1, 2, \dots \quad (3)$$

В рассмотренных выше частных случаях ( $W \ll 1$ ;  $W \sin^2 \gamma \gg 1$ ;  $\gamma \ll 1$ ) поведение магнитного поля определяется наименьшим из значений  $\hat{v}_n$  (3.28) – (3.31) и вблизи острия ведет себя как  $(kr)^{\hat{v}}$ , где

$$\hat{v} = \begin{cases} -\frac{1}{4} W \sin^2 2\gamma, & W \ll 1; \\ -\frac{3}{2} + \hat{v}_1, & W \sin^2 \gamma \gg 1; \\ -\frac{W}{1+2W} \gamma^2, & \gamma \ll 1. \end{cases} \quad (3)$$

Принимая во внимание тот факт, что у вершины сплошного конуса магнитное поле при  $\gamma \ll 1$  имеет особенность порядка  $(kr)^{-\gamma^2/2}$ , можно сделать вывод, что в случае б) полупрозрачного конуса ( $\gamma < 1$ ) (3.32), особенность магнитного поля в окрестности острия слабее, чем у сплошного. Характер же поведения полного электрического поля ( $\gamma \ll 1$ ) асимптотически такой же, как и у сплошного конуса.

**Конус с одной узкой щелью.** В этом случае асимптотические разложения потенциалов Дебая по параметру  $(1+u) \ll 1$  для поля вдали от щели имеют вид ( $N=1$ )

$$\begin{aligned} V_d^{(1)} = & -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \int_0^{\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{1 - \delta_{-1}^{(1)}}{\delta_{-1}^{(1)}} \frac{1}{1 - \delta_{-1}^{(1)} + \left(\frac{1+u}{2}\right)} \times \\ & \times \frac{P_{-1/2-i\tau}^{-1}(\cos \gamma)}{P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \gamma)} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \theta) d\tau - \frac{i}{k^2} \cos \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \frac{\sin kr}{r} + \\ & + \frac{1+u}{2} \left\{ \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{A_{i\tau}}{\delta_{-1}^{(1)} \left[ \frac{1 - \delta_{-1}^{(1)}}{\delta_{-1}^{(1)}} + A_{i\tau} \right]} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \gamma)}{\bar{\Delta}_{i\tau}^{-1}} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \theta) d\tau + \right. \\ & + \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \int_0^{\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{1}{1 - \delta_{-1}^{(1)} + \left(\frac{1+u}{2}\right)} \frac{P_{-1/2-i\tau}^{-1}(\cos \gamma)}{P_{-1/2-i\tau}^{-1}(-\cos \gamma)} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \theta) d\tau + \\ & + \sum_{m=-1; 1} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq m}} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} \tilde{C}_{m\tau} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma) \frac{1 - \delta_n^{(1)}}{|n| \delta_n^{(1)}} \times \\ & \times \left. \frac{P_{-1/2+i\tau}^n(-\cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^n(-\cos \gamma)} d\tau - \frac{i}{k^2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \frac{C_1^2 - 1}{C_1^2 - 2C_1 \cos \varphi + 1} \right\} + O\left((1+u)^2 \ln(1+u)\right), \quad \gamma < \theta < \pi, \quad (3) \end{aligned}$$

$$V_d^{(2)} = -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr) (1 - \delta_{-1}^{(2)})}{\sqrt{r} \delta_{-1}^{(2)}} \frac{1}{\frac{1 - \delta_{-1}^{(2)}}{\delta_{-1}^{(2)}} + \left(\frac{1+u}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \gamma)}{\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \theta)} d\tau + \frac{i}{k^2} \sin \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \frac{\sin kr}{r}$$

$$\frac{1+u}{2} \left[ \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{1 - \delta_{-1}^{(2)}}{\delta_{-1}^{(2)}} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \gamma)}{\frac{1 - \delta_{-1}^{(2)}}{\delta_{-1}^{(2)}} + \frac{1+u}{2} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \gamma)} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \theta) d\tau - \right.$$

$$\left. \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \tilde{C}_{m\tau} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma) \frac{\frac{1 - \delta_n^{(2)}}{|n| \delta_n^{(2)}}}{\delta_m^{(2)} \left[ \frac{1 - \delta_n^{(2)}}{|n| \delta_n^{(2)}} + \frac{1 - \delta_m^{(2)}}{\delta_m^{(2)}} \right]} \tilde{\nabla}_{i\tau, n}^{(2), m} \times \right.$$

$$\left. \times \left. \frac{P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \theta)}{\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \gamma)} d\tau - 2i \sin \gamma \frac{C_1 \sin \varphi}{C_1^2 - 2C_1 \cos \varphi + 1} \right\} + O\left(\frac{1+u}{\ln(1+u)}\right), \quad \gamma < \theta < \pi; \quad (3.34)$$

$$\tilde{\nabla}_{i\tau, n}^{(2), m} = \frac{1 - \delta_n^{(j)}}{|n| \delta_n^{(j)}} \frac{1 - \delta_m^{(j)}}{\delta_m^{(j)}} + \frac{1+u}{2}, \quad \tilde{D}_{i\tau}^m = \delta_m^{(2)} \hat{B}_{i\tau} + (1 - \delta_m^{(2)}) + \hat{B}_{i\tau} (1 - \delta_m^{(2)}) \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\delta_p^{(2)}}{|p| (1 - \delta_p^{(2)})},$$

$$|n|^{-\alpha(j)} (1 - \delta_n^{(j)}) = \pi (-1)^{n+j-1} (\sin \gamma)^{1-\alpha(j)} \frac{\Gamma(1/2 + i\tau - n)}{\Gamma(1/2 + i\tau + n)} \frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1}} P_{-1/2+i\tau}^n(\cos \gamma) \frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1}} P_{-1/2+i\tau}^n(-\cos \gamma), \quad j = 1, 2;$$

$$A_{i\tau} = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \tau} P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma); \quad \tilde{\Delta}_{i\tau}^m = \frac{A_{i\tau} \frac{1 - \delta_m^{(1)}}{\delta_m^{(1)}}}{\frac{1 - \delta_n^{(1)}}{\delta_n^{(1)}} + A_{i\tau}} + \frac{1+u}{2};$$

$$\hat{B}_{i\tau} = \frac{\pi \sin^2 \gamma}{\operatorname{ch} \pi \tau} (\tau^2 + 1/4) P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \gamma); \quad \tilde{\nabla}_{i\tau} = \frac{\hat{B}_{i\tau}}{1 + \hat{B}_{i\tau} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{|p|} \frac{\delta_p^{(1)}}{1 - \delta_p^{(1)}}} - \frac{1}{\ln \frac{1+u}{2}}; \quad u = -\cos \frac{d}{2}.$$

Переходя в асимптотических разложениях (3.33), (3.34) к пределу при  $u \rightarrow -1$ , что соответствует исследованию щели, получаем выражения для потенциалов Дебая в случае падения плоской волны на плоский конус (3.21), (3.23).

Спектр собственных значений граничной задачи для сплошного конуса состоит из корней  $P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) = 0$  и  $\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) = 0$  [10]. Наименьший из нулей  $P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)$  характеризует по-

ложение электрического поля у вершины сплошного конуса, а наименьший корень  $\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) = 0$

определяет положение магнитного.

Спектр собственных значений граничной задачи для конуса с продольной щелью определяется кор-

$$(3.33) \quad \dots$$

$$\frac{\frac{\pi}{\cos \pi \mu} (\mu^2 - 1/4) P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) P_{-1/2-\mu}^{-1}(-\cos \gamma)}{1 + \frac{\pi}{\cos \pi \mu} (\mu^2 - 1/4) P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) P_{-1/2-\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} = \frac{1+u}{2};$$

$$\tilde{\Delta}_\mu^{-1} = 0, \tilde{\nabla}_\mu = 0, \tilde{\nabla}_{\mu,n}^{(j),m} \Big|_{m=-1} = 0.$$

Ниже приводятся выражения для собственных значений этой граничной задачи

$$v_n^{p\pm} = \alpha_n^{p\pm} - \frac{1+u}{2} \frac{\Gamma(1/2 + \mu - p)}{\Gamma(1/2 + \mu + p)} \frac{(-1)^p \cos \pi \mu}{\pi \frac{d}{d\mu} \left[ P_{-1/2+\mu}^{-p}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}^{-p}(-\cos \gamma) \right]} \Big|_{\mu=\alpha_n^{p\pm}} + O((1+u)^2), \quad n, p \geq 0;$$

$$\tilde{v}_n^{q\pm} = \tilde{\alpha}_n^{q\pm} - \frac{1+u}{2} \frac{\Gamma(1/2 + \mu - q)}{\Gamma(1/2 + \mu + q)} \frac{(-1)^q \cos \pi \mu}{\pi \sin^2 \gamma \frac{d}{d\mu} \left[ \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-q}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2-\mu}^{-q}(-\cos \gamma) \right]} \Big|_{\mu=\tilde{\alpha}_n^{q\pm}} + O((1+u)^2), \quad q \geq 1; \quad n \geq 0$$

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sin^2 \gamma \ln \frac{1+u}{2}} + O(\ln^{-2}(1+u)).$$

Электрическое поле вблизи острия конуса с узкой щелью характеризуется значением  $v_0^-$  (считают что  $\gamma \leq \pi/2$ ) и ведет себя при  $kr \ll 1$  как  $(kr)^{-3/2+\alpha_0^-}$ , где

$$v_0^- = \alpha_0^- - \left( \frac{1+u}{2} \right) \frac{\cos \pi \alpha_0^-}{\pi P_{-1/2+\alpha_0^-}(\cos \gamma) \frac{d}{d\mu} P_{-1/2-\mu}(-\cos \gamma)} \Big|_{\mu=\alpha_0^-} + O((1+u)^2),$$

$$P_{-1/2+\alpha_0^-}(-\cos \gamma) = 0.$$

Как было отмечено ранее (2.31),

$$\frac{\cos \pi \alpha_0^-}{\pi P_{-1/2-\alpha_0^-}(\cos \gamma) \frac{d}{d\mu} P_{1/2+\mu}(-\cos \gamma)} \Big|_{\mu=\alpha_0^-} > 0,$$

а значения  $\alpha_0^-$  в зависимости от  $\gamma$  даны в таблице 3.1 [51]

Таблица 3.1

$\gamma^0$	2	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\alpha_0^-(\gamma)$	0,62	0,65	0,70	0,77	0,84	0,92	1,07	1,10	1,21	1,34	1,5

Принимая во внимание, что у вершины сплошного конуса электрическое поле особенности не имеет так как определяется слагаемым порядка  $(kr)^{-3/2+\alpha_0^1}$ ,  $3/2 < \alpha_0^1(\gamma)$ ,  $\gamma \leq \pi/2$ , из вышесказанного можно сделать вывод, что наличие узкой щели приводит к появлению особенности у электрического поля. Электрическое поле по мере приближения к острию сплошного конуса растет как  $(kr)^{-3/2+\alpha_0^1}$ , где  $\alpha_0^1(\gamma)$  принимает значения в зависимости от угла раствора конуса [51] (табл. 3.2).

Таблица 3.2

$\gamma^0$	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\tilde{\alpha}_0^1(\gamma)$	1,49	1,48	1,44	1,40	1,36	1,35	1,35	1,38	1,42	1,5

Составляющие магнитного поля вблизи вершины конуса с узкой щелью имеет особенность по порядку  $(kr)^{-3/2-\tilde{\xi}}$ , откуда следует, что наличие узкой щели усиливает особенность магнитного поля по сравнению со сплошным.

В структуре дифрагированного поля присутствуют слагаемые, соответствующие полю для сплошного конуса и слагаемые, обусловленные наличием щели. Одним из последних является волна, соответствующая собственному значению [85]:

$$\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sin^2 \gamma \ln \frac{1+u}{2}} + O(\ln^2(1+u)).$$

Волна с таким же собственным значением (2.67) появляется в структуре поля в случае возбуждения конуса с узкой щелью магнитным радиальным диполем. Механизм образования таких волн (с собственными значениями  $\zeta$  и  $\xi$ ) один и тот же. В спектре собственных значений граничной задачи Неймана для магнитного потенциала Дебая в случае сплошного конуса помимо корней  $\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+\mu}^{-n}(\pm \cos \gamma) = 0, n \geq 1$ , присутствует значение  $\mu = 1/2$ , которое определяет собственную функцию, не вносящую вклад в поле. При появлении узкой щели собственное значение  $\mu = 1/2$  возмущается щелью, и соответствующая ему собственная функция вносит в поле уже ненулевой вклад и характеризует особенность магнитного поля вблизи острого конуса. Однако, слагаемые в представлении (3.34), содержащие волну с собственным значением  $\xi$ , имеют порядок  $O\left(\frac{1+u}{\ln(1+u)}\right)$ , и поэтому в учитываемых членах разложение отсутствуют. Таким образом, при падении на конус с узкой щелью ( $\sin^2 \gamma \ln \frac{1+u}{2} \gg 1$ ) плоской электромагнитной волны в структуре возникает щелевая волна, которая и определяет поведение магнитного поля вблизи острого конуса.

**Узкий конический сектор.** Вдали от ребер узкого конического сектора асимптотика электрического потенциала Дебая  $V_d^{(1)}$  при  $(1-u) \ll 1$  определяется выражением

$$V_d^{(1)} = -\frac{1}{\ln \frac{1-u}{2}} \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in\varphi} \int_0^{\infty} \tau \text{th} \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} P_{-1/2+n}^{-1}(\cos \gamma) \frac{1}{|n|} (1 - \delta_n^{(1)}) \times$$

$$\times \frac{P_{-1/2+n}^{-1}(\pm \cos \theta) H_{\tau}^{(1)}(kr)}{P_{-1/2+n}^{-1}(\pm \cos \gamma) \sqrt{r}} d\tau + \frac{i \sin kr}{2k^2 r} + O\left(\frac{1-u}{\ln(1-u)}\right), \quad (3.35)$$

$$\widehat{M}_{\tau} = \frac{1/A_{\tau}}{1 - \frac{1}{A_{\tau}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{|p|} \delta_p^{(1)}} - \frac{1}{\ln \frac{1-u}{2}}, \quad n \geq 1.$$

Верхние знаки в (3.35) соответствуют области  $0 < \theta < \gamma$ , а нижние  $\gamma < \theta < \pi$ . Магнитный потенциал

Дебая  $V_d^{(2)}$  в этом случае имеет порядок  $O\left(\frac{1-u}{\ln(1-u)}\right)$ . Таким образом, главные члены в разложении со-

ответствующих поля по параметру  $(1-u) \ll 1$  соответствуют главному члену в представлении (3.34) для электрического потенциала Дебая.

Спектр собственных значений, наименьший из которых характеризует поведение поля вблизи вершины узкого конического сектора, определяется корнями уравнений

$$\frac{\cos \pi \mu}{\pi \cos \pi \mu + \pi (-1)^{n+1} n^2 \frac{\Gamma(1/2 + \mu + n)}{\Gamma(1/2 + \mu - n)} P_{-1/2+\mu}^{-n}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}^{-n}(-\cos \gamma)} = \frac{1-u}{2}, \quad (3.36)$$

$$\frac{\cos \pi \mu}{\pi P_{-1/2-\mu}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) - \cos \pi \mu \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{|p|} \delta_p^{(1)}} = \frac{1}{\ln \frac{1-u}{2}}, \quad (3.37)$$

$$\frac{\cos \pi \mu}{\pi \sin^2 \gamma (\mu^2 - 1/4) P_{-1/2-\mu}^{-1}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} = \frac{1-u}{2}, \quad (3.38)$$

$$\frac{\cos \pi \mu}{n \cos \pi \mu + \pi (-1)^n \pi \sin^2 \gamma \frac{\Gamma(1/2 + \mu + n)}{\Gamma(1/2 + \mu - n)} \frac{d}{d\gamma} P_{1/2 - \mu}^{-n}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2 + \mu}^{-n}(-\cos \gamma)} = \frac{1-u}{2}. \quad (3)$$

Корни уравнений (3.36), (3.38) и (3.39) находятся вблизи нулей  $\cos \pi \mu$ , за исключением того  $\mu = 1/2$ . Это ограничение не распространяется на корни (3.37), которые имеют следующий вид

$$\hat{\zeta}_q = \frac{1}{2} + q - \frac{1}{\ln \frac{1-u}{2}} \left\{ [P_q(\cos \gamma)]^2 + 2 \sum_{p=1}^q \frac{(q+p)!}{(q-p)!} [P_q^{-p}(\cos \gamma)]^2 \right\} + O(\ln^{-2}(1+u)). \quad (3)$$

Как следует из (3.40), наименьшим собственным значением спектра является корень

$$\hat{\zeta}_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln \frac{1-u}{2}} + O(\ln^{-2}(1+u)), \quad (3)$$

который характеризует поведение составляющих электрического поля у вершины сектора. Так, например, поведение  $E_\theta$  составляющей вблизи вершины определяется следующим слагаемым

$$\frac{1}{\ln \frac{1-u}{2}} \tilde{A}_1 (kr)^{-3/2 - \hat{\zeta}_0} \hat{G}(\theta, \varphi), \quad (3)$$

где

$$\hat{G}(\theta, \varphi) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sin \theta} \left[ -1 + \operatorname{Re} \left( \frac{1 - b_1 e^{i\varphi}}{\sqrt{b_1^2 e^{2i\varphi} + 2b_1 e^{i\varphi} \cos \frac{\delta}{2} + 1}} \right) \right], & 0 < \theta < \gamma, \\ \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sin \theta} \left[ -1 + \operatorname{Re} \left( \frac{1 - c_1 e^{i\varphi}}{\sqrt{c_1^2 e^{2i\varphi} + 2c_1 e^{i\varphi} \cos \frac{\delta}{2} + 1}} \right) \right], & \gamma < \theta < \pi, \end{cases} \quad (3)$$

$$b_1 = \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \right); \quad c_1 = \left( \frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} \right),$$

здесь  $\delta = (2\pi - d)$  – угловая ширина сектора;  $\tilde{A}_1$  – известный коэффициент.

Сравнивая  $\hat{\zeta}_0$  (3.41) с собственным значением  $\mu_0$  (2.48) в случае возбуждения узкого конического сектора электрическим радиальным диполем, а также распределения электрического поля вблизи вершины (2.49),  $N=1$  и (3.42), (3.43), приходим к выводу, что этим собственным значением соответствует секториальная волна, свойства которой изучены более подробно при возбуждении электрическим радиальным диполем. У вершины сектора магнитное поле ведет себя как  $(kr)^{\hat{\alpha}}$ ,  $\hat{\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{1-u}{2} \sin^2 \gamma (1 + \sin^2 \gamma) + O((1-u)^2)$ .

Таким образом, в отличие от случая возбуждения узкого конического сектора электрическим диполем, в котором особенность у вершины имеет только электрическое поле, а магнитное убывает по приближению к ней, в случае плоской волны особенности вблизи вершины имеет как электрическое, так и магнитное поле, причем электрическое поле имеет большую особенность по сравнению с магнитным.

### 3.3. Случай $H$ - поляризации

Потенциалы Дебая  $\tilde{V}_d^{(j)}$ ,  $j=1,2$ , соответствующие полю плоской волны с векторами  $\mathbf{H}_0 = (H_{0,x}, H_{0,y}, 0)$ ,  $H_{0,x} = -E_{0,y}$ ,  $H_{0,y} = E_{0,x}$  представим в виде интеграла Конторовича–Лебедева

$$\tilde{V}_0^{(1)} = -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{\nu}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} P_{-1/2 + i\tau}^{-1}(\cos \theta) d\tau - i \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \frac{\sin kr}{k^2 r}; \quad (3)$$

$$\tilde{V}_0^{(2)} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{\nu}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} P_{-1/2 + i\tau}^{-1}(\cos \theta) d\tau + i \cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \frac{\sin kr}{k^2 r}.$$

(3.39) Структура потенциалов  $\tilde{V}_d^{(j)}$  такая же, как и в предыдущем случае (3.6), где

$$\tilde{V}_{d, \text{conv}}^{(2)} = \int_0^{\pi} \frac{H_{\pi}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \sum_{m=-1,1} (-i \frac{m}{m})^j \frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1}} P_{-1/2+i\pi}^m(\cos\gamma) \tilde{C}_{m\tau} U_{m\tau}^{(j)} d\tau; \quad (3.45)$$

$$\tilde{V}_{d, \text{conv}}^{(1)} = \text{tg} \frac{\gamma \sin kr}{2 \cdot 2k^2 r} \sum_{m=-1,1} \frac{|m|}{m} U_m^{(1)}, \quad \tilde{V}_{d, \text{conv}}^{(2)} = \frac{i}{4 \cos^2 \gamma} \frac{\sin kr}{2k^2 r} \sum_{2m=-1,1} U_m^{(2)}, \quad (3.46)$$

(3.40) где  $U_m^{(1)}$  и  $U_m^{(2)}$  определены в (3.7) и (3.8) соответственно. В данном случае падение плоской волны неизменно коэффициенты  $x_n^{(j)}$  такие же, как и в предыдущем, а коэффициенты  $\xi_n^{(j)}$  связаны с  $x_n^{(j)}$  соотношением (3.9).

