УДК 621.317

Н. Н. ГОРОБЕЦ, д-р физ.-мат. наук, *Ю. И. ДАВИДЧЕВСКИЙ*, канд. техн. наук,
В. И. ЧЕБОТАРЕВ, канд. физ.-мат. наук

ИНВАРИАНТНОСТЬ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕКТОРНЫХ СИГНАЛОВ

Анализ сигналов с вращающейся поляризацией и их поляриметрических возможностей [1—4] требуют выяснения для ряда задач целесообразной базисной формы как векторных сигналов, так и векторных передаточных характеристик (ВПХ), свойственных электродинамическим объектам.

Рассмотрена методология экспериментального определения ВПХ для задач, характеризуемых недостаточной априорной информацией об азимутальной (в ТЕМ-плоскостях волны) ориентации векторных сигналов по отношению к системе координат исследуемого электродинамического объекта. Наиболее простым примером такой задачи представляется обычное (снеллевское) отражение от плоской поверхности материала (среды) в свободном пространстве. Рассмотрим далее связь двух векторных (в ТЕМ-плоскостях волны) сигналов: $\vec{E}_п(t) = \vec{E}_п$ на входе и $\vec{E}_т(t) = \vec{E}_т$ на выходе электродинамического (линейного недеполяризующего) объекта. Такая связь имеет спектральную форму известного операторного преобразования, например преобразования Джонса [5]: $\bar{S}_т = T\bar{S}_п$, (1), где $\bar{S}_п$, $\bar{S}_т$ — спектральные вектор-матрицы базисных компонент векторных сигналов $\vec{E}_п$ и $\vec{E}_т$ (спектральные векторы Джонса); Т — матрица Джонса, являющаяся ВПХ исследуемого объекта. Матрица Т связывает спектры совпадающих и перекрестных компонент векторных сигналов $\vec{E}_п$ и $\vec{E}_т$;

$$S_{тu} = T_{uu} S_{пu} + T_{uv} S_{пv}; \quad S_{тv} = T_{vu} S_{пu} + T_{vv} S_{пv}. \qquad (2)$$

Здесь $S_{\text{т}u}$, $S_{\text{т}v}$, $S_{\text{п}u}$, $S_{\text{п}v}$ — комплексные спектры соответствующих базисных компонент сигналов: $\vec{E} = \vec{E}_u + \vec{E}_v$. (3). Отметим, что матрица Т — квадратная, неэнергетическая:

$$T = \begin{bmatrix} T_{uu} & T_{uv} \\ T_{vu} & T_{vv} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Спектральные векторы Джонса имеют вид

$$\bar{S}_{\text{п}} = [S_{\text{п}u}\ S_{\text{п}v}],\ \bar{S}_{\text{т}} = \begin{bmatrix} S_{\text{т}u} \\ S_{\text{т}v} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

В преобразованиях (1), (2) предполагается, что векторные сигналы на входе и выходе объекта записаны в его координатах: $u = x_0$, $v = y_0$. В этом случае нетрудно определить экспериментально компоненты ВПХ — элементы матрицы Т, использовав спектры известных сигналов $\vec{E}_{\text{п}1}$, $\vec{E}_{\text{п}2}$, а также измерив спектры сигналов отклика $\vec{E}_{\text{т}1}$, $\vec{E}_{\text{т}2}$. Тогда из формы (2) получим две пары систем линейных уравнений относительно элементов (компонент) ВПХ вида (4).

Сложнее получается, если сигналы на входе и выходе объекта выражены в своих координатах, определяемых ортами $\vec{x}^0_{\text{п}}$, $\vec{y}^0_{\text{п}}$ и $\vec{x}^0_{\text{т}}$, $\vec{y}^0_{\text{т}}$ соответственно и не совпадающих с ортами объекта (в ТЕМ-плоскостях волны). Матричное преобразование Джонса содержит в этой задаче два оператора азимутального поворота A_α, A_β:

$$\bar{S}_{\text{т}\gamma} = A_\beta T A_\alpha \bar{S}_{\text{п}} = \Pi \bar{S}_{\text{п}}, \tag{6}$$

где П — матрица преобразования с рассогласованными азимутами; $\Pi = A_\beta T A_\alpha$ (7); A_α — оператор на входе объекта (падающей волны), A_β — на выходе (рассеянной, прошедшей волны); $\gamma = \alpha, \beta$.

