

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г. Ф. Луговой

Москва

В процессе исследования и разработки различных систем и сооружений широко применяются методы геометрического, физического и математического моделирования. Сущность этих методов общеизвестна. Начальные этапы процесса разработки любой автоматической системы связаны с преимущественным применением методов математического

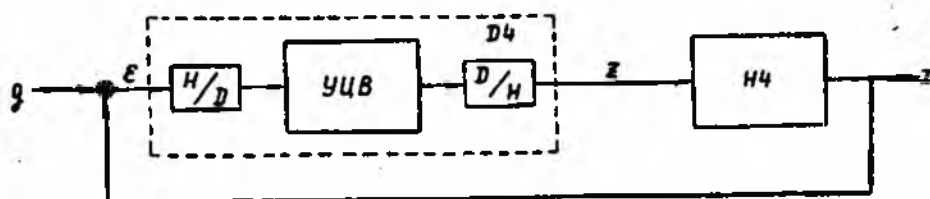


Рис. 1.

моделирования. На последующих этапах, к которым, в частности, относятся этапы макетных разработок, более широко применяются методы как физического, так и геометрического моделирования. Ниже рассматриваются некоторые вопросы цифрового моделирования на примере дискретной автоматической системы с объектом, описываемым уравнением второго порядка.

Моделируемая замкнутая автоматическая система с управляющим цифровым вычислителем (УЦВ), как это показано на структурной схеме рис. 1, может быть условно разделена на дискретную часть (ДЧ) и непрерывную часть (НЧ). Дискретная часть объединяет все устройства цифрового вычислителя, а в непрерывную часть входит управляемый объект с различными вспомогательными устройствами. Сущность работы такой системы следующая. На вход цифрового вычислителя через преобразователь непрерывных величин в дискретные (Н/Д) поступает сигнал ошибки $e = g - x$. Цифровой вычислитель, используя информацию о значении e в дискретные моменты времени, в соответствии с программой формирует управляющий сигнал Z . Через время τ , затрачиваемое на формирование и преобразование сигнала, последний поступает на вход непрерывной части системы. Знак и амплитуда сигнала Z формируются вычислителем так, чтобы ошибка e уменьшалась в соответствии с требованиями к качеству переходного процесса. Поступление управляющего сигнала на вход непрерывной части системы производится через равные промежутки времени, называемые периодами повторения T_n . Так как в реальных системах управления обычно $\tau \ll T_n$, а управляемая координата x за время τ не успевает существенно изме-

ниться, то в первом приближении допустимо при моделировании считать преобразование информации дискретной частью системы без запаздывания. Однако всегда возможно, несколько усложнив моделирующую программу, учесть разность $\delta x = x(t) - x(t - \tau)$. Ниже рассматривается такой упрощенный случай, когда величиной δx пренебрегают.

В работе принято раздельное цифровое моделирование для дискретной и непрерывной частей системы. Так как процесс изменения координат непрерывной и дискретной частей фиксируется в дискретные моменты времени, то результат, полученный после предыдущего шага моделирования дискретной части, является исходным для последующего

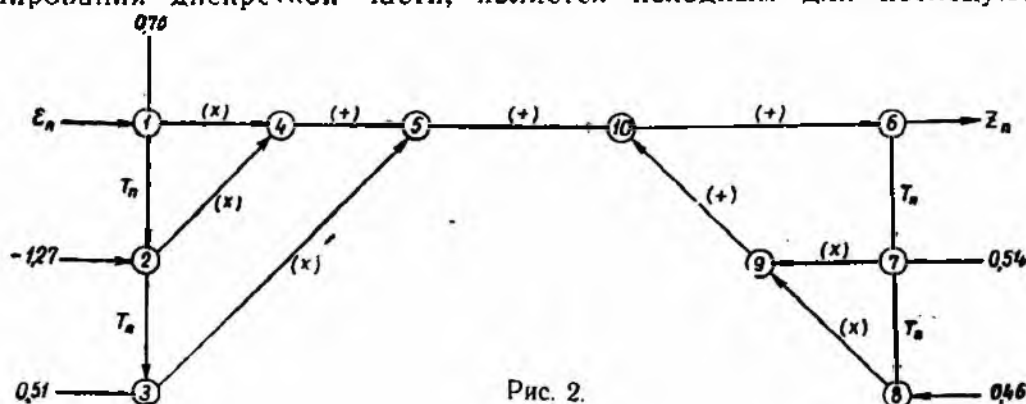


Рис. 2.