(3.41) Далее приведем решения (3.6), (3.45), (3.46) в случаях полупрозрачного конуса ( $d \rightarrow \pi, d/l \rightarrow 1; N \rightarrow \infty, d/l \rightarrow 0$ ). Для полупрозрачного конуса, когда

$$\lim_{\substack{d \rightarrow \pi \\ d/l \rightarrow 1}} [-\frac{1}{\gamma} \ln \cos \frac{\pi d}{2l}] = Q, \quad (3.42)$$

$$\tilde{V}_d^{(1)} = \frac{1}{k \sqrt{2k}} e^{i\frac{\pi}{4} \sin \varphi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{\tau(\tau^2+1/4)}{\sigma_{i\tau}} \text{th}\pi\tau [P_{-1/2+i\pi}^{-1}(\cos\gamma)]^2 P_{-1/2+i\pi}^{-1}(-\cos\theta) d\tau +$$

$$+ \frac{i \sin \varphi}{k^2 (1+2Q)} \text{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \text{ctg} \frac{\theta \sin kr}{2r}, \quad \gamma < \theta < \pi. \quad (3.47)$$

(3.43) Аналогичное выражение для  $\tilde{V}_d^{(1)}$  и в области  $0 < \theta < \gamma$ . Как и в предыдущем случае падения плоской волны, составляющие дифрагированного поля выражаются только через один потенциал  $\tilde{V}_d^{(1)}$ , так как  $\tilde{V}_d^{(2)} = 0$ . Усредненные граничные условия на поверхности  $\theta = \gamma$  для составляющих электромагнитного поля такие же, как и в случае  $E$ -поляризации (3.16). Для полупрозрачного конуса, когда

$$\lim_{\substack{d \rightarrow \pi \\ d/l \rightarrow 1}} [-\frac{1}{\gamma} \ln \sin \frac{\pi d}{2l}] = W, \quad (3.44)$$

асимптотический потенциал Дебая  $\tilde{V}_d^{(1)}$  такой, как у сплошного конуса [10]

$$\tilde{V}_{d, \text{conv}}^{(1)} = \frac{1}{k \sqrt{2k}} e^{i\frac{\pi}{4} \sin \varphi} \int_0^{\pi} \tau \text{th}\pi\tau e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{P_{-1/2-i\pi}^{-1}(\cos\gamma)}{P_{-1/2-i\pi}^{-1}(-\cos\gamma)} P_{-1/2-i\pi}^{-1}(\cos\theta) d\tau + \frac{i \sin \varphi \text{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \text{ctg} \frac{\theta \sin kr}{2r}}{k^2},$$

где  $\tilde{V}_d^{(2)}$  определяется выражением

$$\tilde{V}_d^{(2)} = -2W \frac{1}{k \sqrt{2k}} e^{i\frac{\pi}{4} \cos \varphi} \int_0^{\pi} \frac{\tau \text{th}\pi\tau e^{-\frac{\pi\tau}{2}} H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\Delta_{i\tau}} \frac{d}{d\gamma} \frac{P_{-1/2+i\pi}^{-1}(\cos\gamma)}{P_{-1/2+i\pi}^{-1}(-\cos\gamma)} P_{-1/2+i\pi}^{-1}(-\cos\theta) d\tau +$$

$$+ \frac{i \cos \varphi}{k^2 (1+2W)} \text{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \text{ctg} \frac{\theta \sin kr}{2r}, \quad \gamma < \theta < \pi. \quad (3.48)$$

Аналогичные выражения и для  $0 < \theta < \gamma$ . Сравнивая выражения для потенциалов Дебая  $V_d^{(j)}$  в случаях  $E$ - и  $H$ -поляризации (3.14), (3.15), (3.21), (3.22), (3.47), (3.48), приходим к выводу, что соответствующие потенциалы Дебая отличаются друг от друга только по  $\varphi$ . Причем это отличие имеет такой же характер, как и у потенциалов Дебая, отвечающих падающему полю (3.4), (3.44). Поведение поля вблизи конуса полупрозрачного конуса будет таким же, как и в случае  $E$ -поляризации. На поверхности  $\theta = \gamma$  составляющие поля удовлетворяют усредненным условиям (3.24).

(3.44) Таким образом, поляризация падающей плоской волны влияет только на зависимость  $\tilde{V}_d^{(j)}$  от азимутального угла, которая такая же, как и у соответствующих потенциалов Дебая падающего поля.

В случае падения  $E$ -поляризованной плоской волны на конус с узкой щелью в представлении для потенциала Дебая слагаемые, соответствующие щелевой волне, порядка  $O((1+u)/\ln(1+u))$ . В случае же  $H$ -поляризованной волны эти слагаемые имеют при себе множитель  $1/\ln(\frac{1+u}{2})$ . Здесь приве-

дем лишь асимптотическое разложение магнитного потенциала Дебая по параметру  $(1+u) \ll 1$  для поля вдали от узкой щели

$$\begin{aligned} \tilde{V}_d^{(2)} = & \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr) (1 - \delta_{-1}^{(2)})}{\sqrt{r} \delta_{-1}^{(2)}} \frac{1}{\frac{1 - \delta_{-1}^{(2)}}{\delta_{-1}^{(2)}} + \left(\frac{1+u}{2}\right)} \times \\ & \times \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \gamma) \\ & - \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \theta) d\tau - \frac{i}{k^2} \cos \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \frac{\sin kr}{r} - \\ & - \frac{1}{\ln \frac{1+u}{2}} \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau \frac{\widehat{B}_{i\tau}}{\widehat{D}_{i\tau}^{-1} \widehat{\nabla}_{i\tau}} e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \gamma) \frac{P_{-1/2-i\tau}^n(-\cos \theta)}{P_{-1/2-i\tau}^n(-\cos \gamma)} d\tau + \\ & + O((1+u)), \gamma < \theta < \pi. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Аналогичное разложение в области  $0 < \theta < \gamma$ . Переходя к интегрированию по мнимой оси в выражении (3.49) и применяя теорему Коши, интегральные члены представляются в виде ряда вычетов по полюсам подынтегральной функции. Этот ряд будет быстро сходиться, когда точка наблюдения находится вблизи острия и позволяет определить поведение магнитного поля при  $kr \ll 1$ . Полученное таким образом представление в виде ряда справедливо только вдали от щели. При любом расположении точки наблюдения относительно кромок щели составляющая поля  $H_{\theta,d}$  вблизи острия характеризуется слагаемым  $H_{\theta,d}^*$ , которое соответствует щелевой волне:

$$\begin{aligned} H_{\theta,d}^* = & -\frac{1}{\ln \frac{1+u}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} (kr)^{-3/2+i\frac{\pi}{2}} G(\theta, \varphi); \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$G(\theta, \varphi) = \begin{cases} b_1 + \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} \left[ -1 + \operatorname{Re} \left( \frac{1 + b_1 e^{i\varphi}}{\sqrt{b_1^2 e^{2i\varphi} + 2b_1 e^{i\varphi} \cos \frac{d}{2} + 1}} \right) \right], & 0 < \theta < \gamma; \\ c_1 + \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} \left[ -1 + \operatorname{Re} \left( \frac{1 - c_1 e^{i\varphi}}{\sqrt{c_1^2 e^{2i\varphi} + 2c_1 e^{i\varphi} \cos \frac{d}{2} + 1}} \right) \right], & \gamma < \theta < \pi. \end{cases}$$

Неограниченный рост слагаемого (3.50) наблюдается при  $|kr| \ll \exp(\ln \tilde{\alpha} / (1 - \tilde{\alpha}))$ , здесь  $\tilde{\alpha} = -1 / \left[ \sin^2 \gamma \ln \left( \frac{1+u}{2} \right) \right]$ , а наибольшее значение  $|G(\theta, \varphi)|$  достигается на щели.

В случае узкого конического сектора асимптотические разложения электрического и магнитного потенциалов Дебая по параметру  $(1-u) \ll 1$  вдали от ребер имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_d^{(1)} = & \frac{1-u}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{in\varphi} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \gamma) \frac{\delta_n^{(1)} (1 - \delta_n^{(1)})}{\frac{1}{n} \delta_n^{(1)} - \frac{1-u}{2}} \times \right. \\ & \times \left. \frac{P_{-1/2-i\tau}^n(-\cos \theta) H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{P_{-1/2+i\tau}^n(-\cos \gamma) \sqrt{r}} d\tau + \frac{2i \operatorname{tg}^2(\gamma/2) \operatorname{ctg}(\theta/2) \sin kr}{k^2 C_1^2 - 2C_1 \cos \varphi + 1} \frac{1}{r} \right\} + O\left(\frac{1-u}{\ln(1-u)}\right), \gamma < \theta < \pi; \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\tilde{V}_d^{(2)} = \frac{1-u}{2} \left\{ -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau \operatorname{th} \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\tau^2 + 1/4} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \gamma) \frac{P_{-1/2-i\tau}^{-1}(-\cos \theta)}{1/\widehat{B}_{i\tau} + (1-u)/2} \frac{P_{-1/2-i\tau}^{-1}(-\cos \gamma)}{P_{-1/2-i\tau}^{-1}(-\cos \gamma)} d\tau + \right.$$

$\epsilon \ll 1$  для пол

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{in\varphi} \int_0^{\infty} \tau \ln \pi \tau e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \gamma) \frac{1}{\delta_n^{(2)} (1-\delta_n^{(2)})} \frac{P_{-1/2+i\tau}^n(-\cos \theta)}{1-\frac{1-u}{2} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^n(-\cos \gamma)} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} d\tau - \\
 & \left. \frac{2(C_1 + \cos \varphi) \operatorname{tg}^2(\gamma/2) \operatorname{ctg}(\theta/2) \sin kr}{k^2 C_1^2 + 2C_1 \cos \varphi + 1} \frac{1}{r} \right\} + O\left(\frac{1-u}{\ln(1-u)}\right), \quad \gamma < \theta < \pi. \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

Аналогичные представления имеют место и для  $0 < \theta < \gamma$ .

В случае узкого конического сектора спектр собственных значений такой же, как и при падении  $E$ -поляризованной плоской волны, и определяется множеством корней уравнений (3.36) – (3.39). Характер плоского поля вблизи вершины не зависит в данном случае от поляризации падающего поля и поэтому особенность поля при  $kr \ll 1$  такая же, как и в случае  $E$ -поляризации. Разница лишь в амплитудном множителе, зависящем от  $(1-u)$ , у слагаемого, характеризующего эту особенность. Следует отметить, что последнее электрического поля определяется собственным значением задачи Дирихле для  $\tilde{V}_d^{(1)}$ , а магнитного – задачи Неймана для  $\tilde{V}_d^{(2)}$  [85]. Волна, соответствующая собственному значению  $\hat{\zeta}_0$  в (3.51) имеет при себе амплитудный множитель порядка  $(1-u)/\ln(1-u)$  в то время как в предыдущем случае при падении плоской волны (3.35) этот множитель порядка  $1/\ln(1-u)$ . Сравнивая выражения для магнитных потенциалов Дебая, приходим к выводу, что в отличие от случая  $E$ -поляризации, в котором слагаемое, характеризующее особенность поля у вершины сектора порядка  $(1-u)/\ln(1-u)$ , в данном случае соответствующее слагаемое в (3.52) имеет при себе множитель  $(1-u)$ .

Представления для решения в случаях полупрозрачной плоскости, плоскости с узким вырезом и узкого конического сектора получаются из выражений для полупрозрачного конуса, конуса с узкой щелью и узкого плоского сектора соответственно, полагая в них  $\gamma = \pi/2$ .

$(1-\tilde{\alpha})$ , здесь

магнитного по

(3.51)

## ГЛАВА 4. Возбуждение биконической поверхности специального вида монохроматическим радиальным источником

Целью настоящей главы является распространение подхода, рассмотренного в предыдущих главах на исследование задачи возбуждения монохроматическим источником биконической структуры, одно плечо которой представляет собой конус с периодическими продольными щелями, а другое – сплошной конический экран.

### 4.1. Возбуждение биконуса электрическим радиальным диполем

**Постановка задачи. Получение СЛАУ-2.** Биконическая поверхность, состоящая из полубесконечного идеально проводящего кругового конуса  $\theta = \gamma_2$  с  $N$ -периодическими прорезанными вдоль ос

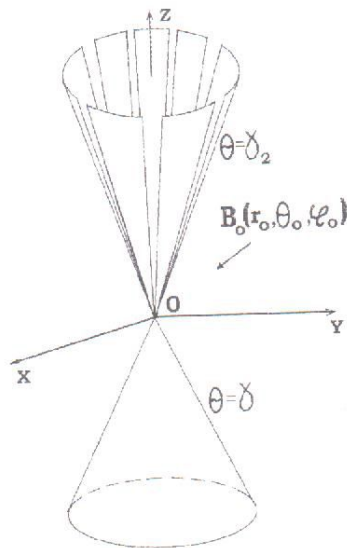


Рис. 4.1. Биконическая структура

зующих щелями шириной  $d_2 = d$  и полубесконечного идеально проводящего сплошного кругового конуса  $\theta = \gamma$ , возбуждается электрическим радиальным диполем с моментом  $\vec{p}$  (рис. 4.1). Диполь находится в точке  $B(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  (временная зависимость взята в виде  $\exp(i\omega t)$ ). Считаем, что  $l = 2\pi/N$  – период структуры,  $k$  – волновое число ( $\text{Im } k \leq 0$ ).

Составляющие рассеянного поля по формулам (2.1) выражаются через электрический потенциал Дебая  $U_p$ , который удовлетворяет:

а) однородному уравнению Гельмгольца вне биконуса и источника  $\Delta U_p + k U_p^2 = 0$ ;

б) граничному условию обращения в нуль тангенциальной составляющей вектора полного электрического поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p$  на поверхности биконуса;

в) условие конечности энергии;

г) принципу предельного поглощения.

Электрическая задача в такой постановке имеет единственное решение [48].

Представим искомым потенциал Дебая  $U_p$  в виде интеграла Ко

ровича-Лебедева

$$U_p = \int_0^{+\infty} \frac{H_{it}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m(\tau, k) U_{m\tau}^{(p)}(\theta, \varphi) d\tau,$$

где

$$\alpha_m(\tau, k) = \frac{\pi \vec{p}}{\sqrt{r_0}} (-1)^m e^{-im\varphi_0} \tau i h_{it} \pi \tau e^{\pi\tau} \frac{\Gamma(1/2 - m + i\tau) H_{it}^{(2)}(kr_0)}{\Gamma(1/2 + m + i\tau) \sqrt{r_0}} P_{-1/2-i\tau}^m(\cos \gamma_2) P_{-1/2-i\tau}^m(-\cos \theta_0),$$

$$U_{m\tau}^{(p)}(\theta, \varphi) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_{mn} P_{-1/2-i\tau}^{m+nN}(\cos \theta) e^{i(m+nN)\varphi}, & 0 < \theta < \gamma_2; \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\hat{g}_{mn}(\tau) P_{1/2-i\tau}^{m+nN}(\cos \theta) + \hat{h}_{mn}(\tau) P_{-1/2-i\tau}^{m+nN}(-\cos \theta)] e^{i(m+nN)\varphi}, & \gamma_2 < \theta < \gamma. \end{cases}$$

Здесь  $\hat{f}_{mn}, \hat{g}_{mn}, \hat{h}_{mn}$  – неизвестные коэффициенты;  $\nu = m/N - m_0$ ;  $m_0$  – ближайшее к  $m/N$  целое;  $\gamma_2 < \theta_0 < \gamma$ ; коэффициенты  $\hat{g}_{mn}, \hat{h}_{mn}$  могут быть выражены через  $\hat{f}_{mn}$ , и поэтому решение задачи сводится к нахождению  $\hat{f}_{mn}$ .

Введем

$$\hat{x}_{m, n-m_0} = \hat{f}_{mn} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos \gamma_2).$$

Используя граничное условие на биконусе и условие непрерывности поля в щелях, приходим к следующей системе функциональных соотношений для неизвестных  $\hat{x}_{m,n}$  [73]:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{x}_{m,n} e^{inN\varphi} = e^{im_0N\varphi}, \pi d/l \ll |N\varphi| < \pi; \quad (4.3)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} N(n+\nu) \frac{|n|}{n} (1-\tilde{\varepsilon}_n) \hat{x}_{m,n} e^{inN\varphi} = \tilde{\delta}_{it}^{(m_0)} e^{im_0N\varphi}, |N\varphi| < \pi d/l, \quad (4.4)$$

$$N(n+\nu) \frac{|n|}{n} (1-\tilde{\varepsilon}_n) = \frac{(-1)^{(n+\nu)/N}}{\pi} ch\pi\tau \frac{\Gamma(1/2+i\tau+(n+\nu)N)}{\Gamma(1/2+i\tau-(n+\nu)N)} \frac{1}{P_{-1/2-i\tau}^{(n-\nu)N}(\cos\gamma_2) P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos\gamma_2)} \frac{1}{1-C_{it}^{(n-\nu)N}}; \quad (4.5)$$

$$C_{it}^{(n+\nu)N} = \frac{P_{-1/2-i\tau}^{(n-\nu)N}(-\cos\gamma) P_{1/2-i\tau}^{(n+\nu)N}(\cos\gamma_2)}{P_{1/2+i\tau}^{(n-\nu)N}(\cos\gamma) P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos\gamma_2)}; \quad (4.6)$$

$$\tilde{\delta}_{it}^{(m_0)} = \chi_{it}^{(m_0)} |N(n+\nu) \frac{|n|}{n} (1-\tilde{\varepsilon}_n)|_{n=m_0}; \quad \chi_{it}^{(m_0)} = \frac{P_{-1/2+i\tau}^{(m_0+\nu)N}(\cos\theta_0) P_{1/2-i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos\gamma)}{P_{-1/2+i\tau}^{(m_0+\nu)N}(-\cos\theta_0) P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(\cos\gamma)}. \quad (4.7)$$

В силу того, что коэффициенты  $\tilde{\varepsilon}_n, C_{it}^{(n+\nu)N}, \chi_{it}^{(m_0)}$ , определенные в (4.5)-(4.7), не зависят от волнового числа, искомые коэффициенты  $\hat{x}_{m,n}$  также не зависят от волнового числа (частотного параметра). Для коэффициентов  $\tilde{\varepsilon}_n$  имеет место оценка при  $(n+\nu)N \gg 1$

$$\tilde{\varepsilon}_n = O\left(\frac{\sin^2\gamma_2}{N^2(n+\nu)^2}\right). \quad (4.8)$$

Неизвестные  $\hat{x}_{m,n}$  находятся в классе коэффициентов, удовлетворяющих условию

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} |\hat{x}_{m,n}|^2 (1+|q|) < +\infty.$$

Для удобства введем коэффициенты  $\hat{y}_{m,n}$ , связанные с  $\hat{x}_{m,n}$  соотношением

$$\hat{x}_{m,n} = \frac{m_0+\nu}{n+\nu} (-1)^{m_0-n} \frac{|n|}{n} (1-\tilde{\delta}_n) \hat{y}_{m,n} + \delta_n^{m_0} \chi_{it}^{(m_0)}, \quad (4.9)$$

$\delta_n^{m_0}$  – символ Кронекера;  $(1-\tilde{\delta}_n) = 1/(1-\tilde{\varepsilon}_n)$ .

