

МЕТОД ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ СО СКОЛЬЗЯЩИМ ОКНОМ

Задача построения математической модели исследуемого объекта представляет интерес не только сама по себе, но и является частью задачи оптимизации, качество решения которой существенно зависит от сложности используемой модели. Поэтому на практике зачастую оправдано упрощение математической модели объекта, представление ее в виде регрессионных уравнений. В этом случае задача оценивания параметров модели вида

$$Y_n = X_n C_n^* + \Xi_n \quad (1)$$

где $Y_n = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ – вектор выходных сигналов $n \times 1$; $X_n = (x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T)$ – матрицы входных переменных $n \times N$; $C_n^* = (c_{1n}^*, c_{2n}^*, \dots, c_{Nn}^*)^T$ – вектор оцениваемых параметров $N \times 1$; $\Xi_n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ – вектор помех; n – дискретное время, при выполнении обычных предположений классического регрессионного анализа успешно решается при помощи метода наименьших квадратов (МНК). При этом существенными предположениями являются отсутствие корреляции между полезными сигналами и помехами, отсутствие помех в наблюдаемых видимых сигналах и постоянство оцениваемых параметров c^* .

Если при наличии коррелированных помех Ξ_n достаточно эффективным является применение обобщенного МНК, то нарушение других предположений резко снижает эффективность МНК.

Так, если переменные x_i измеряются с помехами и между ними существует корреляция, оценки МНК будут смещены. В этом случае целесообразно применение методов, основанных на использовании определенным образом выбранных инструментальных переменных [1]. Оценка метода инструментальных переменных (МИП) имеет вид

$$C_n = (W_n^T X_n)^{-T} W_n^T Y_n, \quad (2)$$

где W_n – матрица инструментальных переменных $n \times N$.

В работе [2] была предложена модификация МИП, построенная по аналогии с обобщенным МНК и эффективная при скорректированных помехах Ξ_n .

Если же нарушается предположение о стационарности параметров C_n^* , то оценка, во-первых, должна быть рекуррентной и, во-вторых, содержать некоторый механизм оценивания ценности используемой информации. В качестве такого механизма может быть применимо либо экспоненциальное взвешивание информации, придающее больший вес вновь поступающей информации, либо некое скользящее окно, которое также придает одинаковый вес некоторому определенному (фиксированному обычно) количеству учитываемой информации [3].

Экспоненциально взвешенный рекуррентный МИП может быть получен по аналогии с [2]. Целью данной работы является получение рекуррентной формы МИП (РМИП) со скользящим окном.

Обозначим оценку, полученную на n -шаге по L предыдущим шагам, по аналогии с [4] следующим образом:

$$C_{n/L} = (W_{n/L}^T X_{n/L})^{-T} W_{n/L}^T Y_{n/L}, \quad (3)$$

где $X_{n/L} = (x_{n-L}^T, x_{n-L+1}^T, \dots, x_n^T)^{-1}$, $W_{n/L} = (W_{n-L}^T, W_{n-L+1}^T, \dots, W_n^T)^{-1}$ – матрицы $N \times (n-L)$; $Y_{n/L} = (y_{n-L}^T, y_{n-L+1}^T, \dots, y_n^T)^{-1}$ – вектор $n-L$; $L > n$ величина скользящего окна (память алгоритма).

Для получения рекуррентной формы данной модификации МИП рассмотрим оценку, полученную на $(n+1)$ – шаге по L измерениям

$$C_{n+1/L} = (W_{n+1/L}^T X_{n+1/L})^{-1} W_{n+1/L}^T Y_{n+1/L}, \quad (4)$$

где входящие в (4) матрицы и вектор имеют ту же размерность, что и в (3).

Так оценка, полученная на $(n+1)$ -ом шаге, также использует только L последних измерений, может быть представлена следующим образом:

$$C_{n+1/L} = (W_{n/L}^T X_{n/L} + w_{n+1} x_{n+1}^T - w_{n-L} x_{n-L}^T)^{-1} (W_{n/L}^T Y_{n/L} + w_{n+1} y_{n+1} - w_{n-L} y_{n-L}^T). \quad (5)$$

Как видно из (5) и как отмечалось в [4], особенностью алгоритмов с фиксированным окном является то, что матрица наблюдений $X_{n/L}$ (а, значит, и матрица ИП $W_{n/L}$) и вектор $Y_{n/L}$ на каждом шаге формируются либо путем включения вновь поступившей информации $x_{n+1}(w_{n+1})$ и y_{n+1} с последующим исключением устаревшей $x_{n-L}(w_{n-L})$ и y_{n-L} , либо путем первоначального исключения устаревшей информации с последующим вводом новой. Соответствующие алгоритмы реализуют правила «накопление-сброс» и «сброс-накопление».

