

**АНАЛІЗ ПРОЦЕСІВ ПЛАЗМОСТАТИКИ МЕТОДОМ
R-ФУНКЦІЙ ТА МЕТОДОМ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА**

Шерстнюк Д.В.

e-mail: dmytro.sherstniuk@nure.ua

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки,

кафедра прикладної математики

м. Харків, Україна

This study addresses mathematical modeling of plasma equilibrium in axisymmetric configurations. The Grad–Shafranov equation is formulated for the poloidal flux function with nonlinear pressure and current profiles. Boundary conditions for typical domains are considered. The solution is constructed using the R-function method combined with the Newton–Kantorovich approach, ensuring accurate and efficient numerical analysis.

Плазмостатика є важливим розділом фізики плазми, що досліджує рівноважні конфігурації плазми в магнітному полі. Такі задачі мають ключове значення для керованого термоядерного синтезу (токамаки, стеларатори), астрофізичних досліджень (зорі, магнітосфери), плазмових технологій (нанесення покриттів, обробка матеріалів). Основною проблемою є побудова адекватних математичних моделей, які б враховували нелінійність фізичних процесів, складну геометрію області та сильну взаємодію магнітного поля та плазми. Це приводить до крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, аналітичне розв’язання яких у більшості випадків неможливе. Отже, актуальними є дослідження, спрямовані на розробку ефективних чисельних методів аналізу таких задач.

Розглядатимемо стаціонарну (плазмостатичну) рівновагу плазми в магнітному полі. Основою моделі є рівняння магнітогідростатики:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p,$$

де $\mathbf{j}$ – густина струму, $\mathbf{B}$ – магнітне поле, p – тиск плазми.

У вісаметричному випадку всі величини не залежать від кута φ , і магнітне поле описується через функцію магнітного потоку $\psi(r, z)$, яка визначає магнітні поверхні $\psi(r, z) = \text{const}$.

З урахуванням рівнянь Максвелла та умов рівноваги отримуємо основне рівняння плазмостатики (рівняння Греда-Шафранова) [1]:

$$-\Delta^* \psi = \mu_0 r^2 p'(\psi) + F(\psi)F'(\psi), \quad (1)$$

де оператор $\Delta^* \psi = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ – оператор Греда-Шафранова, $p(\psi)$ – функція тиску плазми, $F(\psi) = r B_\varphi$ – функція, що визначає розподіл тороїдального магнітного поля, μ_0 – магнітна стала, r, z – просторові координати.

Рівняння (1) у загальному випадку є напівлінійним еліптичним

рівнянням. Його нелінійність викликана нелінійністю функцій $p(\psi)$ і $F(\psi)$. Типовими виборами цих функцій є лінійна $a\psi$, квадратична $a\psi^2$, експоненціальна $be^{a\psi}$ тощо. Саме ці залежності визначають фізичний режим плазми.

Якщо $\Omega \subset \mathbb{R}_{(r,z)}^2$ – область, у якій розглядається рівняння (1), то на її межі $\partial\Omega$ потрібно задати крайову умову. Зазвичай задається умова Діріхле

$$\psi|_{\partial\Omega} = \psi_0, \quad (2)$$

де ψ_0 – задана функція або константа, яка визначає значення функції магнітного потоку на межі області $\partial\Omega$.

Для вісесиметричної задачі плазмостатики область Ω є перерізом тривимірної вісесиметричної області обертання площиною $\varphi = \text{const}$.

Отже, математична модель плазмостатики зводиться до нелінійної крайової задачі (1), (2) для рівняння Греда-Шафранова відносно функції ψ , яка описує конфігурацію магнітного поля та рівновагу плазми. Ця модель є базовою для подальшого чисельного аналізу та дослідження фізичних режимів.

Для чисельного аналізу задачі (1), (2) пропонується сумісно використати метод Ньютона-Канторовича та структурний метод R -функцій, запропонований академіком НАН України В.Л. Рвачовим [2, 3].

Відповідно до методу Ньютона-Канторовича задача (1), (2) зводиться до ітераційної послідовності лінійних задач, кожна з яких розв'язується методом R -функцій. Відповідно до нього будується структура розв'язку та апроксимується невизначена компонента деяким методом мінімізації нев'язки (наприклад, методом найменших квадратів або методом Гальоркіна).

Обчислювальний експеримент було проведено для прямокутної області Ω для тестових значень параметрів.

Список використаних джерел:

1. Guazzotto L., Freidberg J. P. Simple, general, realistic, robust, analytic tokamak equilibria. Part 1. Limiter and divertor tokamaks. *Journal of Plasma Physics*. 2021. Vol. 87, Iss. 3. Article 905870303. DOI: 10.1017/S002237782100009X.
2. Rvachev V. L., Sheiko T. I. R -functions in boundary value problems in mechanics. *Applied Mechanics Reviews*. 1995. Vol. 48, № 4. Pp. 151–188. DOI: 10.1115/1.3005099.
3. Заверуха О. І., Сидоров М. В., Яловега І. Г. Застосування методу R -функцій в математичному моделюванні магнітних систем. *Біоніка інтелекту*. 2017. № 2 (89). С. 50–55.