Преобразуем систему (4.3), (4.4) к виду

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|n|}{n} (1-\tilde{\delta}_n) \hat{y}_{m,n} e^{in\psi} = (1-\chi_{it}^{(m_0)}) e^{im_0\psi}, |\psi| < \frac{l-d}{l}\pi; \quad (4.10)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{y}_{m,n} e^{in\psi} = 0, \quad \pi \frac{l-d}{l} \ll |\psi| \leq \pi; \quad (4.11)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n+\nu} \frac{|n|}{n} (1-\tilde{\delta}_n) \hat{y}_{m,n} = \frac{1}{m_0+\nu} (1-\chi_{it}^{(m_0)}), \quad (4.12)$$

$$\psi = N\varphi - \frac{|\varphi|}{\varphi}\pi.$$

Используя метод задачи Римана–Гильберта, соотношения (4.10)–(4.12) сведем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений 2-го рода (С. IAU-2) фредгольмовского типа относительно  $\hat{y}_{m,n}$

$$\frac{2P_{\nu-1}(-u)}{P_{\nu}(-u)+P_{\nu-1}(-u)} \hat{y}_{m,0} = \nu V^{m_0}(u) (1-\chi_{it}^{(m_0)}) + \nu \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{|p|}{p} \tilde{\delta}_p V^p(u) \hat{y}_{m,p}; \quad (4.13)$$

$$\hat{y}_{m,s} = (1-\chi_{it}^{(m_0)}) V_{s-1}^{m_0-1}(u) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|n|}{n} \tilde{\delta}_n V_{s-1}^{n-1}(u) \hat{y}_{m,n} + \hat{y}_{m,0} P_s(u), \quad (4.14)$$

где  $V_{s-1}^{n-1}(u)$  и  $V^p(u)$  определены в (2.15), (2.16) соответственно;  $u = \cos \frac{l-d}{l} \pi$ .

Независимость неизвестных коэффициентов  $\hat{y}_{m,n}$  от частотного параметра значительно упрощает процедуру нахождения решения задачи как вблизи центра биконической поверхности ( $kr \ll 1$ ), так и вдали от него ( $kr \gg 1$ ).

Таким образом, исходная электродинамическая задача эквивалентна решению СЛАУ-2 (4.13), (4.14). Эта система аналогична системам (2.11), (2.12), и для произвольных параметров задачи может быть решена методом редукции (усечения), а в случаях полупрозрачного конуса  $\theta = \gamma_2$ , узких щелей, узких конических секторов также методом последовательных приближений без каких-либо ограничений на угол  $\gamma$ . Применение метода последовательных приближений позволяет построить аналитическое решение задачи возбуждения в перечисленных частных случаях биконической структуры.

**Аналитическое решение.** Используя метод последовательных приближений и ограничиваясь при этом первым приближением, получаем

$$\hat{y}_{m,p} = \frac{1}{1 - \frac{p!}{p} \tilde{\delta}_p V_{p-1}^{p-1}(u)} \left\{ (1 - \chi_{ir}^{(m_0)}) [V_{p-1}^{m_0-1}(u) + \hat{\theta}_p^{(m_0)}(u)] + \hat{y}_{m,0} \tilde{W}_p(u) \right\}; \quad (4.1)$$

$$\hat{y}_{m,0} = (1 - \chi_{ir}^{(m_0)}) \frac{V^{(m_0)}(u) + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \frac{\tilde{\delta}_p V^p(u)}{1 - \frac{p!}{p} \tilde{\delta}_p V_{p-1}^{p-1}(u)} [V_{p-1}^{m_0-1}(u) + \hat{\theta}_p^{(m_0)}(u)]}{\frac{P_{v-1}(-u) - P_v(-u)}{v(P_{v-1}(-u) + P_v(-u))} + \frac{1}{v} (1 - \tilde{\delta}_0) - \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \frac{\tilde{\delta}_p V^p(u)}{1 - \frac{p!}{p} \tilde{\delta}_p V_{p-1}^{p-1}(u)} \tilde{W}_p}; \quad (4.1)$$

$$\tilde{W}_p = P_p(u) + \tilde{\delta}_0 V_{p-1}^1(u) + \hat{\theta}_p(u);$$

$$\hat{\theta}_p^{(m_0)}(u) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq p}}^m \frac{1}{1 - \frac{n!}{n} \tilde{\delta}_n V_{n-1}^{n-1}(u)} \frac{[n! \tilde{\delta}_n V_{p-1}^{n-1}(u) V_{n-1}^{m_0-1}(u)]}{[n! \tilde{\delta}_n V_{n-1}^{n-1}(u)]} \left\{ P_p(u) + \tilde{\delta}_0 V_{p-1}^1(u) \right\}; \quad \hat{\theta}_p(u) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq p}}^m \frac{1}{1 - \frac{n!}{n} \tilde{\delta}_n V_{n-1}^{n-1}(u)} \frac{[n! \tilde{\delta}_n V_{p-1}^{n-1}(u)]}{[n! \tilde{\delta}_n V_{n-1}^{n-1}(u)]} \left\{ P_p(u) + \tilde{\delta}_0 V_{p-1}^1(u) \right\}$$

**Предельное решение для биконической поверхности, образованной полупрозрачным и сплошными конусами.** В предельном случае биконической поверхности, когда существует

$$Q = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d/l \rightarrow 1}} \left[ -\frac{1}{N} \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right],$$

получаем решение СЛАУ-2 (4.13), (4.14) для биконуса, одно плечо которого представляет собой полупрозрачный конус, а другое – сплошной, используя приближения (4.15) и (4.16):

$$\hat{x}_{m,0} = \frac{\frac{1}{m} (1 - \tilde{\delta}_0) + 2Q \chi_{ir}^{(m_0)}}{\frac{1}{m} (1 - \tilde{\delta}_0) + 2Q}. \quad (4.1)$$

Электрический потенциал Дебая, соответствующий этому случаю, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{\pi \tilde{p}}{2r_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m+1} e^{im(\varphi - \varphi_0)} \int_0^{+\infty} \tau \theta \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{ir}^{(2)}(kr) H_{ir}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r} \sqrt{r_0}} \frac{1}{m} (1 - \tilde{\delta}_0) \times \\ &\times \frac{\Gamma(1/2 + i\tau - m) R_{ir}^m(\gamma, \theta)}{\Gamma(1/2 + i\tau + m) R_{ir}^m(\gamma_2, \gamma)} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma_2) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta_0) d\tau + \\ &+ \frac{\pi \tilde{p}}{2r_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m-1} e^{im(\varphi - \varphi_0)} \int_0^{+\infty} \tau \theta \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{ir}^{(2)}(kr) H_{ir}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r} \sqrt{r_0}} \frac{\Gamma(1/2 + i\tau - m) R_{ir}^m(\theta, \gamma_2)}{\Gamma(1/2 + i\tau + m) R_{ir}^m(\gamma_2, \gamma)} P_{1/2+i\tau}^m(\cos \theta_0) \times \\ &\times P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \gamma) d\tau + \frac{\pi Q \tilde{p}}{r_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m+1} e^{im(\varphi - \varphi_0)} \int_0^{+\infty} \tau \theta \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{ir}^{(2)}(kr) H_{ir}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r} \sqrt{r_0}} \frac{1}{m} (1 - \tilde{\delta}_0) + 2Q \times \\ &\times \frac{\Gamma(1/2 + i\tau - m) R_{ir}^m(\gamma, \theta)}{\Gamma(1/2 + i\tau + m) R_{ir}^m(\gamma_2, \gamma)} \frac{P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \gamma)}{P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma_2)} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma_2) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta_0) d\tau, \gamma_2 < \theta < \gamma; \end{aligned} \quad (4.)$$

$$\begin{aligned}
 v_p = & \frac{\pi \tilde{p}}{2r_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m+1} e^{im(\varphi-\varphi_0)} \int_0^{+\infty} \tau \text{th} \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r_0}} \frac{1}{m} \frac{(1-\tilde{\delta}_0)}{(1-\tilde{\delta}_0)+2Q} \frac{\Gamma(1/2+i\tau-m)}{\Gamma(1/2+i\tau+m)} \times \\
 & \times P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos\theta_0) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos\theta) d\tau + \frac{\pi Q \tilde{p}}{r_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m e^{im(\varphi-\varphi_0)} \int_0^{+\infty} \tau \text{th} \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r_0}} \times \\
 & \times \frac{1}{m} \frac{\Gamma(1/2+i\tau-m)}{(1-\tilde{\delta}_0)+2Q} \frac{\Gamma(1/2+i\tau+m)}{\Gamma(1/2+i\tau+m)} \frac{P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos\gamma)}{P_{-1/2+i\tau}^m(\cos\gamma)} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos\theta_0) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos\theta) d\tau, 0 < \theta < \gamma_2; \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

$$R_{i\tau}^s(\gamma_2, \gamma) = P_{-1/2+i\tau}^s(\cos\gamma_2) P_{-1/2+i\tau}^s(-\cos\gamma) - P_{-1/2+i\tau}^s(-\cos\gamma_2) P_{-1/2+i\tau}^s(\cos\gamma). \quad R_{i\tau}^s(\gamma_1, \gamma_2) = -R_{i\tau}^s(\gamma_2, \gamma_1)$$

Переходя в выражениях (4.18), (4.19) формально к пределу при  $\gamma \rightarrow \pi$ , что соответствует исчезновению сплошного конуса, получаем представление для  $v_p$  в случае возбуждения одиночного полупрозрачного конуса электрическим радиальным диполем (2.23), (2.24). Формально устремляя  $\gamma_2 \rightarrow 0$  или полагая в (4.18), (4.19)  $\gamma_2 = \gamma$ , приходим к выражениям для потенциала Дебая при возбуждении сплошного конуса электрическим радиальным диполем [8]. Усредненные граничные условия на поверхности  $\theta = \gamma_2$  для составляющих электромагнитного поля такие же, как и в случае одиночного полупрозрачного конуса (2.25).

Полагая  $\theta_0 = 0, \varphi_0 = 0 (m = 0)$ , что соответствует расположению диполя внутри и на оси конуса  $\theta = \gamma_2$ , в дальнейшем будем рассматривать задачу об излучении из конуса с продольными щелями в присутствии сплошного конического экрана. При этом выражение для  $v_p$  приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 v_p = & \frac{\pi^2 \tilde{p}}{2r_0} \int_0^{+\infty} \tau \text{th} \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r_0}} \frac{R_{i\tau}(\gamma, \gamma_2)}{\widehat{\Phi}_{i\tau}} P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma_2) \times P_{-1/2-i\tau}(-\cos\theta) d\tau + \\
 & + \frac{\pi Q \tilde{p}}{r_0} \int_0^{+\infty} \tau \text{th} \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r_0}} \frac{1}{\widehat{\Phi}_{i\tau}} P_{-1/2-i\tau}(-\cos\gamma) P_{-1/2+i\tau}(\cos\theta) d\tau, \gamma_2 < \theta < \gamma, \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

где  $\widehat{\Phi}_{i\tau} = 2QP_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma) + \frac{\pi}{ch\pi\tau} P_{-1/2-i\tau}(\cos\gamma_2) R_{i\tau}(\gamma, \gamma_2), R_{i\tau} = R_{i\tau}^s|_{s=0}$ .

Аналогичное представление и для  $0 < \theta < \gamma_2$ .

Переходя к интегрированию по мнимой оси в (4.20) и используя теорему Коши о вычетах, получаем представление потенциала Дебая в виде ряда вычетов по полюсам подынтегральной функции. Подставляя последнее в (2.1), находим выражения для составляющих поля, вид одной из которых приводится ниже:

$$\begin{aligned}
 E_{\theta p} = & -E_{\theta 0} - \frac{\pi^3 \tilde{p} i}{rr_0 \sqrt{rr_0}} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\widehat{\mu}_p [(\widehat{\mu}_p)^2 - 1/4]}{\cos^2 \pi \widehat{\mu}_p} J_{\widehat{\mu}_p}(kr_0) \frac{d}{dr} (\sqrt{r} H_{\widehat{\mu}_p}^{(2)}(kr)) \frac{R_{\widehat{\mu}_p}(\gamma, \gamma_2)}{\widehat{\Phi}_{\widehat{\mu}_p}} P_{-1/2-\widehat{\mu}_p}(\cos\gamma_2) \times \\
 & \times P_{-1/2+\widehat{\mu}_p}^1(-\cos\theta) + \frac{2\pi^2 i Q \tilde{p}}{rr_0 \sqrt{rr_0}} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\widehat{\mu}_p [(\widehat{\mu}_p)^2 - 1/4]}{\cos \pi \widehat{\mu}_p} J_{\widehat{\mu}_p}(kr_0) \frac{d}{dr} [\sqrt{r} H_{\widehat{\mu}_p}^{(2)}(kr)] \frac{1}{\widehat{\Phi}_{\widehat{\mu}_p}} \times \\
 & \times P_{-1/2+\widehat{\mu}_p}^1(-\cos\gamma) P_{-1/2-\widehat{\mu}_p}^{-1}(\cos\theta), \quad \gamma_2 < \theta < \gamma, r < r_0.
 \end{aligned}$$

Спектр собственных значений определяется корнями уравнения

$$2QP_{-1/2+\mu}(\cos\gamma) + \frac{\pi}{\cos \pi \mu} P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma_2) R_{\mu} = 0.$$

Исследуем эти корни в некоторых частных случаях.

С л у ч а й 1)  $Q \ll 1$ ,

$$\frac{\pi}{\cos \pi \mu} \frac{P_{-1/2-\mu}(\cos\gamma_2)}{P_{-1/2-\mu}(\cos\gamma)} [P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma) P_{-1/2-\mu}(-\cos\gamma_2) - P_{-1/2+\mu}(-\cos\gamma) P_{-1/2-\mu}(\cos\gamma_2)] = -2Q, \quad (4.21)$$

откуда следует, что корни уравнения с малой правой частью находятся вблизи корней  $P_{-1/2-\mu}(\cos\gamma_2) = 0$  и

$$\frac{\pi}{\cos \pi \mu} [P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma) P_{-1/2+\mu}(-\cos\gamma_2) - P_{-1/2-\mu}(-\cos\gamma) P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma_2)] = 0.$$

Результаты численного анализа последних приведены в [11].

Положим  $\gamma = \pi - \gamma_2$ , тогда корни (4.21) расположены только в окрестности корней

$$P_{1/2+\mu}(\cos \gamma_2) = 0;$$

$$\mu_q^+ = \alpha_q^+ - \frac{2Q \cos \pi \alpha_q^+}{\pi P_{-1/2+\alpha_q^+}(-\cos \gamma_2) \frac{d}{d\mu} P_{-1/2-\mu}(\cos \gamma_2)|_{\mu=\alpha_q^+}} + O(Q^2), \quad P_{-1/2-\alpha_q^+}(\cos \gamma_2) = 0, q = 1, 2, 3, \dots$$

Случай 2)  $Q \gg 1$ ,

$$\frac{\cos \pi \mu}{\pi [P_{-1/2-\mu}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma_2) - P_{-1/2-\mu}(-\cos \gamma) P_{-1/2-\mu}(\cos \gamma_2)] P_{-1/2-\mu}(\cos \gamma)} = \frac{1}{2Q} \quad (4.22)$$

Корни этого уравнения определяются выражением

$$\hat{\nu}_s = \hat{\beta}_s + \frac{1}{2Q} \frac{\pi P_{-1/2-\hat{\beta}_s}(-\cos \gamma) [P_{-1/2+\hat{\beta}_s}(\cos \gamma_2)]^2}{\cos \pi \hat{\beta}_s \frac{d}{d\mu} P_{-1/2-\mu}(\cos \gamma)|_{\mu=\hat{\beta}_s}} + O(Q^{-2}); \quad (4.23)$$

$$P_{-1/2+\hat{\beta}_s}(\cos \gamma) = 0, s = 0, 1, 2, \dots$$

При  $Q \rightarrow \infty$ , что соответствует исчезновению конуса  $\theta = \gamma_2$ , собственные значения (4.23) превращаются в собственные значения задачи возбуждения сплошного конуса  $\theta = \gamma$ . Полагая формально  $\gamma_2 = \gamma$ , получим  $\hat{\nu}_s = \hat{\beta}_s$ . Корни (4.22), как это видно из (4.23), находятся вблизи корней  $P_{-1/2-\mu}(\cos \gamma) = 0$ . Используя асимптотику  $\hat{\beta}_s$  при  $(\pi - \gamma) \ll 1$  [107], находим выражение для  $\hat{\nu}_s$  в случае углов раствора сплошного конуса, близких к  $\pi$ .

$$\hat{\nu}_p \approx \frac{1}{2} + p + \frac{1}{2 \ln \left( \frac{2}{\pi - \gamma} \right)} + \frac{1}{2Q} [P_p(\cos \gamma_2)]^2, p = 0, 1, 2, \dots$$

Частным случаем рассматриваемой задачи является задача об излучении из полупрозрачного конуса в присутствии идеально проводящей плоскости ( $\gamma = \pi/2$ ). Корни (4.22) для  $\gamma = \pi/2$  имеют следующий вид

$$\hat{\nu}_p = \frac{3}{2} + 2p + \frac{1}{Q} [P_{2p+1}(\cos \gamma_2)]^2 + O(Q^{-2}), p = 0, 1, 2, \dots$$

Зная спектр собственных значений задачи, нетрудно определить характер поведения поля вблизи центра биконуса ( $kr \ll 1$ ). Волна, соответствующая наименьшему собственному значению, характеризует поле при  $kr \ll 1$ . В случае  $Q \gg 1$  электрическое поле вблизи центра биконической поверхности ведет себя как  $(kr)^{-3+2+\hat{\nu}_0}$ , где  $\hat{\nu}_0$  — наименьший корень (4.22). Учитывая тот факт, что при  $\pi/2 < \gamma < \pi$ ,

$$\hat{\beta}_0(\gamma) < 3/2 \text{ и } \frac{\pi P_{-1/2+\hat{\beta}_0}(-\cos \gamma)}{\cos \pi \hat{\beta}_0 \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma)|_{\mu=\hat{\beta}_0}} > 0, \text{ заключаем, что наличие полупрозрачного конуса ос-$$

лабляет особенность поля у вершины сплошного конуса. Таким образом, вблизи центра ( $kr \ll 1$ ) в этом случае ( $Q \gg 1$ ) электрическое поле имеет более слабую особенность по сравнению с особенностью у вершины сплошной конической поверхности при отсутствии полупрозрачного конуса. По мере приближения к центру наблюдается убывание магнитного поля.