Рассмотрим далее два базисных выражения для сигналов падающей и рассеянной волн (3), представленных, во-первых, в линейно поляризованном ортогональном базисе:

$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$, (8), где $u = x$, $v = y$, во-вторых, в кругополяризованном базисе: $\vec{E} = \vec{E}_R + \vec{E}_L$ (9), где $u = R$; $v = L$.

В линейно поляризованном базисе вида (8) операторы A_α, A_β имеют форму матриц поворота [5]:

$$A_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Здесь $\gamma = \alpha, \beta$.

Развернув матрицу (7) с учетом матриц поворота, получим

$$S_{\text{т}\gamma x} = \Pi_{xx} S_{\text{п}x} + \Pi_{xy} S_{\text{п}y};\ S_{\text{т}\gamma y} = \Pi_{yx} S_{\text{п}x} + \Pi_{yy} S_{\text{п}y}, \tag{11}$$

где

$$\Pi_{xx} = T_{xx}\cos\alpha\cos\beta - T_{xy}\sin\alpha\cos\beta + T_{yx}\cos\alpha\sin\beta - T_{yy}\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\Pi_{xy} = T_{xx}\sin\alpha\cos\beta + T_{xy}\cos\alpha\cos\beta + T_{yx}\sin\alpha\sin\beta + T_{yy}\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\Pi_{yx} = -T_{xx}\cos\alpha\sin\beta + T_{xy}\sin\alpha\sin\beta + T_{yx}\cos\alpha\cos\beta - T_{yy}\sin\alpha\cos\beta;$$

$$\Pi_{yy} = -T_{xx}\sin\alpha\sin\beta - T_{xy}\cos\alpha\sin\beta + T_{yx}\sin\alpha\cos\beta + T_{yy}\cos\alpha\cos\beta. \qquad (12)$$

Как видно из (12), при $\alpha = \beta = 0$ передаточная характеристика вида П переходит в Т. Прежним методом (двух различных векторных сигналов) определить ВПХ исследуемой системы невозможно. Однако из преобразования (11) можно получить линейную систему уравнений для вычисления элементов ВПХ исследуемого объекта. Составим из (11) и (12) такую систему уравнений с восемью неизвестными:

$$S_{\text{тук}} = S_{\text{п}x\text{к}} \sum_{r=1}^{4} z_r + S_{\text{п}y\text{к}} \sum_{n=5}^{8} z_n, \qquad (13)$$

где

$$S_{\text{тук}} = S_{\text{т}yx\text{к}} + S_{\text{т}yy\text{к}};$$
$$z_1 = T_{xx} G\cos\alpha, \quad z_5 = T_{xx} G\sin\alpha;$$
$$z_2 = -T_{xy} G\sin\alpha, \quad z_6 = T_{xy} G\cos\alpha; \qquad (14)$$
$$z_3 = T_{yx} H\cos\alpha, \quad z_7 = T_{yx} H\sin\alpha;$$
$$z_4 = -T_{yy} H\sin\alpha;$$
$$z_8 = T_{yy} H\cos\alpha;$$
$$G = \cos\beta - \sin\beta, \quad H = \sin\beta + \cos\beta,$$
$$\text{к} = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 8. \qquad (15)$$

Для решения этой системы требуется уже восемь различных зондирующих сигналов, восемь сигналов отклика (восемь пар $\vec{E}_{\text{пк}}$ и $\vec{E}_{\text{тк}}$, $k = 1 - 8$). Определители системы получаются громоздкими — 8×8. Однако из ее решений можно вычислить и компоненты ВПХ объекта и ориентацию сигналов — углы α и β.

Более привлекательным представляется кругополяризованный базис векторных сигналов вида (9). Его использование основано на ряде методологических положений [1; 4; 6].

Векторный сигнал $\vec{E}$ записывается адекватной моделью комплексного сигнала $\dot{E}$. При этом орты ТЕМ-плоскости волны $\vec{x}^0$, $\vec{y}^0$ отождествляются с ортами комплексно-сигнальной плоскости 1, j:

$$\vec{x}^0 E_x + \vec{y}^0 E_y = \vec{E} \equiv \dot{E} = E_x + j E_y. \qquad (16)$$

Здесь

$$\vec{x}^0 \equiv 1; \quad \vec{y}^0 \equiv j; \qquad (17)$$

E_x, E_y — действительные функции времени.