шага моделирования непрерывной части системы. В свою очередь, результат моделирования непрерывной части, суммируясь с величиной возмущающего воздействия, вводится в модель дискретной части системы и т. д.

Из рассмотрения структурной схемы (рис. 1) следует, что общее уравнение движения системы можно представить состоящим из двух уравнений. Одно из них описывает поведение дискретной части, а второе — поведение непрерывной части. Если, например, передаточная функция непрерывной части имеет вид

$$W_n(p) = \frac{x(p)}{Z(p)} = \frac{K_x}{(T_x p + 1)p}, \quad (1)$$

а длительность переходного процесса в замкнутой системе задана равной двум периодам повторения, то, как следует из общей формулы, приведенной в [1],

$$Z_n = \sum_{i=0}^l b_{l-i} \varepsilon_{n-i} + \sum_{i=1}^l a_{l-i} \cdot Z_{n-i}, \quad (2)$$

оптимальный закон управления определится рекуррентным уравнением

$$Z_n = b_2 \varepsilon_n + b_1 \varepsilon_{n-1} + b_0 \varepsilon_{n-2} + a_1 Z_{n-1} + a_0 Z_{n-2}. \quad (3)$$

Для конкретной системы с параметрами $T_x = 1$ сек, $K_x = 10,1$ сек и расчетным периодом повторения $T_n = 0,4$ сек рекуррентное уравнение, составленное в соответствии с [2], получит вид

$$Z_n = 0,76 \varepsilon_n - 1,27 \varepsilon_{n-1} + 0,51 \varepsilon_{n-2} + 0,54 Z_{n-1} + 0,46 Z_{n-2}. \quad (4)$$

Уравнение (4), по существу, и является алгоритмом решения задачи цифрового моделирования дискретной части системы. Граф организации процесса моделирования дискретной части согласно уравнению (4) приведен на рис. 2. Положив [3], что вершины графа заключают в себе информационные слова (числа), а ребрам соответствует преобразование информационных слов, получим приведенные ниже соответствия обозначений рис. 2.

В вершинах графа заключены следующие значения информационных чисел: 1 — значения входной координаты ϵ_n в момент времени nT_n и значение коэффициента $b_2 = 0,76$; 2 — значение входной координаты ϵ_{n-1} в момент времени $(n-1)T_n$ и значение коэффициента $b_1 = 1,27$; 3 — значение входной координаты ϵ_{n-2} в момент времени $(n-2)T_n$ и значение коэффициента $b_0 = 0,51$; 4 — произведение $0,76\epsilon_n$ и произведение $1,27\epsilon_{n-1}$; 5 — произведение $0,51\epsilon_{n-2}$ и разность $(0,76\epsilon_n - 1,27\epsilon_{n-1})$; 6 — значение выходной координаты Z_n в момент времени nT_n ; 7 — значение выходной координаты Z_{n-1} в момент времени $(n-1)T_n$ и значение коэффициента $a_n = 0,54$; 8 — значение выходной координаты Z_{n-2} в момент времени $(n-2)T_n$ и значение коэффициента $a_0 = 0,46$; 9 — произведение $0,54Z_{n-1}$ и произведение $0,46Z_{n-2}$; 10 — многочлены $(0,76\epsilon_n - 1,27\epsilon_{n-1} + 0,51\epsilon_{n-2})$ и $(0,54Z_{n-1} + 0,46Z_{n-2})$. Заметим, что приведенные здесь понятия входной координаты и выходной координаты определены относительно дискретной части системы. Ребрам графа соответствуют следующие обозначения преобразования информационных чисел: (X) — умножение компонент информационных чисел; (+) — алгебраическое сложение; T_n — запоминание (задержка) информационного числа на время периода повторения T_n .