**Асимптотическое решение в случае узких щелей.** Для узких щелей ( $1+u \ll 1$ ) решение системы (4.13), (4.14) имеет вид

$$\hat{y}_0 = \frac{1 - C_{\pi}}{\hat{D}_{\pi} - \frac{1}{N} \ln \frac{1-u}{2}} + O((1+u)^2 \ln(1+u)); \quad \hat{y}_n = \frac{\hat{y}_0}{1 - \frac{in}{n} \hat{\delta}_n V_{n-1}^n(u)} \left[ \frac{1}{2} (P_n(u) + P_{n-1}(u)) + \hat{\theta}_n(u) \right], n \neq 0,$$

где

$$\hat{D}_{\pi} = \frac{1}{N|n|} (1 - \hat{\delta}_n)|_{n=0} = \frac{\pi}{ch\pi\tau} (1 - C_{\pi}) P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma_2) P_{-1/2-i\tau}(-\cos \gamma_2);$$

$$C_{it} = C_{it}^{nN} |_{n=0} = \frac{P_{-1/2+it}(\cos \gamma_2) P_{-1/2-it}(-\cos \gamma)}{P_{-1/2+it}(-\cos \gamma_2) P_{-1/2+it}(\cos \gamma)}, \hat{y}_{0p} = \hat{y}_p.$$

Подставляя найденные коэффициенты в представление (4.1), получим асимптотическое разложение потенциала Дебая по параметру  $(1+u) \ll 1$ ,  $\theta_0 = 0$ .

$$v_p = \frac{\pi \tilde{p}}{2r_0} \int_0^{+\infty} \tau th \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{it}^{(2)}(kr) H_{it}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r} \sqrt{r_0}} \frac{\hat{D}_{it}}{\hat{D}_{it} - \frac{1}{N} \ln \frac{1-u}{2}} \frac{P_{-1/2+it}(-\cos \gamma_2) P_{-1/2-it}(\cos \theta) d\tau +}{P_{-1/2+it}(\cos \gamma) \hat{D}_{it} - \frac{1}{N} \ln \frac{1-u}{2}} d\tau -$$

$$- \sum_{n \neq 0} e^{inN\varphi} \int_0^{+\infty} \tau th \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{it}^{(2)}(kr) H_{it}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r} \sqrt{r_0}} \frac{1 - \tilde{\delta}_n}{N |n| \tilde{\delta}_n} \frac{1 - C_{it}}{\hat{D}_{it} + \frac{1 - \tilde{\delta}_n}{N |n| \tilde{\delta}_n}} \frac{P_{-1/2+it}(-\cos \gamma_2)}{\hat{D}_{it}^{nN}} \times$$

$$\times \left. \frac{P_{-1/2+it}(\cos \theta)}{P_{-1/2+it}(\cos \gamma_2)} d\tau \right\} + O((1+u)^2 \ln(1+u)), 0 < \theta < \gamma_2,$$

$$v_p = \frac{\pi \tilde{p}}{2r_0} \int_0^{+\infty} \tau th \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{it}^{(2)}(kr) H_{it}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r} \sqrt{r_0}} \frac{\hat{D}_{it}}{\hat{D}_{it} - \frac{1}{N} \ln \frac{1-u}{2}} P_{-1/2+it}(-\cos \theta) d\tau +$$

$$+ \frac{1+u}{4N r_0} \int_0^{+\infty} \tau th \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{it}^{(2)}(kr) H_{it}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r} \sqrt{r_0}} \frac{P_{-1/2+it}(-\cos \gamma) P_{-1/2+it}(\cos \theta)}{P_{-1/2+it}(\cos \gamma) \hat{D}_{it} - \frac{1}{N} \ln \frac{1-u}{2}} d\tau +$$

$$+ \sum_{n \neq 0} e^{inN\varphi} \int_0^{+\infty} \tau th \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{it}^{(2)}(kr) H_{it}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r} \sqrt{r_0}} \frac{1 - \tilde{\delta}_n}{N |n| \tilde{\delta}_n} \frac{1 - C_{it}}{\hat{D}_{it} + \frac{1 - \tilde{\delta}_n}{N |n| \tilde{\delta}_n}} \times$$

$$\times \left. \frac{P_{-1/2+it}(-\cos \gamma_2)}{(1 - C_{it}^{nN}) \hat{D}_{it}^{nN}} \left[ C_{it}^{nN} \frac{P_{-1/2-it}(\cos \theta)}{P_{-1/2+it}(\cos \gamma_2)} - \frac{P_{-1/2+it}(-\cos \theta)}{P_{-1/2+it}(-\cos \gamma_2)} \right] d\tau \right\} + O((1+u)^2 \ln(1+u)), \gamma_2 < \theta < \gamma,$$

где

$$\hat{D}_{it}^{nN} = \frac{1}{\hat{D}_{it} \tilde{\delta}_n + \frac{1}{N |n|} (1 - \tilde{\delta}_n)} \frac{(1 - \tilde{\delta}_n) \hat{D}_{it}}{N |n|} + \frac{1}{N} \left( \frac{1+u}{2} \right).$$

Эти выражения получены в предположении, что точка наблюдения находится вдали от кромок щелей. Переходя в (4.24), (4.25) к предельному случаю  $\gamma \rightarrow \pi$ , получаем представление для потенциала Дебая при излучении из одиночного конуса с продольными щелями (2.35). Спектр собственных значений определяется корнями уравнений с малой правой частью

$$\tilde{A}_\mu \frac{P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma_2)}{P_{-1/2-\mu}(\cos \gamma)} = -\frac{1}{N} \left( \frac{1+u}{2} \right); \tag{4.26}$$

$$\frac{\tilde{A}_\mu^{-nN} \tilde{A}_\mu P_{-1/2+\mu}^{nN}(\cos \gamma_2) P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma_2)}{\tilde{A}_\mu^{-nN} P_{-1/2+\mu}^{nN}(\cos \gamma_2) P_{-1/2+\mu}^{nN}(\cos \gamma) + \left[ \frac{\Gamma(1/2+\mu-nN)}{\Gamma(1/2+\mu+nN)} P_{-1/2+\mu}^{nN}(\cos \gamma) - N |n| P_{-1/2-\mu}^{nN}(\cos \gamma_2) \tilde{A}_\mu^{-nN} \right] \tilde{A}_\mu P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma_2)} =$$

$$= -\left( \frac{1+u}{2N} \right), nN \geq 1, \tag{4.27}$$

где  $\tilde{A}_\mu^{-nN} = \frac{(-1)^{nN} \pi}{\cos \pi \mu} R_\mu^{-nN}$ ,  $\tilde{A}_\mu = \tilde{A}_\mu^{-nN} |_{n=0}$ .

Корни уравнения (4.26) лежат в окрестности корней  $\bar{A}_\mu = 0$ ,  $P_{-1/2-\mu}(\cos \gamma_2) = 0$ , а уравнения (4.27) – вблизи нулей  $\bar{A}_\mu^{-q}$ ,  $P_{-1/2+\mu}^{-q}(\cos \gamma_2)$ ,  $q \geq 0$ . В случае, когда  $\gamma = \pi - \gamma_2$ , спектр собственных значений  $\{v_q^{nN+}\}$  с точностью до учитываемых членов в асимптотических разложениях совпадает с подмножеством возмущенного спектра для сплошного конуса, где

$$v_q^{nN+} = \alpha_q^{nN+} - \left( \frac{1+u}{2N} \right) \frac{(-1)^{nN} \cos \pi \mu}{\pi \frac{\Gamma(1/2 + \alpha_q^{nN+} + nN)}{\Gamma(1/2 + \alpha_q^{nN+} - nN)} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos \gamma_2) \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma_2)} \Bigg|_{\mu=\alpha_q^{nN+}} +$$

$$+ O((1+u)^2), nN \geq 0, P_{-1/2+\alpha_q^{nN+}}^{-nN}(\cos \gamma_2) = 0.$$

Таким образом, спектр собственных значений граничной задачи для биконуса, состоящего из конуса с узкими щелями и сплошного конуса, содержит множество возмущенных щелями собственных значений для сплошного конуса и биконуса. Переходя в выражениях (4.24), (4.25) к интегрированию по мнимой оси и используя теорему Коши, получаем представление для потенциалов Дебая в виде ряда вычетов подынтегральной функции. Подставляя последние в (2.1), находим составляющие рассеянного поля. Приведем выражения для азимутальной составляющей магнитного поля в случае, когда  $\gamma = \pi - \gamma_2$ :

$$H_{\varphi p} = -H_{\varphi 0} + \frac{\pi^2 k \tilde{p}}{w r_0 \sqrt{r r_0}} \sum_{p=0}^{\infty} \left( \frac{k r_0}{2} \right)^{v_p^+ - \alpha_p^+} \frac{\alpha_p^+ ((\alpha_p^+)^2 - 1/4) J_{\alpha_p^+}(k r_0)}{\cos \pi \alpha_p^+} \frac{H_{\alpha_p^+}^{(2)}(k r)}{d \frac{d}{d\mu} P_{-1/2-\mu}^{-nN}(\cos \gamma_2) \Big|_{\mu=\alpha_p^+}} \times$$

$$\times P_{-\frac{1}{2}+\alpha_p^+}^{-nN}(\cos \theta) + \frac{k}{w r_0 \sqrt{r r_0}} \left( \frac{1+u}{2N} \right) \left\{ \sum_{p,q=0}^{\infty} \left( \frac{k r_0}{2} \right)^{v_p^+ + 2q} \frac{(-1)^q}{q!} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{m}_{\alpha_p^+}^{-q} + \frac{\cos^2 \pi \mu}{[P_{-\frac{1}{2}-\mu}^{-nN}(-\cos \gamma_2) \frac{d}{d\mu} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-nN}(\cos \gamma_2)]^2} \Bigg|_{\mu=\alpha_p^+} \right\} +$$

$$+ 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \cos nN \varphi \left[ \sum_{p=0}^{\infty} \left( \frac{k r_0}{2} \right)^{v_p^+ - \alpha_p^+} \frac{\alpha_p^+ J_{\alpha_p^+}(k r_0) H_{\alpha_p^+}^{(2)}(k r)}{\frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma_2) \Big|_{\mu=\alpha_p^+}} \frac{d}{d\theta} P_{-1/2+\alpha_p^+}^{-nN}(\cos \theta) + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{\infty} \left( \frac{k r_0}{2} \right)^{v_q^{nN+} - \mu} \frac{\mu J_{\mu}(k r_0) H_{\mu}^{(2)}(k r)}{P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma_2) \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma_2) \Big|_{\mu=\alpha_q^{nN+}}} \cdot \frac{d}{d\theta} P_{-1/2+\alpha_q^{nN+}}^{-nN}(\cos \theta) \right] +$$

$$+ O((1+u)^2 \ln(1+u)), 0 < \theta < \gamma_2, r > r_0.$$

где

$$\hat{m}_{\mu}^n = \frac{d}{d\mu} \hat{n}_{\mu}^n + \frac{d^2}{d\mu^2} \hat{D}_{\mu} \frac{\mu H_{\mu}^{(2)}(k r)}{\cos \pi \mu \Gamma(\mu + n + 1)} \frac{P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos \gamma_2)}{\frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma_2)} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \theta),$$

$$\hat{n}_{\mu}^n = \frac{\pi \mu H_{\mu}^{(2)}(k r)}{\Gamma(\mu + n + 1) \cos^2 \pi \mu} \left\{ [P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos \gamma_2)]^2 - [P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma_2)]^2 \right\} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \theta).$$

Поведение компонент поля при  $kr \ll 1$  характеризуется наименьшим корнем  $v_0^+$  уравнения (4.27)  $\gamma = \pi - \gamma_2$ :

$$v_0^+ = \alpha_0^+ - \left( \frac{1+u}{2N} \right) \frac{\cos \pi \alpha_0^+}{\pi P_{-1/2+\alpha_0^+}^{-nN}(-\cos \gamma_2) \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\alpha_0^+}^{-nN}(\cos \gamma_2) \Big|_{\mu=\alpha_0^+}} + O((1+u)^2).$$

При этом электрическое поле по мере приближения к центру биконуса ведет себя как  $(kr)^{-3/2+v_0^+}$ , магнитное – как  $(kr)^{-1/2+v_0^+}$ .

Важным частным случаем рассматриваемой задачи является задача об излучении из щелей конуса в присутствии сплошной плоскости ( $\gamma = \pi/2$ ). В гл. 2 приведены результаты исследования задачи об излучении из продольных щелей одиночного конуса. Выпишем выражение для потенциала Дебая в случае излучения из узких щелей при наличии сплошной плоскости и сравним его с формулой (2.38):

$$v_p = -v_0 + \left(\frac{1+u}{N}\right) \frac{\pi i \tilde{p}}{r_0 \sqrt{rr_0}} \sum_{n,s=0}^{+\infty} \epsilon_n \cos nN\varphi \frac{\alpha_s^+ B(\alpha_s^+, \nu_s^+)}{\frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma_2)} \Big|_{\mu=\alpha_s^+} \times$$

$$\times \frac{P_{-1/2+\alpha_s^-}(-\cos \theta) - P_{-1/2-\alpha_s^+}(\cos \theta)}{P_{-1/2+\alpha_s^-}(-\cos \gamma_2) - P_{-1/2-\alpha_s^+}(\cos \gamma_2)} + O((1+u)^2 \ln(1+u)), \gamma_2 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad (4.28)$$

где  $B(\alpha_s^+, \nu_s^+)$  и  $\epsilon_n$  определены в (2.38). Асимптотическое разложение (4.28) получено в предположении, что точка наблюдения находится вдали от кромок щелей. Спектр собственных значений граничной задачи для одиночного конуса с продольными щелями представляет собой совокупность возмущенных щельями корней  $P_{-1/2+\mu}(\pm \cos \gamma) = 0, n \geq 0$ , в то время, как для конуса с плоскостью только  $P_{-1/2-\mu}(\cos \gamma) = 0$ . Этот факт в частности, обусловлен отражающим воздействием сплошной плоскости. В области  $\gamma_2 < \theta < \pi/2$  в членах ряда (4.28) присутствуют множители, содержащие разность функций Лежандра с аргументами противоположных знаков, что объясняется существованием прямой волны (излученной из щелей) и отраженной от плоскости.

**Узкие конические секторы.** В этом случае биконическая структура состоит из сплошного конуса и конической поверхности, образованной расходящимися из вершины ( $r=0$ ) узкими секторами ( $(l-d)/l \ll 1$ ). Используя в приближениях (4.15), (4.16) поведение функций  $V_{n-1}^m(u)$  и  $P_\nu(-u)$  при  $(1-u) \ll 1$ , а для  $\hat{\theta}_p^o(U)$  и  $\hat{\theta}_p^o(U)$  оценки, аналогичные (2.19) – (2.21), получаем решение СЛАУ-2 (4.13), (4.14) для этого случая:

$$\hat{y}_0 = -\frac{N}{\ln \frac{1-u}{2}} \frac{1}{\hat{D}_{ir}} - \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|s|} \frac{\delta_s}{\hat{D}_{ir}} \frac{1}{N \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|s|} \delta_s} - \frac{1}{N \ln \frac{1-u}{2}} + O\left(\frac{1-u}{\ln(1-u)}\right).$$

Подставляя это выражение в (4.15), находим  $\hat{y}_n$  при  $n \neq 0$ . Далее нетрудно определить коэффициенты  $\hat{f}_n, \hat{g}_n, \hat{h}_n$  в представлении (4.1) по следующим формулам:

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{P_{-1/2-ir}(\cos \gamma_2)} [\hat{D}_{ir} \hat{y}_0 + C_{ir}];$$

$$\hat{f}_n = \frac{\hat{y}_0}{P_{-1/2+ir}^{nN}(\cos \gamma_2)} \frac{(-1)^n}{1 - \frac{n!}{n} \delta_n V_{n-1}^{n-1}(u)} \left[ \frac{1}{2} (P_n(u) + P_{n-1}(u)) + \hat{\theta}_n(u) \right], n \neq 0;$$

$$\hat{g}_n = \frac{C_{ir}^{nN}}{1 - C_{ir}^{nN}} \hat{f}_n, n \neq 0; \quad \hat{g}_0 = \frac{1}{P_{-1/2+ir}(\cos \gamma_2)} \frac{C_{ir}}{1 - C_{ir}} [1 - \hat{f}_0 P_{-1/2-ir}(\cos \gamma_2)];$$

$$\hat{h}_n = \frac{\hat{f}_n}{1 - C_{ir}^{nN}} \frac{P_{-1/2+ir}^{nN}(\cos \gamma_2)}{P_{-1/2+ir}^{nN}(-\cos \gamma_2)}, n \neq 0; \quad \hat{h}_0 = \frac{\hat{f}_0 P_{-1/2+ir}(\cos \gamma_2) - C_{ir}}{(1 - C_{ir}) P_{-1/2+ir}(-\cos \gamma_2)}.$$

Выражение для электрического потенциала  $v_p$  имеет вид

$$v_p = v_{p,sol} - \frac{1}{\ln \frac{1-\varepsilon}{2}} \frac{\pi \tilde{p}}{2r_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{inN\varphi} \int_0^{+\infty} \tau \theta \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{ir}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r_0}} \frac{H_{ir}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} (1 - C_{ir}) \times$$

$$\times P_{-1/2+ir}(-\cos \gamma_2) \frac{1}{|n|} \frac{(1 - \delta_n)}{(\hat{D}_{ir} - \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|s|} \delta_s) \hat{F}_{ir}} \frac{P_{-1/2-ir}^{nN}(\cos \theta)}{P_{-1/2-ir}^{nN}(\cos \gamma_2)} d\tau + O\left(\frac{1-u}{\ln(1-u)}\right), 0 < \theta < \gamma_2, \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
 v_p = v_{p,\text{sol}} - \frac{1}{\ln \frac{1-u}{2}} \frac{\pi \tilde{p}}{2r_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{in\varphi} \int_0^{+\infty} \tau i h \pi \tau e^{\pi \tau} \frac{H_{it}^{(2)}(kr_0) H_{it}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r_0} \sqrt{r}} \frac{(1-C_{it}) P_{-1/2-\pi}(-\cos \gamma_2) \frac{1}{|n|} (1-\tilde{\delta}_n)}{(1-C_{it}^{nN}) \chi \hat{D}_{it} - \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|s|} \tilde{\delta}_s} \hat{F}_{it} \\
 \times \left[ \frac{P_{-1/2+\pi}^{nN}(-\cos \theta)}{P_{-1/2-it}^{nN}(-\cos \gamma_2)} - C_{it}^{nN} \frac{P_{-1/2+\pi}^{nN}(\cos \theta)}{P_{-1/2-it}^{nN}(\cos \gamma_2)} \right] d\tau + O\left(\frac{1-u}{\ln(1-u)}\right), \gamma_2 < \theta < \gamma. \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

где

$$\hat{F}_{it} = \frac{1}{\hat{D}_{it} - \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|s|} \tilde{\delta}_s} - \frac{1}{N \ln \frac{1-u}{2}},$$

а  $v_{p,\text{sol}}$  представляет собой электрический потенциал Дебая, соответствующий рассеянному одиночным сплошным конусом  $\theta = \gamma$  полю в отсутствии конической поверхности  $\theta = \gamma_2$ .

Устремляя формально ширину конических секторов к нулю ( $u \rightarrow 1$ ), из (4.29), (4.30) получаем известные выражения для  $v_{p,\text{sol}}$  в случае возбуждения сплошного конуса  $\theta = \gamma$  электрическим радиальным диполем (2.37). С другой стороны, устремляя угол раствора сплошного конуса к  $\pi$  ( $\gamma \rightarrow \pi$ ) и используя асимптотику функций  $P_{-1/2+\mu}^q(\cos \gamma)$  при  $(\pi - \gamma) \ll 1$  [98, 107], приходим к выражениям для потенциалов Дебая в случае возбуждения системы проводников, расположенных на конической поверхности (2.46).

В рассматриваемом случае биконической поверхности спектр собственных значений состоит из множества корней уравнения с малой правой частью ( $N/\ln((1-u)/2) \ll 1$ )

$$\begin{aligned}
 \frac{P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma)}{\left[ P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma) \frac{1}{Nn} - \frac{\Gamma(1/2 + \mu + nN)}{\Gamma(1/2 + \mu - nN)} \tilde{A}_\mu^{-nN} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma_2) \right] P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma) - \tilde{I}_\mu P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma)} = \\
 = -\frac{N}{\ln \frac{1-u}{2}}, \quad nN \geq 1, \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

$$\tilde{I}_\mu = \tilde{A}_\mu P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma_2) - \frac{1}{N} P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma) \sum_{\substack{p>0 \\ p \neq n}} \frac{1}{|p|} \tilde{\delta}_p.$$

Корни уравнения (4.31) находятся в окрестности нулей присоединенных функций Лежандра  $P_{-1/2+\mu}^{-m}(\cos \gamma)$ ,  $m \geq 0$  и имеют вид ( $\gamma \neq \pi/2$ )

$$\begin{aligned}
 z_s = \hat{\beta}_s - \frac{N}{\ln \frac{1-u}{2}} \frac{\pi P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) [P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma_2)]^2}{\cos \pi \mu \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma)} \Bigg|_{\mu = \hat{\beta}_s} + O(\ln^2(1-u)); \\
 z_s^{-nN} = \alpha_s^{-nN} - \frac{N}{\ln \frac{1-u}{2}} \frac{\pi (-1)^{nN} \Gamma(1/2 + \mu + nN)}{\cos \pi \mu \Gamma(1/2 + \mu - nN)} \frac{P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos \gamma)}{\frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma)} \times \\
 \times [P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos \gamma_2)]^2 \Bigg|_{\mu = \alpha_s^{-nN}} + O(\ln^2(1-u)), \quad nN \geq 1, \quad s \geq 0; \quad P_{-1/2+\alpha_s^{-nN}}^{-nN}(\cos \gamma) = 0.
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что при  $\gamma \geq \pi/2$ ,  $nN \geq 1$  наименьшим корнем уравнения (4.31) и, соответственно, наименьшим собственным значением спектра является  $z_0$ . Для  $\gamma \neq \pi/2$

$$z_0 = \hat{\beta}_0 - \frac{N}{\ln \frac{1-u}{2}} \frac{\pi P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) [P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma_2)]^2}{\cos \pi \mu \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma)} \Bigg|_{\mu = \hat{\beta}_0} + O(\ln^2(1-u)). \quad (4.32)$$

Как было отмечено ранее, при  $\pi/2 < \gamma < \pi$ ,

$$\frac{P_{-1/2+\hat{\beta}_0}(-\cos\gamma)}{\cos\pi\hat{\beta}_0 \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma)|_{\mu=\hat{\beta}_0}} > 0,$$

и поэтому слагаемое с множителем  $N/\ln((1-u)/2)$  в (4.32) имеет положительные значения. В случае углов раствора сплошного конуса, близких к  $\pi$  ( $\pi - \gamma \ll 1$ ),  $z_0$  определяется следующим выражением

$$z_0 \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2\ln\left(\frac{2}{\pi-\gamma}\right)} - \frac{N}{\ln\frac{1-u}{2}}, \quad \left(-\frac{N}{\ln\frac{1-u}{2}}\right) > 0. \quad (4.33)$$

Устремляя в (4.33)  $\gamma$  к  $\pi$ , получаем наименьшее собственное значение спектра (2.48) для системы из  $N$  узких секторов при возбуждении электрическим радиальным диполем.

