УДК 516.6

ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ В АВТОРЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЯХ

ГРИЦЮК В.И.

Исследуются соотношения, необходимые для доказательства сходимости и состоятельности метода параметрической идентификации. Определяются М-оценки условного среднего. Предлагается устойчивый алгоритм оценки параметров, в котором оценка условного среднего вычисляется рекуррентно из помехоустойчивого фильтра.

Для определения члена модельного набора M, который лучше других описывает измеряемые входные, выходные данные y, u, естественно сравнить истинный выход $y(t)$ с ожидаемым в соответствии с моделью $M(\Theta)$ и с измеряемыми данными y^{t-1}, u^{t-1}:

$$y(t) - g_M(\Theta; t, y^{t-1}, u^{t-1}) = \varepsilon(t, \Theta). \qquad (1)$$

Тогда наилучшая модель выбирается минимизацией скалярной функции матрицы Q_N над $\Theta \in D_M$. Пусть эта функция обозначена $h(\cdot)$ и полученный критерий V_N [1,2]:

$$V_N(\Theta; y^N, u^{N-1}) = h(Q_N(\Theta; y^N, u^{N-1})),$$
$$Q_N(\Theta; y^N, u^{N-1}) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} l(t, \Theta, \varepsilon(t, \Theta)). \qquad (2)$$

Критериальные функции $l(t, \Theta; \varepsilon)$ могут быть подвержены следующим условиям регулярности:

$$\left|\frac{\partial}{\partial \varepsilon} l(t, \Theta; \varepsilon)\right| \le c|\varepsilon|, \quad \Theta \in D_M, \text{ для всех } t,$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial \Theta} l(t, \Theta, \varepsilon)\right| \le c|\varepsilon|^2, \Theta \in D_M, \qquad (3)$$

для всех t − условие С1. Типичный выбор в применениях

$$l(t, \Theta, \varepsilon) = |\varepsilon|^2, \quad l(t, \Theta, \varepsilon) = 1/2(\varepsilon^T \Lambda_\Theta^{-1} \varepsilon) + $$
$$+1/2(\log\det \Lambda_\Theta),$$
$$(h(Q)=Q) \qquad (4)$$

$$\text{или } l(t, \Theta, \varepsilon) = \varepsilon\varepsilon^T, \quad (h(Q) = \det Q) . \qquad (5)$$

Эти критерии квадратичны по ε. В реальных применениях лучше всего использовать $l(t, \Theta, \varepsilon)$, возрастающее более медленно, чем квадратично по ε, т.е. принять

$$l(t, \Theta, \varepsilon) = \alpha(|\varepsilon|^2), \qquad (6)$$

где $\alpha(t)$ − возрастающая функция такая, что $\alpha(t)/t \to 0$ при $t \to \infty$. Это делает критерий робастным против плохих измерений и соответствует предположениям, что вероятность выбросов выше, чем при распределении Гаусса.

Для функции $l(t, \Theta, \varepsilon)$ необходимо ввести некоторые соотношения, необходимые для доказательства сходимости оценок и состоятельности метода параметрической идентификации, включающие распределения ошибок предсказания.

Приведем два условия на критериальную функцию $h(\cdot)$.

С2: Функция $h(\cdot)$ непрерывна, и если A и B симметричные, положительно полуопределенные матрицы, то $h(A) \succ h(B) \Leftrightarrow \mathrm{tr}A \succ \mathrm{tr}B$.

С3: Функция $h(\cdot)$ непрерывна и

$$\mathrm{tr}A \succ 0 \Rightarrow h(\Lambda + A) \succ h(\Lambda)$$

для некоторой строго положительно определенной матрицы Λ.

Условие С2 более сильное, чем С3. Функция $h(A) = \mathrm{tr}A$ удовлетворяет и С2, и С3, тогда как $h(A) = \det A$ удовлетворяет С3, но не С2.

В работах [3,4] определяется помехоустойчивость как минимаксная, эффективная и качественная соответственно.