Рассмотрим получение рекуррентного МИП со скользящим окном, работающего по правилу «накопление-сброс».

В этом случае поступление на $(n+1)$ – ом шаге нового наблюдения позволяет получить новую оценку по $(L+1)$ –му наблюдению

$$C_{n+1/L+1} = (W_{n+1/L+1}^T X_{n+1/L+1})^{-1} W_{n+1/L+1}^T Y_{n+1/L+1}, \quad (6)$$

где $X_{n+1/L+1} = (X_{n/L} \vdots x_{n+1}^T)$, $W_{n+1/L+1} = (X_{n/L} \vdots w_{n+1}^T)$ – матрицы $N \times (L+1)$.

Обозначим

$$P_{n/L} = (W_{n/L}^T X_{n/L})^{-1}. \quad (7)$$

Тогда (6) примет вид

$$C_{n+1/L+1} = P_{n+1/L+1} W_{n+1/L+1}^T Y_{n+1/L+1}, \quad (8)$$

где

$$P_{n+1/L+1} = P_{n/L} + w_{n+1} x_{n+1}^T. \quad (9)$$

Применяя к (9) лемму об обращении матриц, получаем

$$P_{n+1/L+1} = P_{n/L} - \frac{P_{n/L} w_{n+1} x_{n+1}^T P_{n/L}}{1 + x_{n+1}^T P_{n/L} w_{n+1}}, \quad (10)$$

а подставляя (10) в (8) и учитывая блочное представление $W_{n+1/L+1}$ и $Y_{n+1/L+1}$, после несложных преобразований имеем следующее выражение для оценки, соответствующей накоплению информации

$$c_{n+1/L+1} = c_{n/L} + \frac{P_{n/L} w_{n+1}}{1 + x_{n+1}^T P_{n/L} w_{n+1}} (y_{n+1} - c_{n/L}^T x_{n+1}). \quad (11)$$

В случае сброса устаревшей информации происходит уменьшение размерности используемых при построении оценки матриц и векторов. При этом

$$P_{n+1/L} = P_{n+1/L+1} - w_{n-L} x_{n-L}^T$$

или после применения леммы об обращении матриц

$$P_{n+1/L} = P_{n+1/L+1} + \frac{P_{n+1/L+1} w_{n-L} x_{n-L}^T P_{n+1/L+1}}{1 - x_{n-L}^T P_{n+1/L+1} w_{n-L}} \quad (12)$$

Соответствующее выражение для оценки $c_{n+1/L}$ после несложных преобразований будет иметь вид

$$c_{n+1/L} = c_{n+1/L+1} - \frac{P_{n+1/L+1} w_{n-L}}{1 - x_{n-L}^T P_{n+1/L+1} w_{n-L}} (y_{n-L} - c_{n+1/L+1}^T x_{n-L}). \quad (13)$$

Таким образом, рекуррентный алгоритм МИП со скользящим окном включает две процедуры, первая из которых, описываемая выражениями (10) и (11), соответствует накоплению новой информации (вычислению вспомогательной оценки при поступлении новой информации), а вторая, представленная соотношениями (12) и (13), – сбросу устаревшей (вычислению основной оценки).

О выборе начальных значений матрицы $P_{n/L}$ (а именно она для данного алгоритма участвует в вычислениях матриц $P_{n+1/L+1}$ и $P_{n/L}$) необходимо сказать следующее. Так как данный алгоритм начинает работать только после того, как количество наблюдений станет равным количеству неизвестных параметров, т.е. на начальном этапе совпадает с обычным РМИП, то и выбор $P_{0/L}$ происходит как в обычном РМИП.

По аналогии с вышеизложенным несложно получить соотношения для алгоритма РМИП со скользящим окном, работающего по правилу «сброс-накопление».

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – Л.: Мир, 1975. – 683 с.
2. Тимофеев В.А. Рекуррентное оценивание методом инструментальных переменных при наличии коррелятивных помех // Сб. научн. трудов по материалам 5-й Международной конференции « Теория и техника передачи, приема и обработки информации». – Харьков, 1999. – С.467-478.
3. Перельман И.И. Оперативная идентификация объектов управления. М.: Энергоиздат. – 1982. – 272 с.
4. Либероль Б.Д., Руденко О.Г. Выбор ширины окна в алгоритме текущего регрессионного анализа // Доповіді НАН України. – 1996- –№ 3. С.69-73.
5. Руденко О.Г., Штефан А., Хюбеналь Ф. Рекуррентный алгоритм МНК со скользящим окном при коррелированных помехах // Радиоелектроника и информатика. – 1998. – №1 (02). – С.79-81.

Поступила в редакцию

*Харьковский национальный
университет радиоэлектроники*