Полагая в (4.31)  $\gamma = \pi/2$ , что соответствует развороту сплошного конуса в плоскость, находим в этом случае спектр собственных значений, наименьшее из которых

$$z_0 = 3/2 - \frac{2\cos^2\gamma_2}{\frac{1}{N}\ln\frac{1-u}{2}} + O(\ln^{-2}(1-u)). \quad (4.34)$$

Характер поведения полного электрического поля при  $kr \ll 1$  определяется слагаемым порядка  $(kr)^{-3/2-z_0}$ , а магнитного  $-(kr)^{-1/2+z_0}$ . Таким образом, как это следует из выражений для  $z_0$  (4.32) – (4.34), поведение поля вблизи центра биконической поверхности ( $kr \ll 1$ ) зависит от угла раствора сплошного конуса  $\theta = \gamma$  и присутствия узких секторов. Известно, что вблизи острия сплошного конуса ( $\gamma > \pi/2$ ) при возбуждении его электрическим радиальным диполем, электрическое поле имеет особенность порядка  $(kr)^{-3/2+\hat{\beta}_0}$ . Отсюда можно сделать вывод, что наличие узких конических секторов ослабляет особенность поля при  $kr \ll 1$ .

Используя теорему Коши о вычетах, можно представить  $U_p$ , а, соответственно, и составляющие рассеянного поля в виде ряда вычетов подынтегральной функции. Представление решения в виде ряда удобно для изучения поля при  $kr \ll 1$  или  $kr_0 \ll 1$ , так как в этих случаях ввиду быстрой сходимости ряда можно ограничиться только несколькими его членами. Однако в дальней зоне ( $kr \gg 1$ ) этот ряд сходится медленно и поэтому целесообразно воспользоваться интегральным представлением потенциала Дебая (4.29) или (4.30), предварительно заменив функцию Ханкеля  $H_n^{(2)}(kr)$  ее асимптотикой при  $kr \gg 1$  [100]. Рассеянное поле в этом случае биконической поверхности является полем ТМ-типа эллиптической поляризации.

#### 4.2. Возбуждение магнитным радиальным диполем незамкнутого конуса со сплошным коническим экраном

**Постановка задачи. Метод решения.** Рассмотрим задачу о возбуждении магнитным радиальным диполем полубесконечного тонкого кругового идеально проводящего конуса с периодически прорезанными вдоль образующих  $N$  щелями, содержащего внутри себя полубесконечный тонкий круговой сплошной конус (вершины и оси конусов совпадают) (рис. 4.2). Считаем, что поле диполя, расположенного в точке  $B_0$  и имеющего направленный на вершину момент  $p$ , меняется во времени гармонически. Во введенной сферической системе координат с началом в общей вершине сплошной конус  $\Sigma_1$  определяется уравнением  $\theta = \gamma_1$ , а конус с продольными щелями  $\Sigma_2$  – уравнением  $\theta = \gamma_2$  ( $r_0, \theta_0, \varphi_0$  – координаты источника). Ширина щелей  $d_2$  и период  $l = 2\pi/N$  конуса  $\Sigma_2$  – угловые величины. Электромагнитное поле  $E, H$  в среде с конической структурой  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  и источником удовлетворяет системе уравнений Максвелла, граничному условию обращения в нуль тангенциальной составляющей электрического поля на поверхности  $\Sigma$ , усло-

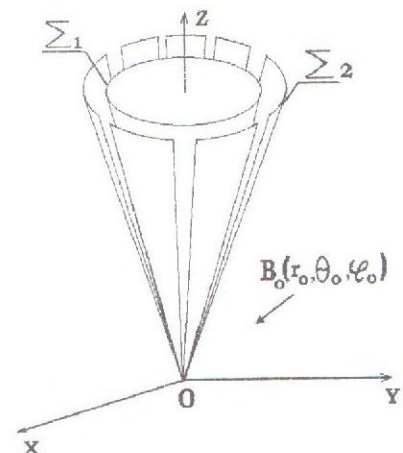


Рис.4.2. Геометрия структуры

вию на бесконечности и условию ограниченности энергии. Электродинамическая задача в такой постановке имеет единственное решение.

Представим  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1, \quad (4.35)$$

где  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$  – поле диполя,  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  – рассеянное структурой  $\Sigma$  поле. Для решения электродинамической задачи используем магнитный потенциал Дебая  $\mathcal{G}(r, \theta, \varphi)$ , через который выразим составляющие электромагнитного поля  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  по формулам, полученными из (1.30)

$$E_r = 0; \quad E_\theta = -\frac{qw}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \mathcal{G}; \quad E_\varphi = qw \frac{\partial}{\partial\theta} \mathcal{G};$$

$$H_r = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - q^2 \right) (r\mathcal{G}); \quad H_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial\theta} (r\mathcal{G}); \quad H_\varphi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial\varphi} (r\mathcal{G}), \quad (4.36)$$

где  $q = -ik$  ( $\text{Im } k \geq 0$ ) – при гармонической зависимости от времени  $t$  в виде  $\exp(i\omega t)$  (см. (2.2));  $q = ik$  ( $\text{Im } k \leq 0$ ) – при гармонической зависимости от времени  $t$  в виде  $\exp(-i\omega t)$ ;  $k$  – волновое число;  $w = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  – волновое сопротивление среды с диэлектрической  $\varepsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостями.

Искомый потенциал Дебая  $\mathcal{G}$  удовлетворяет

1) однородному уравнению Гельмгольца  $\Delta\mathcal{G} - q^2\mathcal{G} = 0$  вне структуры и источника;

2) граничному условию Неймана на поверхности конической структуры

$$\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n} \Big|_\Sigma = 0; \quad (4.37)$$

3) принципу предельного поглощения;

4) условию ограниченности энергии.

В соответствии со структурой полного поля (4.35)  $\mathcal{G}$  ищем в виде

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1, \quad \mathcal{G}_0 = b_0 \frac{e^{-q|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|},$$

$\mathcal{G}_0(r, \theta, \varphi)$  – потенциал Дебая поля диполя;  $\mathcal{G}_1(r, \theta, \varphi)$  – потенциал для рассеянного поля;  $b_0 = -\frac{w|\mathbf{p}|}{qr_0}$ . Не-

известный потенциал  $\mathcal{G}_1$  будем искать в виде интеграла Конторовича–Лебедева относительно радиальной координаты сферической системы координат:

$$\mathcal{G}_1 = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \tau \text{sh}\pi\tau \tilde{\mathcal{G}}_1 \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau; \quad \tilde{\mathcal{G}}_1 = \int_0^\pi \mathcal{G}_1 \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau;$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_1 = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau} \tilde{\mathcal{G}}_{m\tau}^{(1)}(\theta, \varphi) P_{-1/2-i\tau}^m(-\cos\theta_0) \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos\gamma_2);$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{m\tau}^{(1)} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\tilde{\beta}_{mn} P_{-1/2+i\tau}^{m+n}(\cos\theta) + \tilde{\xi}_{mn} P_{-1/2+i\tau}^{m+n}(-\cos\theta)] e^{i(m+n)\varphi}, & \gamma_1 < \theta < \gamma_2; \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\eta}_{mn} P_{-1/2-i\tau}^{m+n}(-\cos\theta) e^{i(m+n)\varphi}, & \gamma_2 < \theta < \pi. \end{cases}$$

где  $K_\nu(z)$  – функция Макдональда;  $\tilde{\beta}_{mn}, \tilde{\xi}_{mn}, \tilde{\eta}_{mn}$  – искомые коэффициенты.

Считаем, что источник расположен вне конуса  $\Sigma_2$  ( $\gamma_2 < \theta_0$ ). Связь между неизвестными коэффициентами и функциональные уравнения для их определения находятся из условий непрерывности поля (потенциала Дебая и его частных производных) в щелях и граничных условий (4.37) на сплошном конусе  $\Sigma_1$  и секторах конуса  $\Sigma_2$ . В результате приходим к следующей системе функциональных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $y_n^{(m_0)}$ , через которые выражаются искомые коэффициенты:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n^{(m_0)} e^{in\varphi} = 0, \quad \pi d_2/l < |N\varphi| \leq \pi; \quad (4.38)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} (1-\varepsilon_n) y_n^{(m_0)} e^{inN\varphi} = -\frac{1}{N(m_0+\nu)} g_{\tau}^{(m_0)} e^{im_0N\varphi}, \quad |N\varphi| < \pi d_2/l; \quad (4.39)$$

$$g_{\tau}^{(n)} = \frac{|n|}{n} (1-\varepsilon_n) (1-\tilde{C}_{\tau}^{(n-\nu)N}); \quad \tilde{C}_{\tau}^M = \frac{\frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+i\tau}^M(\cos\gamma_1) \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2-i\tau}^M(-\cos\gamma_2)}{\frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+i\tau}^M(-\cos\gamma_1) \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^M(\cos\gamma_2)};$$

$$\frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} (1-\varepsilon_n) = \frac{(-1)^{(n-\nu)N+1} ch\pi\tau \Gamma(1/2+i\tau+(n+\nu)N)}{\pi \sin^2 \gamma_2 \Gamma(1/2+i\tau-(n+\nu)N)} \times$$

$$\times \frac{1}{\frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^{(n-\nu)N}(\cos\gamma_2)} \frac{1}{\frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos\gamma_2)} (1-\tilde{C}_{\tau}^{(n+\nu)N}).$$

Система (4.38), (4.39) также может быть получена из (1.77) – (1.80). Для коэффициентов  $\varepsilon_n$  имеем

место оценка при  $(n+\nu)N \gg 1$   $\varepsilon_n = O\left(\frac{\sin^2 \gamma_2}{(n+\nu)^2 N^2}\right)$ .

Используя процедуру регуляризации уравнений (4.38), (4.39) и метод решения задачи Римана-Гильберта [43, 44], сведем исходную задачу к решению систем линейных алгебраических уравнений 2-го рода фредгольмовского типа (СЛАУ-2) относительно коэффициентов  $x_n^{(m_0)} = y_n^{(m_0)} + \delta_n^{(m_0)}$  следующего вида:

$$x_n^{(m_0)} - \delta_n^{m_0} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_{np} (x_p^{(m_0)} - \delta_p^{m_0}) - g_{\tau}^{(m_0)} V_{n-1}^{m_0-1}(u_2), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (4.40)$$

$$M_{\nu}(-u_2)(x_0^{(m_0)} - \delta_0^{m_0}) = N \cdot \nu \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{|n|}{n} \varepsilon_n (x_0^{(m_0)} - \delta_0^{m_0}) - g_{\tau}^{(n)} \delta_n^{m_0} \right] V^p(u_2); \quad (4.41)$$

$$b_{np} = \frac{|p|}{p} \varepsilon_p V_{n-1}^{m_0-1}(u_2) + \delta_p^0 P_n(u_2), \quad u_2 = \cos(\pi d_2/l); \quad M_{\nu}(-u_2) = \frac{2P_{\nu-1}(-u_2)}{P_{\nu}(-u_2) + P_{\nu-1}(-u_2)};$$

$$V^p(u_2) = \frac{1}{p+\nu} \{P_p(u_2) + M_{\nu}(-u_2) V_{p-1}^{-1}(u_2)\}.$$

Матричные коэффициенты СЛАУ-2 (4.40), (4.41) не зависят от волнового числа  $k$ , что существенно упрощает алгоритм построения диаграмм рассеяния и определения поля вблизи вершины структуры. Для любых параметров задачи решение СЛАУ-2 может быть получено численно методом редукции, а в случае полупрозрачного конуса, узких щелей, узких конических секторов также методом последовательных приближений.

**Аналитическое решение в случае полупрозрачного конуса  $\Sigma_2$ .** Рассмотрим коническую структуру, состоящую из сплошного конуса и полупрозрачного конуса  $\Sigma_2$ , который определяется существованием предела

$$W_2 = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d_2/l \rightarrow 0}} \left[ -\frac{1}{N} \ln \sin \frac{\pi d_2}{2l} \right].$$

В этом случае  $m_0 = 0$ ,  $m = N\nu$  и  $x_n^{(0)} = -\frac{1}{m} \frac{g_{\tau}^{(m)}}{\Phi_{\tau}^{(m)} + 2W_2} + \delta_n^0, \forall n \in Z$ , а также

$$\mathcal{A} = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \int_0^{+\infty} \tau sh\pi\tau \tilde{a}_{m\tau} \frac{K_{\tau}(qr) \Phi_{\tau}^{(m)} \tilde{C}_{\tau}^m + 2W_2}{\sqrt{r} \Phi_{\tau}^{(m)} + 2W_2} B_{\tau}^m P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos\theta) d\tau, \quad \gamma_2 < \theta < \pi, \quad (4.42)$$

где

$$\Phi_{\tau}^{(m)} = \frac{1}{m} (1-\varepsilon_0), \quad B_{\tau}^m = \frac{\frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos\gamma_2)}{\frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos\gamma_2)} P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos\theta_0).$$

Аналогичное представление имеет место и для  $\gamma_1 < \theta < \gamma_2$ . Формальный переход в правой части (4.42) к пределу при  $\gamma_1 \rightarrow 0$  (исчезновение сплошного конуса) приводит к представлению для  $\mathcal{A}_1$  в случае возбуждения одиночного конуса  $\Sigma_2$  с продольными щелями (2.57). При  $W_2 \rightarrow 0$  (исчезновение полупрозрачного конуса  $\Sigma_2$ ) в результате предельного перехода в (4.42) получаем выражение для потенциала Дебая в случае возбуждения сплошного конуса  $\Sigma_1$  [8].

Рассмотрим случай, когда источник находится вне и на оси конуса  $\Sigma_2$  ( $\varphi_0 = 0, \theta_0 = \pi, \nu = 0$ ). Тогда выражение для  $\mathcal{A}_1$  (4.42) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 = & -\frac{1}{2\pi^3} \frac{\bar{b}}{\sin^2 \gamma_2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \frac{K_{i\tau}(qr) K_{i\tau}(qr_0)}{\sqrt{r} \sqrt{r_0}} \frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2-i\tau}(\cos \gamma_1) \frac{P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta)}{T_{i\tau}} d\tau - \\ & - \frac{\bar{b} W_2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau \frac{K_{i\tau}(qr) K_{i\tau}(qr_0)}{\sqrt{r} \sqrt{r_0}} \frac{\Delta_{i\tau}}{T_{i\tau}} \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2-i\tau}(\cos \gamma_2) P_{-1/2+i\tau}(-\cos \theta) d\tau, \quad \gamma_2 < \theta < \pi, \end{aligned} \quad (4.43)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{i\tau} = & \frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2-i\tau}(\cos \gamma_1) \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma_2) - \frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma_1) \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma_2), \\ T_{i\tau} = & \frac{ch\pi\tau}{\pi \sin^2 \gamma_2} \frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma_1) + 2W_2 \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma_2) \Delta_{i\tau}, \end{aligned}$$

$\bar{b}$  – известный коэффициент.

После введения новой переменной интегрирования  $\zeta = i\tau$  в интеграле (4.43) (переход к интегрированию по мнимой оси) и использования основной теоремы о вычетах можно получить представления для  $\mathcal{A}_1$  в виде ряда по полюсам подынтегральной функции (подобная процедура была использована при получении (2.60)). Этот ряд быстро сходится в случаях, когда или точка наблюдения ( $qr \ll 1$ ), или источник ( $qr_0 \ll 1$ ) находятся вблизи общей вершины конусов (начала координат). Для нахождения поля в дальней зоне ( $qr \gg 1$ ) целесообразно воспользоваться интегральным представлением (4.43) из-за медленной сходимости ряда в этой области.

Исследуем спектр граничной задачи, который определяется корнями уравнения  $T_\zeta = 0$ , в зависимости от параметра заполнения  $W_2$  в следующих случаях:

- 1)  $W_2 \ll 1$ ;
- 2)  $W_2 \sin^2 \gamma_2 \gg 1$ .

В с л у ч а е 1) спектр определяется корнями уравнения с малой правой частью

$$\frac{1}{\pi \sin^2 \gamma_2} \frac{P_{-1/2+\zeta}^{-1}(-\cos \gamma_1)}{P_{-1/2+\zeta}^{-1}(-\cos \gamma_2)} \frac{\cos \pi \zeta}{(\zeta^2 - 1/4)^2 \bar{\nabla}_\zeta} = 2W_2, \quad (4.44)$$

где

$$\bar{\nabla}_\zeta = P_{-1/2+\zeta}^{-1}(\cos \gamma_1) P_{-1/2+\zeta}^{-1}(-\cos \gamma_2) - P_{-1/2+\zeta}^{-1}(-\cos \gamma_1) P_{-1/2-\zeta}^{-1}(\cos \gamma_2).$$

Корни уравнения (4.44) находятся вблизи нулей функции  $P_{-1/2+\zeta}^{-1}(-\cos \gamma_1)$  и имеют вид

$$\nu_p^* = \beta_p^* + 2\pi W_2 \sin^2 \gamma_2 \frac{(\zeta^2 - 1/4)^2 \bar{\nabla}_\zeta P_{-1/2+\zeta}^{-1}(-\cos \gamma_2)}{\cos \pi \zeta \frac{d}{d\zeta} P_{-1/2-\zeta}^{-1}(-\cos \gamma_1)} \Big|_{\zeta=\beta_p^*} + O(W_2^2), \quad p = 1, 2, 3, \dots; \quad (4.45)$$

$$P_{-1/2+\beta_p^*}^{-1}(-\cos \gamma_1) = 0.$$

Формально переходя к пределу в (4.45) при  $W_2 \rightarrow 0$ , получаем спектр граничной задачи для сплошного конуса  $\Sigma_1$  [8].

В с л у ч а е 2) спектр граничной задачи состоит из значений

$$\mu_p^* = \xi_p^* + \frac{1}{2W_2} \frac{\cos \pi \zeta}{\sin^2 \gamma_2 (\zeta^2 - 1/4)^2} \frac{P_{1/2+\zeta}^{-1}(-\cos \gamma_1)}{d\zeta \hat{\nabla}_\zeta P_{1/2+\zeta}^{-1}(-\cos \gamma_2)} \Big|_{\zeta=\xi_p^*} + O(W_2^{-2}); \quad (4.46)$$

$$\tilde{\mu}_j = \alpha_j^* + \frac{1}{2W_2} \frac{\cos \pi \zeta}{\sin^2 \gamma_2 (\zeta^2 - 1/4)^2} \frac{P_{1/2-\zeta}^{-1}(-\cos \gamma_1)}{d\zeta \hat{\nabla}_\zeta P_{1/2+\zeta}^{-1}(-\cos \gamma_2)} \Big|_{\zeta=\alpha_j^*} + O(W_2^{-2}); \quad (4.47)$$

$$\mu_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8W_2} \frac{1}{\cos^4(\gamma_2/2) [tg^2(\gamma_2/2) - tg^2(\gamma_1/2)]} + O(W_2^{-2}), \quad (4.48)$$

которые являются корнями уравнения с малой правой частью

$$\pi \frac{P_{-1/2+\zeta}^{-1}(-\cos \gamma_2) (\zeta^2 - 1/4)^2 \hat{\nabla}_\zeta}{P_{-1/2+\zeta}^{-1}(-\cos \gamma_1) \cos \pi \zeta} = \frac{1}{2W_2 \sin^2 \gamma_2},$$

где  $\frac{\hat{\nabla}_\zeta}{\cos \pi \zeta} \Big|_{\zeta=\xi_p^*} = 0, P_{-1/2+\zeta}^{-1}(-\cos \gamma_2) \Big|_{\zeta=\alpha_j^*} = 0$ .