Минимаксная помехоустойчивая оценка параметра сдвига минимизирует максимум асимптотической дисперсии на несчетном бесконечном классе распределений. Эффективная − это такая оценка, для которой соответсвенно определенная эффективность является “высокой” на всем классе выбранных распределений. Качественная помехоустойчивость Хампеля связана с довольно естественным требованием равномерной непрерывности. Кроме того, Хампель ввел такие понятия, как кривая чувствительности и точка излома, которые очень полезны в исследованиях по устойчивости.

Для решения задач оценки вектора параметров временных рядов рассмотрим вариант М-оценок в присутствии резких выбросов, связанных с аддитивными ошибками - АО - модель авторегрессии в предположении, что μ − параметр сдвига равен нулю. Пусть $Y_i^T = (y_1, \ldots, y_i), \underline{x}_i^T = (x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-p+1})$ и пусть $\hat{\underline{x}}_i(\varphi')$ − оценка условного среднего $E\{\underline{x}_i | Y_i, \varphi'\}$ (УСМ-оценка) в предположении, что φ' − вектор параметров авторегрессии.

М-оценка условного среднего определяется как решение задачи минимизации:

$$\min_{\varphi'} \sum_{i=p}^{n-1} \rho\left[\frac{y_{i+1} - \hat{\underline{x}}_i^T(\varphi')\varphi'}{\hat{s}}\right], \qquad (7)$$

где ρ − некоторая симметричная функция потерь; $\hat{s}$ − оценка параметра масштаба, которая подлежит определению. Учитывая доводы, основанные на методе Монте-Карло, можно получить приближенный вариант

$$\sum_{i=p}^{n-1} \hat{\underline{x}}_i(\hat{\varphi})\psi\left[\frac{y_{i+1} - \hat{\underline{x}}_i^T(\hat{\varphi})\hat{\varphi}}{\hat{s}}\right] = 0 . \qquad (8)$$

Приближенный вариант оценок $\hat{\underline{x}}_i = E\{\underline{x}_i | y_i, \varphi'\}$ можно вычислить рекуррентно с помощью помехоустойчивой фильтрации с изменяющимся во времени параметром масштаба в зависимости от экспериментальных данных.

Упрощением помехоустойчивого фильтра является фильтр

$$\hat{\underline{x}}_{i+1} = \hat{\underline{x}}_i^T \varphi' + \hat{s}_i \psi \left[\frac{y_{i+1} - \hat{\underline{x}}_i^T \varphi'}{\hat{s}_i} \right], \qquad (9)$$

где $\hat{s}_i$ получено из соответствующей зависящей от данных вспомогательной рекуррентной формулы. Дальнейшее упрощение позволяет помехоустойчивый фильтр представить так:

$$\hat{\underline{x}}_{i+1} = \hat{\underline{x}}_i^T + \hat{s} \psi \left[\frac{y_{i+1} - \hat{\underline{x}}_i^T \varphi'}{\hat{s}} \right], \qquad (10)$$

здесь $\hat{s}$ – зависящая от данных, но времяинвариантная оценка параметра масштаба ожидаемых значений остаточных разностей $y_{i+1} - \hat{\underline{x}}_i^T \varphi'$. Например, $\hat{s}$ можно определить из уравнений (8) и дополнительной системы уравнений

$$\frac{1}{n-2p} \sum_{i=p}^{n-1} \psi^2 \left[\frac{y_{i+1} - \hat{\underline{x}}_i^T (\hat{\varphi}) \hat{\varphi}}{\hat{s}} \right] = B. \qquad (11)$$

Константа B выбирается так, что $\hat{s}$ является состоятельной оценкой σ_ε в случае $g = N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, т.е. $B = E_\Phi \psi^2(r)$, где Φ – стандартное нормальное распределение. Получившаяся оценка $\hat{\varphi}$ – результат помехоустойчивой регрессии при наблюдениях по оценкам условного среднего.