Граф рис. 2 позволяет наглядно представить протекание процесса реализации рекуррентного уравнения (4) во времени. Проследим протекание этого процесса. В начальный момент времени t_0 принимаем $n = 0$. Тогда Z_0 определится, как произведение $Z_0 = 0,76\epsilon_0$. Следующему моменту времени $t_1 = t_0 + T_n$ соответствует $n = 1$. Вершина 2 содержит информацию о координате ϵ_0 и о коэффициенте $b_1 = 1,27$, а вершина 7 — о координате Z_0 и о коэффициенте $a_1 = 0,54$. Значение Z_1 в этом случае равно $Z_1 = 0,76\epsilon_1 - 1,27\epsilon_0 + 0,54Z_0$. Моменту времени $t_2 = t_0 + 2T_n$ соответствует $n = 2$, тогда $Z_2 = 0,76\epsilon_2 - 1,27\epsilon_1 + 0,51\epsilon_0 + 0,54Z_1$. Моменту времени $t_3 = t_0 + 3T_n$ соответствует $n = 3$. В уравнении (7) произойдет сдвиг значений индексов $Z_3 = 0,76\epsilon_3 - 1,27\epsilon_2 + 0,51\epsilon_1 + 0,54Z_2 + 0,46Z_1$.

При каждом изменении времени на величину периода повторения будет происходить аналогичный сдвиг значений индексов. Приведенная последовательность операций определяет содержание алгоритма реализации рекуррентного уравнения (4). Напомним, что в системе-оригинале реализация уравнения (4) производится управляющим вычислителем. Снимаемая в этом случае с выхода вычислителя величина Z подается в виде сигнала к органам управления объекта.

Исходным уравнением для моделирования непрерывной части системы является ее передаточная функция (1), из которой не сложно получить систему рекуррентных уравнений вида

$$\dot{x}_m = e^{-\Delta T_n} \cdot x_{m-1} + (1 - e^{-\Delta T_n}) 10Z_n, \quad (4)$$

$$x_m = x_{m-1} + (1 - e^{-\Delta T_n}) x_{m-1} - (1 - e^{-\Delta T_n} - \Delta T_n) 10Z_n, \quad (5)$$

где ΔT_n — шаг интегрирования дифференциального уравнения непрерывной части системы, x' — производная по времени координаты x .

Уравнение (5) преобразуем к форме, более удобной для программирования. Тогда:

$$\dot{x}_m = (x_{m-1} - 10Z_n) e^{-\Delta T_n} + 10Z_n. \quad (6)$$

Графы, иллюстрирующие реализацию уравнений (5) и (6), показаны соответственно на рис. 3 и 4. Обозначения преобразований информации чисел здесь приняты такие же, как и на рис. 2. Кратко поясним содержание графов. Реализация уравнений (5) и (6) начинается после

получения результата моделирования дискретной части системы, т. е. после получения координаты $Z_n = Z_0$. Учитывая, что координата Z_0 не изменяется в течение рассматриваемого периода повторения, вычислим дискретные значения x'_m и x_m через каждый шаг интегрирования ΔT_n по приведенным уравнениям.

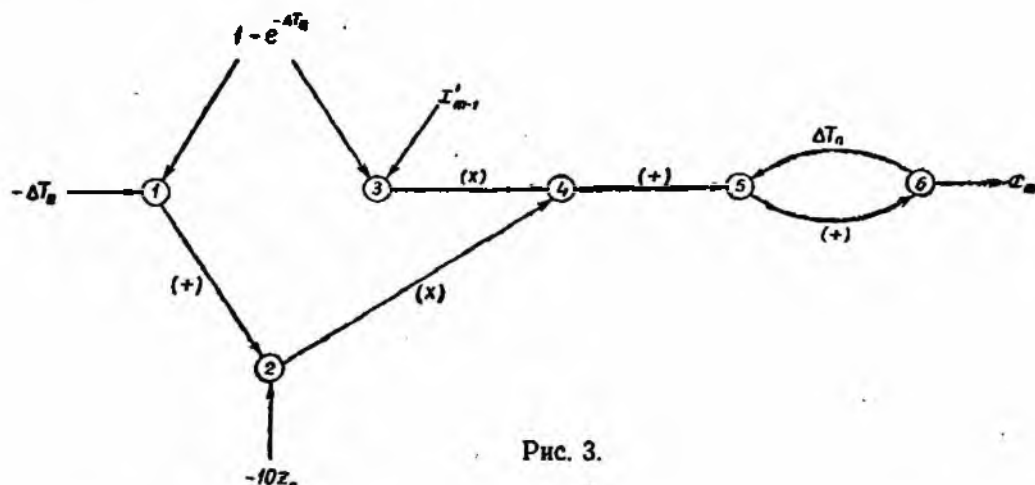


Рис. 3.