Значения  $\mu_p^*, \tilde{\mu}_j, \mu_0$  представляют возмущенные спектры сплошных биконуса и одиночного конуса соответственно [22, 8]. Из (4.46) – (4.48) следует, что спектр граничной задачи для такого типа поверхности зависит от углов раствора конусов, а также параметра заполнения  $W_2$ . Представление  $\mathcal{A}_1$  в виде ряда – это разложение  $\mathcal{A}_1$  в ряд по вычетам в корнях  $\mu_p^*, \tilde{\mu}_j, \mu_0$ , наименьший из которых,  $\mu_0$ , соответствует волне наинизшего типа. Аналогичное разложение потенциала Дебая рассеянного поля в ряд по вычетам в корнях  $\xi_p^*, \alpha_p^*, 1/2$  имеет место и в случае сплошных идеально проводящих конусов и биконусов. Однако слагаемое, соответствующее значению  $\zeta = 1/2$ , вклад в поле не вносит (поля равны нулю) и интереса не представляет. При возбуждении одиночного полупрозрачного конуса  $\Sigma_2$  или конической поверхности  $\Sigma$ , содержащей полупрозрачный конус с параметром заполнения  $W_2 (W_2 \sin^2 \gamma_2 \gg 1)$ , поле волны, отвечающее значению  $\mu_0$ , уже вносит ненулевой вклад в рассеянное поверхностью поле. О возможности существования такой волны в структуре поля в случае радиально проводящих конусов и биконусов указывается в [22]. Рассматриваемая полупрозрачная коническая поверхность  $\Sigma_2$  (в определенном смысле) является проводящей в радиальном направлении и может считаться радиально проводящей. Волна наинизшего типа определяет поведение поля вблизи вершины конуса ( $qr \ll 1$ ). Вблизи вершины сплошного одиночного конуса поле особенности не имеет (убывает по мере приближения к острию). Наличие неоднородностей на поверхности конуса влияет на поведение поля у его вершины. Так, вблизи вершины одиночного полупрозрачного конуса  $\Sigma_2 (W_2 \sin^2 \gamma_2 \gg 1)$  магнитное поле имеет особенность порядка  $(qr)^{3/2+\xi_2}$ , где  $\xi_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2W_2 \sin^2 \gamma_2} + O(W_2^{-2})$ , а электрическое убывает при приближении к вершине. Значению  $\xi_2$  соответствует волна наинизшего типа в структуре рассеянного поля одиночным полупрозрачным конусом  $\Sigma_2$ .

Наличие сплошного конического экрана  $\Sigma_1$  внутри полупрозрачного конуса влияет на спектр и структуру рассеянного поля. Особенность у магнитного поля вблизи вершины составной конической поверхности  $\Sigma$  порядка  $(qr)^{-3/2+\mu_0}$ . Сравнивая значения  $\mu_0$  и  $\xi_2$  и принимая во внимание неравенство

$$\frac{1}{\sin^2 \gamma_2} < \frac{1}{4 \cos^4(\gamma_2/2) [tg^2(\gamma_2/2) - tg^2(\gamma_1/2)]}, \quad \gamma_1 < \gamma_2 < \pi,$$

заключаем, что наличие сплошного экрана  $\Sigma_1$  ослабляет особенность у вершины полупрозрачного конуса.

**Численное решение.** Рассмотрим случай, когда конус  $\Sigma_2$  с одной щелью ( $N = 1$ ) и источник расположен на оси конической структуры ( $m = m_0 = 0, \nu = 0$ ). Коэффициенты  $x_n = x_n^{(m_0)}$ , являющиеся решением системы (4.40), (4.41), по абсолютной величине не превосходят единицы. На рис. 4.3 и 4.4 приведены

графики зависимости  $|x_n|$ ,  $n=0,1$  от величины ширины щели  $d_2$  и различных фиксированных углов раствора сплошного конуса  $\theta = \gamma_1$  ( $\gamma_2 = \pi/8$ ). Коэффициент  $x_0$  связан с отражением поля от поверхности биконической структуры и в предельном случае отсутствия щели ( $d_2 = 0$ ) равен единице (сплошной конус  $\theta = \gamma_2$ ). При увеличении ширины щели сначала наблюдается убывание  $|x_0|$  до нуля (минимума), а затем рост (рис.4.3). Уменьшение угла раствора сплошного конуса  $\theta = \gamma_1$  приводит к смещению минимума  $|x_0|$  в сторону увеличения ширины щели  $d_2$ . В случае узкого сплошного конуса ( $\gamma_1 \ll 1$ ) кривая зависимости  $|x_0|$  от  $d_2$  мало чем отличается от кривой  $|x_0|$  для одиночного конуса с продольной щелью (см. рис. 2.10). Остальные коэффициенты связаны с прохождением поля через щель в пространство между конусами  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  и убывают с уменьшением ширины щели и конической ленты. Кривая зависимости  $|x_1|$  от ширины щели приведена на рис.4.4, где при увеличении ширины щели наблюдается монотонное возрастание  $|x_1|$ , а затем убывание до нуля. Причем в окрестности  $d_2 = 70^\circ$  зависимость  $|x_1|$  достигает своего наибольшего значения во всем промежутке изменения ширины щели. Поле в дальней зоне строится на основании использования представления (4.36) составляющих электромагнитного поля через потенциал Дебая и поведения функция Макдональда  $K_\nu(z)$  при  $z \gg 1$  [99,100]. На рис.4.5 и 4.6 даны диаграммы рассеяния поля в горизонтальной плоскости (перпендикулярной оси структуры) в зависимости от ширины щели ( $\gamma_1 = \pi/16$ ;  $\gamma_2 = \pi/8$ ;  $\theta = \pi/4 + \pi/20$ ;  $kr_0 = 1$ ).

Анализ диаграмм рассеяния показал, что с увеличением ширины щели наблюдается влияние внутреннего сплошного конуса на излучение из щели. При ширине щели, равной  $60^\circ$ , это излучение будет наибольшим (рис.4.5). По мере расширения щели (уменьшения угловых размеров конической ленты) форма диаграммы непрерывно изменяется, превращаясь в круговую (предельный случай биконической поверхности – сплошной конус  $\Sigma_1$ ).

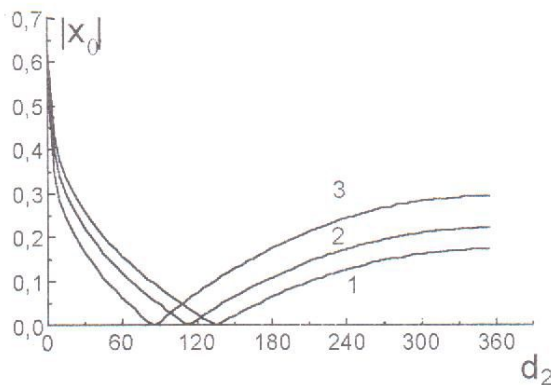


Рис.4.3. График зависимости  $|x_0|$  от ширины щели  $d_2$  при фиксированном угле раствора сплошного конуса  $\theta = \gamma_1$  ( $\gamma_2 = \frac{\pi}{8}$ ): 1 –  $\gamma_1 = \frac{\pi}{18}$ ; 2 –  $\gamma_1 = \frac{\pi}{16}$ ; 3 –  $\gamma_1 = \frac{\pi}{14}$

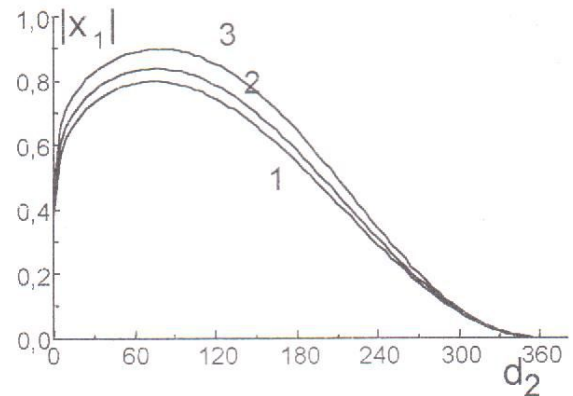


Рис.4.4. График зависимости  $|x_1|$  от ширины щели  $d_2$  при фиксированном угле раствора сплошного конуса  $\theta = \gamma_1$

$$\left(\gamma_2 = \frac{\pi}{8}\right): 1 - \gamma_1 = \frac{\pi}{18}; 2 - \gamma_1 = \frac{\pi}{16}; 3 - \gamma_1 = \frac{\pi}{14}$$

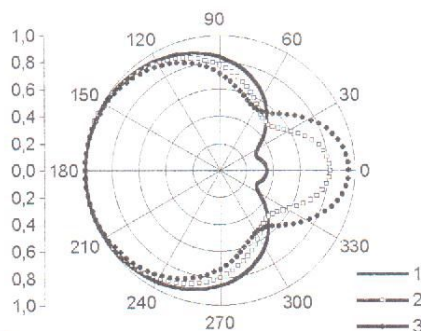


Рис. 4.5. Диаграммы рассеяния в горизонтальной плоскости: 1 –  $d_2 = 5^\circ$ ; 2 –  $d_2 = 30^\circ$ ; 3 –  $d_2 = 60^\circ$

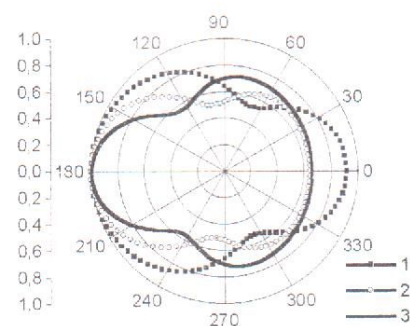


Рис. 4.6. Диаграммы рассеяния в горизонтальной плоскости: 1 –  $d_2 = 90^\circ$ ; 2 –  $d_2 = 180^\circ$ ; 3 –  $d_2 = 240^\circ$

## ГЛАВА 5. Сингулярные интегральные уравнения в задачах рассеяния электромагнитных волн на незамкнутых конических поверхностях

В предыдущих главах для решения задач рассеяния электромагнитных волн на конусе с периодическими продольными щелями использовался подход, основанный на применении метода полюбообращения. Однако для исследования задач рассеяния на многоэлементных структурах или импедансных структурах его использование сопряжено с большими трудностями, в связи с чем и возникла идея сведения задачи к решению сингулярного интегрального уравнения. В работе [90] описан прямой численно-аналитический метод решения парных интегральных уравнений широкого класса задач математической физики. Он основан на сведении парных интегральных уравнений к сингулярному уравнению первого рода на системе отрезков и последующим его решением прямым численным методом с использованием интерполяционных квадратур. Применение этого метода позволило исследовать задачи дифракции на плоских одномерных решетках из импедансных лент.

В данной главе приведен алгоритм сведения задачи возбуждения сосредоточенными источниками идеально проводящего полубесконечного конуса с периодическими продольными щелями (трехмерная коническая решетка) к решению сингулярного интегрального уравнения. Постановка задачи возбуждения электрическим или магнитным радиальным диполем незамкнутой конической структуры была дана в гл.2, где показано, что исходная электродинамическая задача эквивалентна решению системы функциональных уравнений (2.5), (2.6). С помощью метода задачи Римана-Гильберта (разновидность метода полюбообращения) система (2.5), (2.6) была сведена к системам линейных алгебраических уравнений 2-го рода (2.13), (2.14) (в случае возбуждения электрическим диполем) и (2.53), (2.54) (возбуждение магнитным диполем). Система функциональных уравнений (2.5), (2.6) является отправной для получения сингулярных интегральных уравнений. Поэтому, опуская постановку задачи, начнем с их рассмотрения в каждом конкретном случае возбуждения.

### 5.1. Возбуждение незамкнутого конуса электрическим радиальным диполем. Сингулярное интегральное уравнение (СИУ)

В этом случае система (2.5), (2.6), определенная на периоде конической структуры, приобретает следующий вид (2.8), (2.9):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{m,n}^{(1)} e^{inN\varphi} = e^{im_0N\varphi}, \quad \varphi \in S; \tag{5.1}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} N(n+\nu) \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) x_{m,n}^{(1)} e^{inN\varphi} = 0, \quad \varphi \in CS: |N\varphi| < \frac{\pi d}{l}; \tag{5.2}$$

$$N(n+\nu) \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) = \frac{(-1)^{(n+\nu)N} \operatorname{ch}\pi\tau \Gamma(1/2 + i\tau + (n+\nu)N)}{\pi \Gamma(1/2 + i\tau - (n+\nu)N)} \frac{1}{P_{-1,2-i\tau}^{(n+\nu)N}(\cos\gamma) P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos\gamma)}$$

Причем первое уравнение рассматривается на коническом секторе (ленте)  $S: \frac{\pi d}{l} < |N\varphi| \leq \pi$ , а второе – на щели  $CS: |N\varphi| < \frac{\pi d}{l}$ . Для коэффициентов  $\varepsilon_{m,n}^{(1)}$  справедлива оценка при  $N(n+\nu) \gg 1$ ,

$$\varepsilon_{m,n}^{(1)} = O\left(\frac{\sin^2 \gamma}{(n+\nu)^2 N^2}\right).$$

Введем в рассмотрение коэффициенты  $\hat{y}_{m,n}^{(1)}$ , связанные с искомыми коэффициентами  $x_{m,n}^{(1)}$ :

$$\hat{y}_{m,n}^{(1)} = N(n+\nu) \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) x_{m,n}^{(1)}. \tag{5.3}$$

Тогда система уравнений (5.1), (5.2) запишется в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) \hat{y}_{m,n}^{(1)} e^{im_0\psi} = e^{im_0\psi}, \quad \psi \in S; \tag{5.4}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{y}_{m,n}^{(1)} e^{in\psi} = 0, \quad \psi \in CS; \quad (5.5)$$

здесь  $\psi = N\varphi$ ,  $\hat{\varepsilon}_{m,n}^{(1)} = \frac{\varepsilon_{m,n}^{(1)}}{1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}}$ .

Уравнение (5.4) получено из граничного условия обращения в нуль тангенциальной составляющей электрического поля на конических секторах, тогда как уравнение (5.5) получено из условия непрерывности составляющей магнитного поля  $H_\varphi$  в щели (скачок  $H_\varphi$  при переходе через щель равен нулю). Таким образом, правая часть уравнения (5.5) определяет скачок  $H_\varphi$  при переходе через поверхность  $\theta = \gamma$ .

Рассмотрим функцию

$$\Phi_1(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{y}_{m,n}^{(1)} e^{in\psi}, \quad \psi \in [-\pi, \pi], \quad (5.6)$$

которая на секторе определяет радиальную составляющую  $j_r$  плотности поверхностного тока, а в щели равна нулю в соответствии с (5.5). Неизвестные коэффициенты  $\hat{y}_{m,n}^{(1)}$  являются коэффициентами Фурье функции  $\Phi_1(\psi)$  и определяются по формуле

$$y_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(\psi) e^{-in\psi} d\psi.$$

Следовательно, решение исходной электродинамической задачи сводится к задаче о нахождении функции  $\Phi_1(\psi)$ , связанной с плотностью поверхностного тока на конических секторах. Найдем уравнение, которому удовлетворяет искомая функция  $\Phi_1(\psi)$ . Для этой цели воспользуемся уравнением (5.4), подставив в него интегральное представление для  $\hat{y}_{m,n}^{(1)}$

$$y_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_S \Phi_1(\psi) e^{-in\psi} d\psi,$$

учитывая, что  $\Phi_1(\psi) = 0, \psi \in CS$ . В результате приходим к СИУ для  $\Phi_1(\alpha)$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \hat{F}(\psi - \alpha) \Phi_1(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_S [\hat{A}_{m\nu}^{(1)} - \hat{K}(\psi - \alpha)] \Phi_1(\alpha) d\alpha = e^{im_0\psi}, \quad \psi \in S, \quad (5.7)$$

где

$$\hat{F}(\psi - \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} e^{in(\psi - \alpha)}, \quad \hat{K}(\psi - \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} \hat{\varepsilon}_{m,n}^{(1)} e^{in(\psi - \alpha)}, \quad \hat{A}_{m\nu}^{(1)} = \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} (1 - \hat{\varepsilon}_{m,n}^{(1)}) \Big|_{n=0}.$$

В частном случае, когда  $\nu = 0$ , СИУ (5.7) переписывается в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \ln \left| 2 \sin \frac{\psi - \alpha}{2} \right| \Phi_1(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_S [\hat{K}(\psi - \alpha) - \hat{A}_{m\nu}^{(1)}] \Phi_1(\alpha) d\alpha = -e^{im_0\psi}, \quad \psi \in S. \quad (5.8)$$

Этот случай соответствует случаю осесимметричного возбуждения конуса с произвольным числом щелей или возбуждения конуса с одной щелью, когда источник находится в произвольной точке пространства. СИУ (5.7), (5.8) для функции  $\Phi_1(\psi)$ , связанной с плотностью наведенного на идеально проводящей конической структуре поверхностного тока, определены на секторах. Известны работы (например [108]), где СИУ заданы на щели. Получим СИУ в рассматриваемом случае возбуждения, определенное на щели  $CS$ , в связи с чем преобразуем систему (5.1), (5.2) к виду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{y}_{m,n}^{(1)} e^{in\psi} = 0, \quad \psi \in S; \quad (5.9)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} N(n+\nu) \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) \tilde{y}_{m,n}^{(1)} e^{in\psi} = -(m_0 + \nu) \frac{|m_0|}{m_0} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) e^{in\psi}, \quad \psi \in CS, \quad (5.10)$$

где  $\tilde{y}_{m,n}^{(1)} = x_{m,n}^{(1)} - \delta_n^m$ .

Продифференцируем обе части уравнения (5.9) по  $\psi$  и добавим дополнительное условие при  $\psi = \pi$ . Тогда (5.9), (5.10) преобразуется к виду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+\nu) \tilde{y}_{m,n}^{(1)} e^{i(n+\nu)\psi} = 0, \psi \in S; \tag{5.11}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} N(n+\nu) \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) \tilde{y}_{m,n}^{(1)} e^{in\psi} = -(m_0 + \nu) \frac{|m_0|}{m_0} (1 - \varepsilon_{m,m_0}^{(1)}) e^{im_0\psi}, \psi \in CS; \tag{5.12}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \tilde{y}_{m,n}^{(1)} = 0, (\psi = \pi). \tag{5.13}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\tilde{F}_1(\psi) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+\nu) \tilde{y}_{m,n}^{(1)} e^{i(n+\nu)\psi}, \psi \in [-\pi, \pi]. \tag{5.14}$$

Тогда, в силу (5.11), имеем

$$\tilde{y}_{m,n}^{(1)} = -\frac{i}{2\pi} \frac{1}{n+\nu} \int_{CS} \tilde{F}_1(\alpha) e^{-i(n+\nu)\alpha} d\alpha, \quad n \neq 0; \tag{5.15}$$

$$CS = [-\pi, \pi] \setminus S.$$

Из дополнительного условия (5.13) получаем

$$\tilde{y}_{m,0}^{(1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tilde{y}_{m,n}^{(1)} = \frac{i}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\nu} \int_{CS} \tilde{F}_1(\alpha) e^{-i(n+\nu)\alpha} d\alpha. \tag{5.16}$$

Используя (5.12), (5.15), (5.16), а также известные формулы [44,109]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\nu} e^{-in\alpha} = \frac{\pi}{\sin \nu\pi} e^{i\nu\alpha} - \frac{1}{\nu}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n|}{n} e^{im(\psi-\xi)} = -i \operatorname{ctg} \frac{\xi - \psi}{2},$$

приходим к СИУ для нахождения составляющей  $E_\varphi$  электрического поля в щели

$$\frac{1}{\pi} \int_{CS} \frac{e^{-i\nu\alpha} \tilde{F}_1(\alpha)}{\alpha - \psi} d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_{CS} \tilde{K}_1(\alpha - \psi) e^{-\nu\alpha} \tilde{F}_1(\alpha) d\alpha = (m_0 + \nu) \frac{|m_0|}{m_0} (1 - \varepsilon_{m,m_0}^{(1)}) e^{im_0\psi}, \psi \in CS; \tag{5.17}$$

$$\tilde{K}_1(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} - \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2iN} A_{m\tau}^{(1)} \left( \frac{\pi}{\sin \nu\pi} e^{N\xi} - \frac{1}{\nu} \right) + \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n|}{n} \varepsilon_{m,n}^{(1)} e^{in\xi}; \quad A_{m\tau}^{(1)} = \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) \Big|_{n=0}.$$

В случае, когда  $\nu = 0$ , СИУ (5.17) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{CS} \frac{\tilde{F}_1(\alpha)}{\alpha - \psi} d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_{CS} \tilde{K}_1(\alpha - \psi) \tilde{F}_1(\alpha) d\alpha = m_0 (1 - \varepsilon_{m,m_0}^{(1)}) e^{im_0\psi}, \psi \in CS, \tag{5.18}$$

$$\text{здесь } \tilde{K}_1(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} - \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2N} A_{m\tau}^{(1)} \alpha + \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n|}{n} \varepsilon_{m,n}^{(1)} e^{in\xi}.$$

Полученные СИУ (5.7), (5.8) имеют логарифмическую особенность, а уравнения (5.17), (5.18) являются сингулярными интегральными уравнениями с ядром типа Коши [110].

