



ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ ВЗАИМОСВЯЗИ ДВУМЕРНЫХ АЛЬФА-УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Шергин В.Л.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Одним из базовых понятий математической статистики является взаимосвязь случайных величин. Соответственно, построение количественных мер такой взаимосвязи является важным направлением этой отрасли науки. В рамках нормального закона распределения универсальными показателями взаимосвязи служат коэффициенты корреляции, однако за пределами этого закона они теряют свою универсальность и даже не всегда существуют.

Как отмечено в [1], в общем случае разработка и выбор показателей связи между случайными величинами обусловлены не только законом распределения, но и целью использования таких показателей, то есть на первый план выходит проблема интерпретации показателей взаимосвязи.

Среди множества разнообразных законов распределения случайных величин особое место занимают устойчивые распределения [2]. Выбор и использование существующих показателей взаимосвязи для устойчивых законов осложняются параметризацией как самих законов, так и этих показателей в частотной области [3]. В связи с этим проблема интерпретации показателей взаимосвязи в пространстве самих случайных величин является актуальной научной и важной практической задачей.

В связи с этим автором предлагается интерпретировать взаимосвязь между наблюдаемыми случайными величинами как результат симметричного перемешивания такого же количества независимых скрытых факторов.

Согласно этому подходу (в двумерном случае), взаимосвязь наблюдаемых одинаково распределённых случайных величин (x, y) обусловлена перемешиванием независимых (и также одинаково между собой распределённых) ненаблюдаемых случайных величин (u, v) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ или } \mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} . \quad (1)$$

Для двумерного гауссовского распределения коэффициенты модели (1) можно найти из условия $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}' = \mathbf{V}$, где \mathbf{V} - корреляционная матрица наблюдаемых величин (x, y) . В этом случае

$$a = \cos \theta, b = \sin \theta, r_{xy} = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \cos(\eta) = \sin(2\theta) . \quad (2)$$

С точки зрения геометрической интерпретации, перемешивание (1)-(2) представляет собой контравариантное преобразование координат между прямоугольной декартовой системой XOY и косоугольной UOV с координатным углом $\eta = \pi/2 - 2\theta$, повернутой на угол θ . При этом коэффициент корреляции равен косинусу координатного угла.



Важно отметить, что возможность интерпретации взаимосвязи случайных величин как результата перемешивания скрытых факторов и использование косинуса координатного угла (2) как числовой меры силы связи инвариантны по отношению к самим законам распределения рассматриваемых случайных величин. Более того, сама возможность построения факторной модели (1) никак не связана с наличием, или отсутствием моментов второго (или иного) порядка.

Широким классом одномерных законов распределения, не обладающих моментами второго порядка, являются устойчивые законы и, в частности, симметричные альфа-устойчивые законы (*SαS*-законы) $g(x; \alpha, \gamma)$. Параметры имеют следующий смысл [2]: $0 < \alpha \leq 2$ – параметр устойчивости; $\gamma > 0$ – параметр масштаба. Устойчивые законы параметризуются в частотной области, т.е. с помощью характеристической функции $\varphi(t) = M(e^{itx}) = \exp(-|\gamma t|^\alpha)$.

В силу линейности преобразования Фурье характеристическая функция двумерного устойчивого распределения величин (x, y) имеет вид:

$$\log \varphi(s, t) = -|sa + tb|^\alpha - |sb + ta|^\alpha. \quad (3)$$

Коэффициенты масштабов (γ) частных законов распределения величин x, y, u, v связаны соотношением $\gamma_x^\alpha = |a|^\alpha \gamma_u^\alpha + |b|^\alpha \gamma_v^\alpha = \gamma_y^\alpha$. Принимая (как и в гауссовском случае) все коэффициенты масштабов равными единице, получим:

$$|a|^\alpha + |b|^\alpha = 1. \quad (4)$$

Выражение (4) представляет собой уравнение единичной окружности в метрике L_α , а параметры a и b представляют собой абсциссу и ординату точки этой окружности, соответствующей полярному углу θ :

$$a = \frac{\cos \theta}{(|\cos \theta|^\alpha + |\sin \theta|^\alpha)^{1/\alpha}}, \quad b = \frac{\sin \theta}{(|\cos \theta|^\alpha + |\sin \theta|^\alpha)^{1/\alpha}}. \quad (5)$$

Параметризация (4) является частным случаем формы, приведенной в [3], из чего следует, что коэффициент взаимосвязи величин (x, y) имеет вид

$$r_{xy} = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \cos(\eta) = \sin(2\theta). \quad (6)$$

Таким образом, полученный коэффициент взаимосвязи устойчивых случайных величин (6) удовлетворяет тому же самому соотношению (2), что и в случае гауссовского распределения. Сохраняется и его геометрическая интерпретация: косинус координатного угла системы координат скрытых факторов.

1. Drouet, D.M. Correlation and dependence [Текст] / Dominique Drouet Mari, Samuel Kotz – Imperial College Press, 2004 – 219p.

2. Uchaikin, V.V. Chance and stability. Stable distributions and their applications [Текст] / V.V.Uchaikin, V.M. Zolotarev – Netherlands, Utrecht, VSP, 1999. – 570p.

3. Press, S.J. Multivariate stable distributions [Текст] / S.J. Press // Journal of Multivariate Analysis. – 1972. – Vol. 2 – pp.444–462.