Заметим, что величина шага выбирается исходя из следующих соображений. Если для построения графика функции $x = x(t)$ достаточно выбрать m шагов, то шаг интегрирования определится из уравнения $\Delta T_n = \frac{T_n}{m}$. В частности, для исследуемой системы было принято $m = 8$,

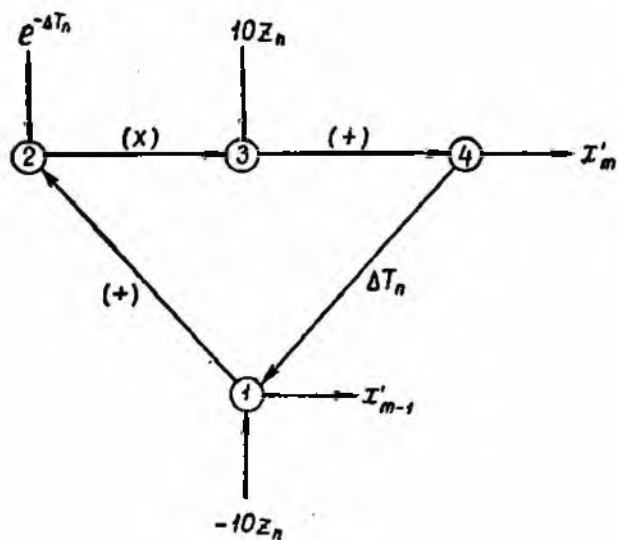


Рис. 4.

следовательно, $\Delta T_n = \frac{0,4}{8} = 0,05 \text{ сек.}$

Итак, начав отсчет времени с момента поступления на вход модели непрерывной части системы воздействия Z_0 , получим следующие дискретные значения координаты x и ее производной x' . Начальные условия, т. е. условия при $t_0 = 0$ и $m = 0$, очевидно, запишутся так: $t_0 = 0$; $m = 0$; $x'_0 = 0$; $x_0 = 0$. Через шаг ΔT_n получим $t_1 = \Delta T_n$, $m = 1$, тогда

$$x'_1 = (1 - e^{-\Delta T_n}) 10Z_0,$$

$$x_1 = (e^{-\Delta T_n} + \Delta T_n - 1) 10Z_0.$$

Через два шага

$$x'_2 = (x'_1 - 10Z_0) e^{-\Delta T_n} + 10Z_0,$$

$$x_2 = x_1 + (1 - e^{-\Delta T_n}) x'_1 - (1 - e^{-\Delta T_n} - \Delta T_n) 10Z_0$$

и т. д. До получения результатов восьмого шага:

$$x'_8 = (x'_7 - 10Z_0) e^{-\Delta T_n} + 10Z_0,$$

$$x_8 = x_7 + (1 - e^{-\Delta T_n}) x'_7 - (1 - e^{-\Delta T_n} - \Delta T_n) 10Z_0.$$

Восьмым шагом заканчивается первый период повторения и начинается второй период. Во втором периоде повторения используется резуль-

тат предыдущего этапа моделирования дискретной части системы, т. е. результат Z_1 . Так как вся задача интегрирования решается по участкам методом припасовывания, то конечные условия первого периода окажутся начальными для второго.

После первого шага второго периода получим уравнения:

$$\begin{aligned}x'_8 &= (x_8 - 10Z_1) e^{-\Delta T n} + 10Z_1, \\x_9 &= x_8 + (1 - e^{-\Delta T n}) x'_8 - (1 - e^{-\Delta T n} - \Delta T n) 10Z_1.\end{aligned}$$

Дальше все решается аналогично первому периоду, только для получения значений x' и x второго периода следует координату Z_0 в уравнениях первого периода заменить на координату Z_1 .

Рассмотренные выше графы 2, 3 и 4 являются графическим выражением алгоритмов решения задачи цифрового моделирования. В соответствии с этими графами составляется моделирующая программа, по которой и работает универсальная цифровая машина (цифровая модель).