Спектром векторного сигнала $\vec{E} \models \vec{E}(t)$ служит спектр (Фурье-преобразование) тождественного комплексного сигнала $\dot{E} = \dot{E}(t)$. Выразим это соответствием

$$\dot{S}(\vec{E}) = \dot{S}(\dot{E} \equiv \vec{E}) = \dot{S}_m(\omega), \qquad (18)$$

в котором $\dot{S}_m(\omega)$ трактуется как комплексный спектр векторных амплитуд кругополяризованных векторных гармоник, записанных в комплексной форме. Спектр $\dot{S}_m(\omega)$ называют «двусторонним спектром» —

спектром по частоте кругового вращения ω: $-\infty \leqslant \omega \leqslant \infty$ (19), где $\omega > 0 \to \omega = 2\pi f$; $\omega < 0 \to \omega = -2\pi f$; $\to$ символ соответствия; f — частота колебаний (односторонняя) — $0 \leqslant f \leqslant \infty$. Знак $\pm|\omega|$, как известно, определяется направлением отсчета угла вращения векторной гармоники $\vec{E}_R$ или $\vec{E}_L$ в репере $\vec{x}^0$, $\vec{y}^0$.

Для векторных сигналов $\vec{E} = \vec{E}(t)$ существует, по крайней мере, два вида комплексных спектров. Один — по частоте кругового вращения — $\dot{S}_m(\omega)$ — комплексный спектр векторных амплитуд (18), например, связанный с рядом Фурье (в комплексной форме) для периодических сигналов:

$$\vec{E} \equiv \dot{E} = \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{F}_n e^{jn\omega_1 t}, \tag{20}$$

где $\dot{F}_n = \dot{S}_m(\omega)$ из (18). Второй спектр — спектр комплексных амплитуд кругополяризованных векторных гармоник по частоте колебаний — $S(f)$:

$$S(f) = S_L(f) \cup S_R(f) \tag{21}$$

($\cup$ — знак объединения).

Связь между комплексными амплитудами (символического метода комплексных амплитуд) и векторными амплитудами (18) известна [6]:

$$S_R(f) = \dot{S}_{mR}(\omega) = \dot{S}_m(\omega > 0); \; S_L(f) = \dot{S}^*_{mL}(\omega) = \dot{S}_m(\omega < 0). \tag{22}$$

Это следует из соотношений линейно- и кругополяризованного базиса:

$$S_R = 1/2(S_x + jS_y); \; S_L = 1/2(S_x - jS_y). \tag{23}$$

Введение комплексных амплитуд кругополяризованных гармоник позволяет использовать спектральную матрицу Джонса — ВПХ исследуемого объекта для спектральных векторов Джонса, выраженных кругополяризованным базисом: $\bar{S}_{\text{тс}} = C\bar{S}_{\text{пс}}$, (24), где $\bar{S}_c$ — спектральные векторы Джонса, выраженные кругополяризованным базисом

$$\bar{S}_c = \begin{bmatrix} S_R \\ S_L \end{bmatrix}, \tag{25}$$

C — ВПХ по кругополяризованному базису,

$$C = \begin{bmatrix} C_{RR} & C_{RL} \\ C_{LR} & C_{LL} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Запись векторных сигналов, смещенных по азимуту на входе и выходе исследуемой системы, в тождественной комплексно-сигнальной форме описывается оператором

$$A_\gamma \equiv \dot{A}_\gamma = e^{j\gamma}, \tag{27}$$

где $\gamma = \alpha$, β. Отсюда векторные сигналы, смещенные на угол γ, записываются как

$$\vec{E}_\gamma \equiv \dot{E}_\gamma = \dot{E}e^{j\gamma}. \tag{28}$$

Следовательно, и спектры векторных амплитуд будут содержать множители $e^{j\gamma}$:

$$\dot{S}_{m\gamma} = \dot{S}_m e^{j\gamma}. \tag{29}$$

Спектры правокруговых и левокруговых комплексных амплитуд получаются исходя из (22) с различными знаками аргументов операторов азимутального поворота $A_{(R,L),\gamma} = e^{\pm j\gamma}$.

Рассмотренная методология позволяет записать матричное преобразование Джонса по кругополяризованному базису с учетом азимутальных поворотов в более простой форме, чем по линейно поляризованному базису (6), (11), (12): $\overline{S}_{\text{т}c\gamma} = Q\overline{S}_{\text{п}c}$, (30). Здесь

$$Q_{RR} = C_{RR}\, e^{j(\alpha+\beta)};\ Q_{RL} = C_{RL}\, e^{-j(\alpha-\beta)};\ Q_{LR} = C_{LR}\, e^{j(\alpha-\beta)};$$
$$Q_{LL} = C_{LL}\, e^{-j(\alpha+\beta)}. \tag{31}$$

Как видно из (31), ВПХ — матрица Q сохраняет полностью амплитудно-частотные характеристики компонент ВПХ исследуемого объекта и с точностью до аддитивной постоянной — фазочастотные.