Следует заметить, что (8) эквивалентно системе нормальных уравнений типа Юла-Уокера.

$$\sum_{i=p}^{n-1} \hat{\underline{x}}_i(\hat{\varphi}) \left[\hat{\underline{x}}_{i+1}(\hat{\varphi}) - \hat{\underline{x}}_i^T(\hat{\varphi}) \hat{\varphi} \right] = 0. \qquad (12)$$

Эта система уравнений может быть решена итерационно:

$$\sum_{i=p}^{n-1} \hat{\underline{x}}_i(\hat{\varphi}^j) \left[\hat{\underline{x}}_{i+1}(\hat{\varphi}^j) - \hat{\underline{x}}_i^T(\hat{\varphi}^j) \hat{\varphi}^{j+1} \right] = 0, \qquad (13)$$

где $\hat{\underline{x}}_i(\hat{\varphi}^j)$ получена из (10) при $\varphi' = \hat{\varphi}^j$, а $\hat{\varphi}^1$ – оценка по методу наименьших квадратов.

Полученная система уравнений может быть решена с помощью итерационной процедуры, с применением методов регуляризации, как в [5].

Литература: 1. *Ljung L.* On consistency and identiability // Mathematical Programming Study, 1976. N 5, P. 169-190. 2. *Ljung L.* Consistency of the least-squares identification method// IEEE Trans. Automatic Control, 1976. V. AC- 21, P. 779-781. 3. *Holland P.* W., *Welsch R. E.* Robust regression using interactively reweghted least squares //Commun. Statist.,1977. V.A6, P. 813-828. 4. *Polyak B. T., Tsypkin Ya. Z.* Robust identification// Automatica. 1980. Vol 16, P. 53-63. 5. *Грицюк В.И.* Помехоустойчивые методы оценки параметров // ААЭКС, 2001. №1. С.15-21.

Поступила в редколлегию 21.11.2001

Рецензент: д-р техн.наук, проф. Шабанов-Кушнаренко С.Ю.

Грицюк Вера Ильинична, канд. техн. наук, докторант ХНУРЭ. Научные интересы: стохастические системы управления. Хобби: музыка, литература. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.

УДК 681.5.015:628.21

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА И ЭФФЕКТИВНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ВОДОСНАБЖЕНИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СТЕПЕНИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

ДЯДЮН С.В.

Вводятся критерии, характеризующие степень близости получаемых решений при использовании различных видов модели объекта управления. Представляется алгоритм оценивания качества и эффективности управления системами водоснабжения в зависимости от объема и состава оперативной информации об управляемом объекте. Показывается, что для обеспечения оптимальных значений этих критериев достаточно располагать измерениями давлений во всех локальных диктующих точках сети.

Качество и эффективность реализуемого управления зависят от степени адекватности используемых моделей объекта управления. Чтобы оценить эффективность и качество управления системами подачи и распределения воды (СПРВ) на интервале времени [0, T] в зависимости от степени неопределенности модели объекта, т.е. от объема и состава оперативной информации о его состояниях, будем использовать имитационную модель функционирования некоторой реальной СПРВ.

Под качеством функционирования СПРВ будем понимать вероятность выполнения водопроводом своего назначения – подавать потребителям воду в необходимом количестве под заданным напором в соответствии с предъявляемыми требованиями в течение определенного времени.

Под эффективностью функционирования СПРВ будем понимать затраты ресурса (воды, электроэнергии) на обеспечение заданного качества ее функционирования в течение определенного времени.

Обозначим L – множество активных элементов, т.е. насосных станций (НС) СПРВ; M – множество магистральных участков СПРВ; N – множество узлов сети с подключенными к ним потребителями; E=LUMUN; h_i, q_i, $i \in E$ – потеря давления и расход в i-м участке СПРВ; $H_{вхi}$, $q_{вхi}$, $H_{выхi}$, $q_{выхi}$, $i \in L$ – давление и расход на входе и выходе i-й НС.

Введем критерии, характеризующие степень близости получаемых решений при использовании различных видов модели СПРВ. Будем оценивать эффективность решения задачи управления режимами функционирования СПРВ на основе агрегированной модели объекта относительно решения