Для выявления динамических свойств разрабатываемой системы достаточно в результате моделирования получить переходную функцию, соответствующую только расчетному периоду повторения. Но практически всегда возникает необходимость получения информации о допустимых вариациях периода повторения при неизменных параметрах уравнений системы. Поясним это на примере. Очевидно, что наиболее рационально применять цифровой вычислитель для формирования сигналов управления в нескольких автономных или связанных подсистемах автоматического регулирования или управления. В простейшем случае, когда расчетные периоды повторения всех подсистем одинаковы, т. е. $T_{п1} = T_{п2} = \dots = T_{пk}$, время решения всех k задач цифровым вычислителем должно быть равно расчетному периоду повторения. Нарушение равенства $\sum_{i=1}^k \tau_i = T_{п}$, где τ_i — время решения i -той задачи, может быть в двух

случаях. Первый случай $\sum_{i=1}^k \tau_i > T_{п}$ недопустим, так как при этом условии часть задач вычислитель не успевает решать за время $T_{п}$, а поэтому требуется уменьшение времени τ за счет увеличения быстродействия вычислителя. Для второго случая $\sum_{i=1}^k \tau_i < T_{п}$ характерно наличие времени

простоя вычислителя из-за чрезмерно большого быстродействия. Приведенные выше положения получены, исходя из частного случая равенства периодов повторения всех обслуживаемых вычислителем подсистем. Однако такой пример сравнительно редкий. В более общем случае периоды повторения подсистем будут различными. Подсистемы с близкими значениями периодов повторения могут обслуживаться с одним общим периодом повторения, но в подобных случаях как раз необходимо знать допустимые вариации периода повторения для каждой из подсистем. Ниже приведены результаты цифрового моделирования не только для расчетного периода повторения, но и для периодов повторения, несколько отличающихся от расчетного. Коэффициенты рекуррентного уравнения при этом оставались неизменными.

В результате цифрового моделирования системы управления получены переходные функции $x = x(t)$ для различных значений периода повторения. Эти переходные функции представлены на графиках рис. 5. Анализ переходных функций показывает, что реализация управляющим цифровым вычислителем рекуррентного уравнения (4) позволяет получить заданный переходный процесс в дискретной системе управления.

Контрольные точки переходной функции $x = x(t)$, рассчитанные с применением метода z -преобразования, совпадают достаточно точно с точками, полученными при цифровом моделировании. Аналоговое моделирование, проведенное для расчетного периода повторения на установке ЭМУ-10, дало результаты, практически совпадающие с результатами цифрового моделирования.

Из графиков рис. 5 следует, что отклонение периода повторения от номинального оказывает существенное влияние на переходные функции $x = x(t)$. Так, при увеличении периода повторения на 25% от расчетного переходный процесс оказывается уже явно колебательным, что не всегда допустимо по условиям работы системы.

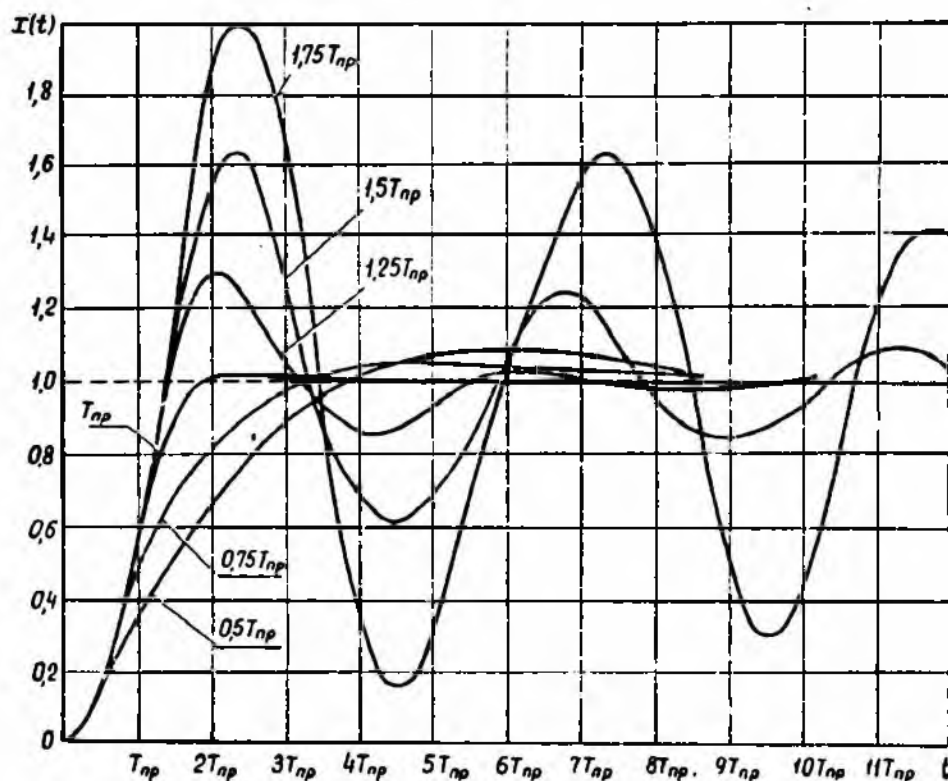


Рис. 5.