## 5.2. Возбуждение конуса с продольными щелями магнитным радиальным диполем.

### Решение СИУ методом дискретных особенностей

В случае возбуждения конуса с продольными щелями магнитным радиальным диполем система функциональных уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $x_{m,n}^{(2)}$  имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{m,n}^{(2)} e^{inN\varphi} = e^{im_0N\varphi}, \quad \varphi \in S; \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(2)}) x_{m,n}^{(2)} e^{inN\varphi} = 0, \quad \varphi \in CS;$$

$$\frac{1}{N(n+1)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(2)}) = \frac{(-1)^{(n+\nu)N-1} \operatorname{ch}\pi\tau}{\pi \sin^2 \gamma} \frac{\Gamma(1/2 + i\tau + (n+\nu)N)}{\Gamma(1/2 + i\tau - (n+\nu)N)} \frac{1}{\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(\cos \gamma)} \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2-i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos \gamma)$$

Введем коэффициенты  $\hat{y}_{m,n}^{(2)} = x_{m,n}^{(2)} - \delta_n^{m_0}$  и перепишем систему для  $x_{m,n}^{(2)}$  в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{y}_{m,n}^{(2)} e^{in\psi} = 0, \quad \psi \in S; \quad (5.19)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(2)}) \hat{y}_{m,n}^{(2)} e^{in\psi} = -\frac{1}{N(m_0+\nu)} \frac{|m_0|}{m_0} (1 - \varepsilon_{m,m_0}^{(2)}) e^{im_0\psi}, \quad \psi \in CS. \quad (5.20)$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\Phi}_2(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{y}_{m,n}^{(2)} e^{in\psi}, \quad \psi \in [-\pi, \pi]. \quad (5.21)$$

Тогда, учитывая (5.19), имеем  $\hat{y}_{m,n}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{CS} \tilde{\Phi}_2(\psi) e^{-in\psi} d\psi$ .

Используя алгоритм, приведенный выше, сведем систему (5.19), (5.20) к СИУ относительно искомой функции  $\Phi_2(\psi)$  (5.21), связанной с полем в щели:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{CS} \hat{F}(\psi - \alpha) \tilde{\Phi}_2(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_{CS} [A_{m\tau}^{(2)} - K_2(\psi - \alpha)] \tilde{\Phi}_2(\alpha) d\alpha = f_{v,m}(\psi), \quad \psi \in CS; \quad (5.22)$$

$$K_2(\psi - \alpha) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} \varepsilon_{m,n}^{(2)} e^{in(\psi - \alpha)}; \quad A_{m\tau}^{(2)} = \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(2)}) \Big|_{n=0};$$

$$f_{v,m}(\psi) = -\frac{1}{N(m_0+\nu)} \frac{|m_0|}{m_0} (1 - \varepsilon_{m,m_0}^{(2)}) e^{im_0\psi}.$$

В случае осесимметричного возбуждения ( $\theta_0 = \pi, \varphi_0 = 0, m = m_0 = 0, \nu = 0$ ) уравнение (5.22), определенное на щели ( $\psi \in CS$ ), принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{CS} 2 \ln \left| 2 \sin \frac{\psi - \alpha}{2} \right| \tilde{\Phi}_2(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_{CS} [K_2(\psi - \alpha) - g_{i\tau}^{(2)}] \tilde{\Phi}_2(\alpha) d\alpha = g_{i\tau}^{(2)}, \quad \psi \in CS,$$

$$g_{i\tau}^{(2)} = \frac{ch\pi\tau}{\pi \sin^2 \gamma} \frac{1}{\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2-i\tau}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2-i\tau}(-\cos \gamma)}.$$

Получим СИУ, заданное на конических секторах, и проведем численный эксперимент, используя метод дискретных особенностей. Введем обозначения  $\psi_1 = -\frac{|\varphi|}{\varphi} \pi + N\varphi$ ,  $\hat{y}_{m,n}^{(2)} = x_{m,n}^{(2)} (-1)^{n-m_0}$ ,  $\delta = \frac{l-d}{l} \pi$ , после чего система для нахождения коэффициентов  $x_{m,n}^{(2)}$  преобразуется к виду

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{y}_{m,n}^{(2)} e^{in\psi_1} = e^{im_0\psi_1}, \quad \psi \in S: |\psi_1| < \delta; \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(2)}) \hat{y}_{m,n}^{(2)} e^{in\psi_1} = 0, \quad \psi_1 \in CS: \delta < |\psi_1| \leq \pi. \quad (5.23)$$

Умножив обе части (5.23) на  $e^{-in\psi_1}$  и дифференцируя по  $\psi_1$ , имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(2)}) \hat{y}_{m,n}^{(2)} e^{in\psi_1} = 0, \quad \psi_1 \in CS.$$

Поскольку при дифференцировании теряются коэффициенты, добавим дополнительное условие при  $\psi_1 = \pi$ . Таким образом, исходная задача свелась к решению следующей системы уравнений относительно  $\hat{y}_{m,n}^{(2)}$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{y}_{m,n}^{(2)} e^{in\psi_1} = e^{im_0\psi_1}, \quad \psi \in S; \quad (5.24)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} (1 - \hat{\varepsilon}_{m,n}^{(2)}) \hat{y}_{m,n}^{(2)} e^{im\psi_1} = 0, \quad \psi_1 \in CS \tag{5.25}$$

с дополнительным условием

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} (1 - \hat{\varepsilon}_{m,n}^{(2)}) (-1)^n \hat{y}_{m,n}^{(2)} = 0. \tag{5.26}$$

Введем в рассмотрение функцию:

$$\Phi_2(\psi_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} (1 - \hat{\varepsilon}_{m,n}^{(2)}) \hat{y}_{m,n}^{(2)} e^{im\psi_1}, \quad \psi \in [-\pi, \pi] \tag{5.27}$$

Из (5.25) следует, что

$$\Phi_2(\psi_1) = 0 \text{ при } \psi \in CS. \tag{5.28}$$

Учитывая (5.26)–(5.28), выразим коэффициенты  $\hat{y}_{m,n}^{(2)}$  через  $\Phi_2(\psi_1)$ :

$$\hat{y}_{m,n}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \frac{|n|}{n} (1 - \hat{\varepsilon}_{m,n}^{(2)}) \int_S \Phi_2(\xi) e^{-in\xi} d\xi, \quad n \neq 0; \tag{5.29}$$

$$\hat{y}_{m,0}^{(2)} = -\frac{1}{A_{m,\tau}^{(2)}} \frac{1}{2N\pi} \int_S \Phi_2(\xi) \left( \frac{\pi e^{i\nu\xi}}{\sin \pi\nu} - \frac{1}{\nu} \right) d\xi,$$

где  $\frac{1}{1 - \hat{\varepsilon}_{m,n}^{(2)}} = 1 - \hat{\varepsilon}_{m,n}^{(2)}$ .

Используя алгоритм, приведенный ранее, из (5.24), (5.26), (5.29) получаем СИУ с ядром Коши для функции  $\Phi_2(\xi)$ , связанной с радиальной составляющей плотности поверхностного тока на секторах

$$\frac{1}{\pi} \int_S \frac{\Phi_2(\xi)}{\xi - \psi_1} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_S K(\xi - \psi_1) \Phi_2(\xi) d\xi = i e^{im\psi_1}, \quad \psi_1 \in S \tag{5.30}$$

с дополнительным условием  $\int_{CS} \Phi_2(\xi) d\xi = 0$ ,

где  $K(\xi - \psi_1) = \frac{1}{2} \text{ctg} \frac{\xi - \psi_1}{2} - \frac{1}{\xi - \psi_1} - \frac{i}{2N} \left( \frac{\pi e^{i\nu\xi}}{\sin \pi\nu} - \frac{1}{\nu} \right) \frac{1}{A_{m,\tau}^{(2)}} - \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{|n|}{n} \hat{\varepsilon}_{m,n}^{(2)} e^{in(\psi_1 - \xi)}$ .

Посредством замены  $\frac{\psi_1}{\delta} = t_0$  и  $\frac{\xi}{\delta} = t$  сведем интегрирование в (5.30) по промежутку  $(-1, 1)$

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_2(t)}{t - t_0} dt + \frac{\delta}{\pi} \int_{-1}^1 K(t - t_0) \Phi_2(t) dt = i e^{im_0\delta t_0}, \quad |t_0| < 1; \\ \int_{-1}^1 \Phi_2(t) dt = 0, \end{cases} \tag{5.31}$$

где

$$K(t - t_0) = \frac{1}{2} \text{ctg} \frac{t - t_0}{2} \delta - \frac{1}{(t - t_0)\delta} - \frac{i}{2N} \left( \frac{\pi e^{i\nu\delta t}}{\sin \pi\nu} - \frac{1}{\nu} \right) \frac{1}{A_{m,\tau}^{(2)}} - \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{|n|}{n} \hat{\varepsilon}_{m,n}^{(2)} e^{-in(t - t_0)\delta}.$$

Рассмотрим случай осесимметричного возбуждения ( $\theta_0 = \pi$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $m = 0$ ; в дальнейшем индекс  $m$  опускаем) конуса с одной щелью ( $N = 1$ ,  $\nu = 0$ ). В этом случае СИУ (5.31) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_2(t)}{t - t_0} dt + \frac{\delta}{\pi i} \int_{-1}^1 K(t - t_0) \Phi_2(t) dt = 1, \quad |t_0| < 1; \\ \int_{-1}^1 \Phi_2(t) dt = 0; \end{cases} \tag{5.32}$$

$$K(t - t_0) = \frac{1}{2} \text{ctg} \frac{t - t_0}{2} \delta - \frac{1}{(t - t_0)\delta} + \frac{1}{2} t \delta \frac{1}{A_{\tau}^{(2)}} - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varepsilon}_n^{(2)} \sin \delta n (t - t_0);$$

причем

$$\hat{y}_0^{(2)} = -\frac{i}{A_\tau^{(2)}} \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-1}^1 \Phi_2(t) dt; \quad \hat{y}_n^{(2)} = \frac{1}{2\pi n} \left(1 - \hat{\varepsilon}_n^{(2)}\right) \delta \int_{-1}^1 \Phi_2(t) e^{-in\delta t} dt, \quad n \neq 0;$$

$$A_\tau^{(2)} = -\frac{ch\pi\tau}{\pi \sin^2 \gamma} \frac{1}{\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma)}.$$

Для решения СИУ (5.32) используем метод дискретных особенностей [89,90]. Согласно этому методу СИУ (5.32) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{p=1}^q \frac{V_k(t_i^k)}{t_p^q - t_{0j}^q} + \delta \sum_{p=1}^q K(t_p^q - t_{0j}^q) V_q(t_p^q) \frac{1}{q} = i, \quad j = \overline{1, q-1}; \end{aligned} \right. \quad (5.32)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{p=1}^q V_q(t_p^q) = 0, \quad j = q; \end{aligned} \right. \quad (5.33)$$

$$\Phi_2(t) = \frac{V(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (5.34)$$

где  $t_p^q = \cos \frac{2p-1}{2q} \pi$  – корни полинома Чебышева 1-го рода;  $t_{0j}^q = \cos \frac{j}{q} \pi$  – 2-го рода.

Принимая во внимание связь между  $\Phi_2(t)$  и  $V(t)$  (5.34) и применяя квадратурную формулу Гаусса

$$\int_{-1}^1 \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{p=1}^q G(t_p^q) \frac{\pi}{q},$$

получаем формулы для вычисления коэффициентов  $\hat{y}_n^{(2)}$ :

$$\hat{y}_0^{(2)} = -\frac{1}{A_\tau^{(2)}} \frac{i\delta^2}{2} \sum_{p=1}^q V(t_p^q) t_p^q \frac{1}{q}, \quad (5.35)$$

$$\hat{y}_n^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{|n|}{n} \left(1 - \hat{\varepsilon}_n^{(2)}\right) \delta \sum_{i=1}^k V(t_p^q) e^{-in\delta t_p^q} \frac{1}{q}, \quad n \neq 0. \quad (5.36)$$

В результате решения СЛАУ (5.32), (5.33), находим  $V(t_p^q)$ , по которым и определяем  $\hat{y}_0^{(2)}$  и  $\hat{y}_n^{(2)}$  (5.35), (5.36), связанные с искомыми коэффициентами  $x_n^{(2)}(d, \gamma, \tau)$ . В табл. 5.1 приведены значения коэффициентов  $x_n^{(2)}$  в зависимости от ширины щели в случае конуса с одной щелью ( $N = 1, \tau = 1, \gamma = \pi/8$ ).

Таблица 5.1

$x_n, d$	15°	35°	350°	359°
x0	0.461534, -i*9.32635e-21	0.368127, -i*1.0545e-20	0.0003122, -i*2.17034e-23	3.12614e-06, -i*4.75435e-28
x1	-0.536123, i*9.75586e-17	-0.617233, i*1.05795e-16	-0.00210983, i*9.33418e-21	-2.11449e-05, i*1.01913e-21
x2	-0.5293, i*4.71403e-17	-0.57456, i*7.2636e-17	0.0038871, -i*3.0774e-20	3.90671e-05, -i*1.00477e-21
x3	-0.517882, i*1.51123e-17	-0.50675, i*2.30636e-17	-0.0057173, i*5.63574e-20	-5.77338e-05, i*9.20313e-22
x4	-0.502147, -i*6.60919e-17	-0.418507, -i*8.67238e-17	0.0075352, -i*1.2775e-19	7.65965e-05, -i*1.18607e-21
x5	-0.482329, i*1.88262e-16	-0.315695, i*9.2823e-17	-0.00931763, i*2.11169e-19	-9.55276e-05, i*1.1063e-21
x6	-0.458577, i*4.16875e-16	-0.205323, i*2.21983e-16	0.0110506, -i*2.28154e-19	0.00011448, -i*1.20046e-21
x7	-0.431314, i*2.57818e-16	-0.094685, -i*3.65922e-16	-0.0127228, i*2.93294e-19	-0.0001335, i*1.21391e-21
x8	-0.400831, -i*5.74405e-16	0.009066, -i*8.83195e-16	0.014324, -i*4.99664e-19	0.00015243, -i*1.50707e-21
x9	-0.36744, -i*1.36244e-15	0.099583, -i*2.65287e-16	-0.0158449, i*5.34165e-19	-0.00017141, i*1.84595e-21
x10	-0.331683, -i*3.62072e-16	0.171657, i*1.08953e-15	0.0172767, -i*8.01621e-19	0.00019038, -i*1.54399e-21
x11	-0.293933, i*8.34459e-16	0.221596, i*1.38152e-15	-0.0186114, i*9.61951e-19	-0.00020934, i*1.8665e-21
x12	-0.25459, i*1.93611e-15	0.247459, i*5.67961e-17	0.0198417, -i*8.57281e-19	0.00022829, -i*1.97214e-21
x13	-0.214236, i*1.73773e-15	0.249135, -i*1.13747e-15	-0.0209609, i*1.37938e-18	-0.00024724, i*2.0511e-21
x14	-0.173358, i*1.50512e-15	0.228354, -i*1.49144e-15	0.0219629, -i*1.08405e-18	0.00026617, -i*1.86691e-21
x15	-0.132479, i*3.95972e-16	0.188556, -i*1.43488e-15	-0.0228427, i*1.48376e-18	-0.00028508, i*2.77874e-21
x16	-0.092039, -i*7.11995e-16	0.134444, -i*6.31763e-16	0.0235957, -i*1.73584e-18	0.00030398, -i*2.53744e-21
x17	-0.052533, -i*8.01572e-16	0.0715083, i*1.11041e-16	-0.0242182, i*2.07546e-18	-0.00032287, i*3.53216e-21
x18	-0.014465, -i*1.40176e-15	0.0057734, i*1.29206e-15	0.0247076, -i*1.84056e-18	0.00034173, -i*3.75449e-21
x19	0.021816, -i*1.87698e-15	-0.056986, i*1.42086e-15	-0.0250617, i*2.19631e-18	-0.00036058, i*3.74348e-21

Мнимые части коэффициентов по абсолютной величине пренебрежительно малы по сравнению с действительными, а в случае узкой конической ленты  $|x_0^{(2)}| < |x_n^{(2)}|$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, 19$ . С уменьшением ширины конического сектора  $\delta$  (ленты) знаки действительных частей коэффициентов с разными номерами чередуются, а их модули убывают и в предельном случае узкого конического сектора ( $\delta = 1^\circ$ ,  $d = 359^\circ$ ) порядка  $10^{-4}$ . Это хорошо согласуется с результатами гл. 2 для коэффициентов  $x_n^{(2)}$  в случае узкого сектора ( $\delta \ll 1$ ):

$$x_0^{(2)} \approx \frac{\sin^2 \frac{\pi\delta}{2}}{A_r^{(2)} + \sin^2 \frac{\pi\delta}{2}}, \quad x_n^{(2)} \approx \frac{(-1)^n}{1 - \varepsilon_n^{(2)}} n \frac{A_r^{(2)} \sin^2 \frac{\pi\delta}{2}}{A_r^{(2)} + \sin^2 \frac{\pi\delta}{2}}, \quad n \neq 0.$$

Коэффициенты Фурье  $x_n^{(2)}$  для магнитного потенциала Дебая (2.4), через который выражаются составляющие электромагнитного поля по формулам (2.2), были вычислены в результате решения СЛАУ-2 (2.53), (2.54) и СИУ (5.32). Сравнения полученных значений двумя различными методами показало хорошее соответствие и достаточное совпадение знаков после запятой.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены задачи рассеяния электромагнитных волн на неограниченных идеально проводящих круговых конических и биконических поверхностях с периодическими продольными щелями. Поле сосредоточенного источника может произвольно меняться во времени. Метод решения задач основан на использовании преобразования Лапласа по временному параметру (вследствие чего нестационарная красная задача сводится к соответствующей стационарной с последующим обращением последней) и интегрального преобразования Конторовича–Лебедева по пространственной координате. Показано, что исходная краевая задача эквивалентна решению двух связанных систем функциональных уравнений относительно коэффициентов Фурье потенциалов Дебая, через которые выражаются составляющие электромагнитного поля. В случае одиночного конуса с продольными щелями и незамкнутого конуса со сплошным коническим экраном системы функциональных уравнений развязываются и заменяются одной системой, для решения которой применяется или метод полуобращения, или аппарат сингулярных интегральных уравнений. В случае одиночного конуса с продольными щелями для решения краевой задачи использовались оба подхода и проводилось сравнение полученных численных результатов. Преимущество метода полуобращения заключается в том, что вследствие его использования электродинамическая задача становится эквивалентной системе линейных уравнений 2-го рода фредгольмовского типа относительно коэффициентов Фурье. Математический аппарат решения таких систем развит довольно хорошо и позволяет найти как численное, так и аналитическое решение электродинамической задачи. Полученные сингулярные интегральные уравнения (СИУ) 1-го рода имеют либо логарифмическую особенность, либо ядро типа Коши. В силу эквивалентности СИУ системе линейных алгебраических уравнений 2-го рода фредгольмовского типа (СЛАУ-2) и хорошего согласования численных результатов, полученных при решении СИУ и СЛАУ, снимается вопрос о достоверности этих результатов и устойчивости решения СИУ. Преимущество подхода, базирующегося на применении СИУ, заключается в предпочтительности его использования при решении задач рассеяния волн на импедансных и многоэлементных структурах.