Приведенное изложение некоторых вопросов цифрового моделирования дискретных автоматических систем предусматривает математическое моделирование исходного алгоритма формирования управляющего сигнала. Этот алгоритм представлен рекуррентным уравнением (4) и графом рис. 2. Однако такое моделирование является только первым этапом, осуществляемым в основном с целью проверки правильности выбора параметров рекуррентного уравнения (4) и выяснения отклонения некоторых параметров системы от расчетных значений.

При разработке управляющего цифрового вычислителя всегда возникает необходимость математического моделирования логической схемы вычислителя. В этом случае поведение управляющего цифрового вычислителя обычно описывается уравнениями алгебры логики [3], например, вида временных булевых функций. По этим уравнениям, с учетом системы команд цифровой модели, составляется программа, моделирующая работу логической схемы вычислителя. Граф одного из вариантов разработки управляющего цифрового вычислителя с проведением моделирования логической схемы представлен на рис. 6. Ребрам графа

соответствуют следующие этапы разработки цифрового вычислителя: 1, 2 — описание поведения цифрового вычислителя уравнениями алгебры логики; 2, 3 — преобразования логических уравнений, связанные с решением задачи минимизации и приведением уравнений к выбранным стандартным элементам; 3, 4 — составление логических схем вычислителя; 4, 5 — составление программы моделирования логической схемы вычислителя; 5, 6 — ввод программы в универсальную цифровую вычислительную машину; 6, 7 — моделирование работы логической схемы вычислителя; 7, 8 — сравнение результатов моделирования с расчетными значениями контрольных точек; 1, 9 — выбор метода расчета контрольных точек; 9, 10 — расчетное определение контрольных точек; 10, 8 — сравнение расчетных значений контрольных точек с результатами моделирования, 8, 11 — составление принципиальной схемы макета; 11, 12 — составление монтажной схемы макета вычислителя; 5, МНС — согласование программы моделирования логической схемы вычислителя с программой моделирования непрерывной части системы.

Представленный на рис. 6 граф предназначен исключительно для иллюстрации разработки цифрового вычислителя с применением методов математического моделирования. Граф не включает этапы разработки всех устройств дискретной части системы.

В заключение заметим, что более полное решение задачи математического моделирования предусматривает согласование программы, моделирующей логическую схему вычислителя, с программой, моделирующей непрерывную часть системы (см. ребро 5, МНС графа рис. 6). Такая общая математическая модель системы позволяет исследовать многие процессы в разрабатываемой автоматической системе еще до выполнения этапа макетирования.

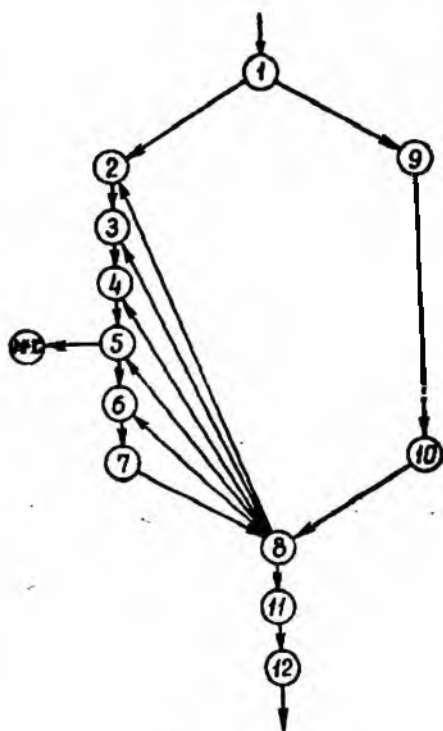


Рис. 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.
2. Г. С. Поспелов. Импульсные системы автоматического регулирования. Автоматическое управление и вычислительная техника, вып. 3, Машгиз, 1960.
3. В. М. Глушков. Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, 1962.