Были представлены результаты исследования задач стационарной дифракции плоских электромагнитных волн на незамкнутом конусе, а также возбуждения сосредоточенным монохроматическим источником конуса с продольными щелями и биконической поверхности специального вида. Последняя состоит из конуса с продольными щелями и сплошного конического экрана. На основе полученного аналитического и численного решения изучены спектры соответствующих красных задач, структура и поляризация рассеянного поля, а также его поведение вблизи нерегулярностей границы (угловые точки, ребра), влияние продольных щелей и сплошного экрана на основные электродинамические характеристики рассматриваемой незамкнутой поверхности. Независимость коэффициентов Фурье составляющих электромагнитного поля от частотного параметра свидетельствует о широкополосных свойствах данной геометрии и возможности моделирования ею широкополосных щелевых антенн и радиолокационных отражателей. Наличие продольных щелей существенно влияет на спектры краевых задач, структуру и поляризацию рассеянного поля, его поведение у вершины незамкнутого конуса и центра биконической поверхно-

у мето-

(5.32)

(5.33)

(5.34)

аусса

(5.35)

(5.36)

и  $\hat{y}_n^{(2)}$

я коэф-

(8).

-28

-21

-21

-22

-21

21

-21

21

-21

-21

-21

-21

-21

-21

-21

-21

-21

-21

-21

сти. Изменением угловых размеров незамкнутой поверхности (угловая ширина щелей, углы раствора конусов) и числом щелей можно управлять ее диаграммами рассеяния и излучением из щелей.

На основе полученного аналитического решения задачи возбуждения магнитным радиальным диполем конуса с узкими щелями показано существования в структуре поля щелевой ТЕМ-волны. Поле этой волны сосредоточено вблизи щели, характеризует поведение поля вблизи острия конуса и определяет рассеянное поверхностью поле в практически интересном случае близкого расположения источника к вершине конуса. Для поля щелевой волны приведено простое и удобное при расчетах выражение. Поле этой волны можно управлять, меняя, например, координаты источника. В области между вершиной и источником эта волна является стоячей, а за источником бегущей. Помещая источник в определенные точки пространства можно добиться того, что поле щелевой волны будет незначительным.

При возбуждении электрическим радиальным диполем конической поверхности, составленной из узких конических секторов, в структуре поля присутствует секториальная ТЕМ-волна, которая характеризует поведение поля вблизи вершины и дает хорошее приближение в случае близкого расположения источника к вершине конуса.

В результате исследования задачи дифракции плоских электромагнитных волн на конусе с продольными щелями (узкие щели, узкие конические секторы) показано, что в структуре дифрагированного поля присутствует как секториальная, так и щелевые волны. Степень влияния этих волн зависит от геометрических размеров конической поверхности.

Наличие сплошного экрана существенно изменяет рассеянное незамкнутым конусом поле. Так при возбуждении электрическим радиальным диполем биконуса, состоящего из сплошного и незамкнутого конусов в случае узких секторов, поле вблизи центра биконуса имеет более слабую особенность по сравнению с имеющейся особенностью у вершины сплошного одиночного конуса. В случае возбуждения магнитным радиальным диполем незамкнутого конуса, содержащего внутри сплошной конической экран, анализ диаграмм рассеяния определил роль сплошного экрана при излучении из щелей внешнего конуса. Подбором геометрических размеров биконической структуры удастся добиться максимального излучения из щелей.

Методы решения рассмотренных краевых задач могут быть использованы и для исследования задач рассеяния электромагнитных волн на импедансных структурах, имеющих угловые точки и ребра.

## Литература

1. Айзенберг Г.З., Белоусов С.П., Журбенко Э.М. и др. *Коротковолновые антенны*. – М.: Радио и связь, 1985.
2. Ильинский А.С., Кравцов В.В. *Связьная АГ Математические модели электродинамики*. – М.: Высш. шк., 1991.
3. Лебедев Н.Н., Конторович М.И. О практических формул обращения к решению некоторых задач электродинамики// ЖЭТФ, 1939, т.9, Вып.6, с.729–741.
4. Гринберг Г.А. *Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений*. – М.: Изд-во АН СССР, 1948.
5. Щелкунов С., Фриш Г. *Антенны*. – М.: Сов. радио, 1955.
6. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны*. – М.: Сов. радио, 1957.
7. Метцер Дж. Р. *Дифракция и рассеяние волн*. – М.: Сов. радио, 1958.
8. Фелсен Л., Маркувиц Н. *Излучение и рассеяние волн*, т.1, 2. – М.: Мир, 1978.
9. Adachi S. A theoretical analysis of semi-infinite conical antennas// IRE Trans. 1960, vol.AP-8, no.8, pp.535–547.
10. Горяинов А.С. Дифракция плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси конуса. – Радиотехника и электроника, 1961, т.6, №1, с.47–57.
11. Вилкова Л.П., Нефедов Е.И. Волны биконического рупора, 1979, т.24, №6, с.1017–1026.
12. Фельд Я.Н. Возбуждение заданными токами металлического конуса, оканчивающегося шаром. – Радиотехника и электроника, 1991, т.36, №6, с.1114–1123.
13. Vafiadis E., Sahalos J.N. Diffraction by a perfectly conducting elliptic cone// Archiv fur Electrotechnik, 1983, vol.66, pp.117–124.
14. Babich V.M., Smyshlyaev V.P., Dement'ev D.B. and etc. Numerical calculation of the diffraction coefficients for an arbitrary shaped perfectly conducting cone// IEEE Trans. on Ant. and Propagat. 1996, vol.44, no.5, pp.740–747.
15. Пригода Б.А., Гурьев В.А., Ульянин Н.С., Калугин Н.Н. Антенны круговой поляризации с управляемыми диаграммами направленности. В кн.: *Аппаратура для космических исследований*. – М.: Наука, 1972, с.109–112.
16. Brain D.J. S-band telemetry antenna systems for scientific satellites. Int. Conf. Antennas Aircraft Spacecraft. London, 1975, pp. 64–69.
17. Кобак В.О. Радиолокационные отражатели. – М.: Сов. радио, 1975.
18. Воскресенский Д.И., Пономарев Л.И., Филлипов В.С. Выпуклые сканирующие антенны. – М.: Сов. радио, 1978.
19. Ramsdail P.A. Antennas for communications// IEEE Commun. Mag. 1981, vol.19, no. 5, pp.28–36.
20. Панкратов С.Г. Биконическая антенна как источник образцовых импульсных электромагнитных полей – Измерит. техника, 1981, №6, с.57–58.
21. Соколов И.В. Параметры биконической измерительной антенны. – Измерит. техника, 1986, №11, с. 51–51.
22. Гошин Г.Г. Граничные задачи электродинамики в конических областях. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1987.
23. Blume S., Grafmuller B. // IEEE Trans. on Ant. and Propagat, vol. 46, pp.1066–1073.
24. Колодний Б.И., Куриляк Д.Б. Осесимметричные задачи дифракции электромагнитных волн на конических поверхностях. – Киев: Наук. думка, 1995.
25. Givati O., Fourie P.C. Analysis of skeletal wire conical antennas// IEEE Trans. on Ant. and Propagat. 1996, vol.44, no.6, pp.844–857.
26. Ozdemir T., Volakis J.L. Triangular prisms for edged-based vector finite element analysis of conformal antennas// IEEE Trans. on Ant. and Propagat. 1997, vol.45, no.5, pp.788–797.
27. Smith C.E., Butler C.M., Umashankar K.R. Characteristics of a wire biconical antenna// Microwave J. 1979, vol.22, no.9, pp.37–40.
28. *Cheer A.Ph. Antenna assembly. The plessey Co.plc. Заявка 2170958. Великобритания. МКИ НО1 Q1/08, НКИ Н1Q.*
29. Ваганов Р.Б., Каценельбаум Б.З. Основы теории дифракции. – М.: Наука, 1982.
30. Войтович Н.Н., Каценельбаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. – М.: Наука, 1977.

31. *Петров Б.М., Балабуха Н.П.* Возбуждение конуса произвольным распределением сторонних токов// Изв. вузов. сер. Радиоэлектроника, 1977, т.20. №11, с.10–15.
32. *Беличенко В.П., Гошин Г.Г., Дмитренко А.Г.* и др. Математические методы в граничных задачах электродинамики.–Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1990.
33. *Конторович М.И., Лебедев Н.Н.* Об одном методе решения некоторых задач теории дифракции и родственной ей проблем.– ЖЭТФ, 1938, т.8, вып.10–11, с.1192–1206.
34. *Лебедев Н.Н., Скальская И.П.* Некоторые преобразования, родственные преобразованию Конторовича–Лебедева. В кн.: Вопросы математической физики.–Л.: Наука, 1976.
35. *Pridmore–Brown D.C.* Diffraction coefficients for a slot excited conical antenna// IEEE Trans. on Ant. and Propagat, 1972, vol.20, no.1, pp.40–49.
36. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление.–М.: Наука, 1974.
37. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа.–М.: ИЛ, 1962.
38. *Вайслейб Ю.В.* Осесимметричное облучение идеально проводящего конуса конечной длины радиальным электрическим диполем// Тр. учебн. ин-тов связи, 1967, вып.35, с.58–65.
39. *Беличенко В.П., Гошин Г.Г., Кравченко Г.Г.* Дифракция поля электрического диполя на спирально проводящем конечном конусе.– ЖВМ и МФ, 1984, т.24, №7, с.1102–1106.
40. *Kawakami Haruo, Sato Genta.* Broad-band characteristics of rotationally symmetric antennas and thin-wire constructs// IEEE Trans. on Ant. and Propagat, 1987, vol.35, no.1, pp.26–32.
41. *Vafiadis E., Sahalos J.N.* The electromagnetic field of a slotted elliptic cone// IEEE Trans. on Ant. and Propagat, 1990, vol.38, no.11, pp.1894–1898.
42. *Сологуб В.Г., Харчевникова Т.И.* Дифракция сферических волн на конической поверхности специального вида// Радиотехника: Всеукр. межвед. научн.–техн. сб.–Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1972, вып. 20, с.52–58.
43. *Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П.* Дифракция электромагнитных волн на плоских ленточных решетках// ЖТФ, 1962, №4, с.381–394.
44. *Шестопалов В.П.* Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн.–Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971.
45. *Герлинггер А.Р., Кравченко Г.Г.* Возбуждение системы радиальных проводников, расположенных периодически на конической поверхности. В кн.: Электродинамика и распространение волн.–Томск, 1980, вып.1, с.3–8.
46. *Беличенко В.П.* Возбуждение многоконической линии системой  $\delta$ -генераторов.–Томск, 1981, с.91–101. Деп. ВИНТИ 06.02, 1981, №607–81.
47. *Конторович М.И.* Усредненные граничные условия для сетки, состоящей из непараллельных и непрямолинейных проводников, расположенных на неплоской поверхности.– Радиотехника и электроника, 1972, т.17, №6, с.1161–1170.
48. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции.–М.: Мир, 1964.
49. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов.–М.: Мир, 1974.
50. *Meixner J.* The behavior of electromagnetic fields at edges// IEEE Trans. on Ant. and Propagat, 1972, vol.20, no.4, pp.442–446.
51. *Ван Бладель Я.* Сингулярности поля вблизи вершины конуса.– ТИИЭР, 1983, т.71, с.146–147.
52. *Фикера Г.* Асимптотическое поведение электрического поля и плотности электрического заряда в окрестности сингулярных точек проводящей поверхности.– Успехи мат. наук, 1975, т.30, с. 105–124.
53. *George Jacob Aanandan C.K., Mohanan P., Nair K.G.* Analysis of a new compact microstrip antenna// IEEE Trans. on Ant. and Propagat, 1998, vol.46, no.11, pp.1712–1717.
54. *Stockbroeckx B., Vorst A.V.* Electromagnetic modes in conical transmission lines with application to linearly tapered slot antenna// IEEE Trans. on Ant. and Propagat, 2000, vol.48, no.3, pp.447–455.
55. *Radlow J.* Note on the diffraction at a corner// Arch. Rational. Mech. Anal. 1965, vol.19, pp.62–70.
56. *Albertsen N.Chr.* Doubly diffracted ray from a hard quarter plane// IEEE Trans. on Ant. and Propagat, 2000, vol.48, no.5, pp.764–767.
57. *Kraus L., Levine L.* Diffraction by an elliptic cone// Commun. Pure Appl. Math, 1961, vol.14, pp.49–68.
58. *Hansen Th. B.* Diffraction by a plane angular sector, a new derivation// IEEE Trans. on Ant. and Propagat, 1990, vol.38, no.11, pp.1892–1894.

59. *Satterwhite R.S.* Diffraction by a quarter plane, the exact solution and some numerical results// IEEE Trans. on Ant. and Propagat. 1974, vol.22, no.22, pp.500–503.
60. *Iwashige J.* Diffraction of electromagnetic wave by a plane angular sector// Trans. Inst. Electron. and Commun. 1978, B.61, no.11, pp.977–978.
61. *Sahalos J.N., Thiele G.A.* A hybrid UTD–eigenfunction method for scattering by a vertex. Int. URSI Symp. 1980 Electromagn. waves. Munich. 235B/1–235B/4.
62. *Hansen Th.B.* Corner diffraction coefficients for the quarter plane// IEEE Trans. on Ant. and Propagat. 1991, vol.39, no.7, pp.976–984.
63. *Stefano M., Albani., Capolino F.* JTD formulation for the currents on a plane angular sector// IEEE Trans. on Ant. and Propagat. 1998, vol.46, no.9, pp.1318–1327.
64. *Smyshlyaev V.P.* Diffraction by conical surfaces at high frequencies// Wave Motion, 1990, vol.12, no.6, pp.329–339.
65. *Смышляев В.П.* Высокочастотная асимптотика волнового поля, дифрагированного плоским угловым сектором. – Изв. вузов. сер. Радиофизика, 1991, т.31, №10–12, с.1170–1179.
66. *Лебедев Н.Н., Скальская И.П.* Распределение плотности электрического заряда вблизи угловой точки тонкой проводящей секториальной пластины. – ЖТФ. 1987, т.57, №11, с.2088–2096.
67. *Sahalos J.N., Thiele G.A.* The eigenfunction solution for scattered fields and surface currents of a vertex// IEEE Trans. on Ant. and Propagat. 1983, vol.31, no.1, pp.206–221.
68. *Дорошенко В.А.* Рассеяние электромагнитных волн конической поверхностью специального вида. В кн.: Физика и техника миллиметровых и субмиллиметровых волн. – Киев.: Наук. думка, 1983, с.113–119.
69. *Дорошенко В.А.* Возбуждение электрическим диполем кругового конуса с продольными щелями. – Радиотехника: Всеукр. межвед. научн.–техн. сб. – Харьков: Изд-во Харьк ун-та, 1984, вып.68, с.103–109.
70. *Дорошенко В.А., Сологуб В.Г.* О структуре поля радиального магнитного диполя, рассеянного конической поверхностью с прорезанными вдоль образующих щелями. – Радиотехника и электроника, 1987, т.32, №5, с.1110–1112.
71. *Дорошенко В.А., Сологуб В.Г.* Поле вблизи острия кругового конуса с радиальными щелями. – Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1988, т.31, с.464. Деп. В ВИНТИ 23.03.1988, №2289–В88.
72. *Дорошенко В.А., Сологуб В.Г.* Дифракция электромагнитных волн на плоском угловом секторе. – Радиофизика и электроника: Сб. научн. тр. ИРЭ АН УССР. Харьков. 1988. с.50–59.
73. *Дорошенко В.А., Сологуб В.Г.* Возбуждение биконической поверхности специального вида электрическим радиальным диполем. – Радиофизика и электроника: Сб. научн. тр. ИРЭ АН УССР. Харьков, 1988, с.59–69.
74. *Дорошенко В.А.* Возбуждение магнитным радиальным диполем конуса с продольными щелями. – Радиотехника: Всеукр. межвед. научн.–техн. сб. – Харьков: Изд-во “Основа”, 1992, вып.97, с.54–61.
75. *Doroshenko V.A.* Transient radiation from longitudinal slots on the cone. Proceedings of the 2–nd Int. Conf. On Antenna theory and techniques, 1997, Kyiv, Ukraine, pp.8–9.
76. *Дорошенко В.А.* Функция Грина для нестационарной задачи дифракции волн на плоском угловом секторе// Тр. VII Международного симпозиума “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”, Феодосия, Украина, 1997, с.180–181.
77. *Дорошенко В.А.* Излучение из конической структуры, расположенной на плоскости// Тезисы докладов III Международной конференции “Теория и техника передачи, приема и обработки информации”. Харьков–Туапсе, 1997, с.138.
78. *Doroshenko V.A.* Modeling the problem of pulse radiation from a slotted cone placed on the inhomogeneous plane// Proceedings of the 3–d Int. Conf. On Antenna Theory and Techniques. Sevastopol. Ukraine. 1999, pp.379–381.
79. *Дорошенко В.А., Климова Н.П.* Алгоритм решения задачи рассеяния электромагнитных волн на симметричном биконусе с продольными щелями. – Радиотехника: Всеукр. межвед. научн.–техн. сб. – Харьков, 1997, вып.101, с.148–154.
80. *Дорошенко В.А.* Импульсное возбуждение симметричной щелевой биконической линии// Тр. VI Международной научно–технической конференции “Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ”. – Самара, Россия, 1999, с.131.
81. *Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф.* Рассеяние поля электрического диполя на конической структуре с продольными щелями. – Радиотехника и электроника, 2000, т.45, №7, с.792–798.

82. *Doroshenko V.A.* Solving a non-stationary boundary Problem for a bicone geometry with slots// Book of abstracts of the 2-nd Int. Conf. "Modern Trends in Computational Physics". Dubna-Russia, 2000, pp.60.
83. *Doroshenko V.A.* Modeling of electromagnetic scattering by a slot cone reflector// Journal of Applied Electromagnetism. Athens-Greece, 2000, vol.3, no.3, pp.31-40.
84. *Дорошенко В.А., Ремаева О.А.* Интегральные уравнения в задаче возбуждения конуса с продольной щелью. – Радиотехника: Всесукр. межвед. научн.-техн. сб.–Харьков, 2000, вып.113, с.64–69.
85. *Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф.* Рассеяние плоских электромагнитных волн на конусе с продольными щелями. – Радиотехника и электроника, 2001, т.46, №3, с.296–303.
86. *Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф.* Нестационарная дифракция на незамкнутом конусе. – Докл. РАН, 2001, т.378, №2, с.183–186.
87. *Дорошенко В.А., Евсюкова Е.К., Кравченко В.Ф.* Возбуждение конической щелевой антенны. – Радиотехника и электроника, 2001, т.46, №8, с.1–7.
88. *Назарчук З.Т.* Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. – Киев: Наук. думка, 1989.
89. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: Янус, 1995.
90. *Гандель Ю.В.* Метод парных и сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции на ограниченных решетках// Электромагнитные явления. – Харьков, 1998, т.1, №12, с.220–232.
91. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968.
92. *Левин Н.* Теория волноводов. М.: Радио и связь, 1981.
93. *Борисов В.В.* электромагнитные поля неустановившихся токов. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1996.
94. *Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г.* Линейные уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964.
95. *Положий Г.Н.* Уравнение математической физики. – М.: Высш. шк., 1964.
96. *Боровиков В.А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках. – М.: Наука, 1966.
97. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973.
98. *Бейтмен Г., Эрдеи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т, т.1. – М.: Наука, 1973.
99. *Бейтмен Г., Эрдеи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т, т.2. – М.: Наука, 1974.
100. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1963.
101. *Chan K.-K., Felsen L.B.* Transient and time harmonic diffraction by a semi-infinite cone// IEEE Trans. on Ant. and Propagat, 1977, vol.25, no.6, pp.802–806.
102. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
103. *Капторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977.
104. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973.
105. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1973.
106. *Велиев Э.И., Носич А.И., Шестопалов В.П.* Распространение электромагнитных волн в круглом волноводе с продольной щелью. – Радиотехника и электроника, 1977, т.32, №3, с.466–473.
107. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: ИЛ, 1952.
108. *Малин В.В.* К теории ленточных решеток конечного периода. – Радиотехника и электроника, 1963, т.8, №2, с.211–220.
109. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1984.
110. *Мухомеливили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968.

#### Перечень используемых индексов

Принятое сокращение	Английское слово	Русское значение
sol	solid	сплошной
conv	convergence	сходящийся
div	divergence	расходящийся