Взяв два известных векторных сигнала $\vec{E}_{\text{п}1}$, $\vec{E}_{\text{п}2}$ и выполнив измерения спектров по кругополяризованному базису двух соответствующих сигналов отклика $\vec{E}_{\text{т}1}$, $\vec{E}_{\text{т}2}$, по которым формируются векторы Джонса $\overline{S}_{\text{т}c\gamma1}$, $\overline{S}_{\text{т}c\gamma2}$, получим две пары уравнений относительно компонент матрицы Q:

$$S_{\text{т}R\gamma1} = S_{\text{п}R1}\, Q_{RR} + S_{\text{п}L1}\, Q_{RL};\ S_{\text{т}R\gamma2} = S_{\text{п}R2}\, Q_{RR} + S_{\text{п}L2}\, Q_{RL}; \tag{32}$$

$$S_{\text{т}L\gamma1} = S_{\text{п}R1}\, Q_{LR} + S_{\text{п}L1}\, Q_{LL};\ S_{\text{т}L\gamma2} = S_{\text{п}R2}\, Q_{LR} + S_{\text{п}L2}\, Q_{LL}. \tag{33}$$

Системы разрешимы, если определители однородных систем (оба они одинаковы) не равны нулю: $\Delta_0 \neq 0$ (34). Здесь

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} S_{\text{п}R1} & S_{\text{п}L1} \\ S_{\text{п}R2} & S_{\text{п}L2} \end{vmatrix} = S_{\text{п}R1}\, S_{\text{п}L2} - S_{\text{п}L1}\, S_{\text{п}R2}. \tag{35}$$

Отсюда получим

$$S_{\text{п}R1}\, S_{\text{п}L2} \neq S_{\text{п}L1}\, S_{\text{п}R2}. \tag{36}$$

Введя фазоры по кругополяризованному базису [6], точнее, их частотные спектры

$$q_{\text{п}1} = q_{\text{п}1}(f) = \frac{S_{\text{п}L1}}{S_{\text{п}R1}}; \tag{37}$$

$$q_{\text{п}2} = q_{\text{п}2}(f) = \frac{S_{\text{п}L2}}{S_{\text{п}R2}}, \tag{38}$$

найдем естественное поляризационное условие для (34): $q_{\text{п}2} \neq q_{\text{п}1}$ (39). Откуда следует, что поляризационно-спектральная структура зондирующих сигналов $\vec{E}_{\text{п}1}$, $\vec{E}_{\text{п}2}$ должна быть различной.

Компоненты матрицы Q — ВПХ по кругополяризованному базису получим из двух неоднородных систем (32) и (33):

$$Q_{RR} = \frac{\Delta_{RR}}{\Delta_0}; \; Q_{RL} = \frac{\Delta_{RL}}{\Delta_0}; \; Q_{LR} = \frac{\Delta_{LR}}{\Delta_0}; \; Q_{LL} = \frac{\Delta_{LL}}{\Delta_0}, \tag{40}$$

где Δ_0, Δ_{RR}, Δ_{RL}, Δ_{LR}, Δ_{LL} — соответствующие определители.

Из условий и решений поставленной задачи можно заключить следующее.

Линейные стационарные электродинамические объекты по отношению к сигналам с вращающейся поляризацией и произвольной ориентации линейной (векторным сигналам) обладают векторными передаточными характеристиками, имеющими форму матриц передачи (рассеяния, дифракции), комплексные элементы которых являются частотными характеристиками для базисных компонент векторного сигнала. Многообразие векторных поляризационных базисов гармонической волны вызывает множественность ВПХ исследуемого объекта и обуславливает целесообразность выбора такого базиса, компоненты ВПХ которого остаются инвариантными при различной ориентации по отношению к объекту как зондирующего векторного сигнала, так и сигнала отклика. Из решения задачи в линейнополяризованном ортогональном базисе сигнала, произвольно ориентированном по отношению к объекту, следует возможность вычисления по спектрам зондирующего сигнала и спектрам отклика не только комплексных частотных характеристик — компонент ВПХ объекта, но и ориентации векторных сигналов, однако задача сводится к громоздким вычислениям определителей восьмого порядка. Решение задачи в кругополяризованном базисе показывает, что ВПХ по этому базису сохраняет инвариантными амплитудно-частотные характеристики своих компонент, а фазочастотные характеристики сохраняют инвариантной «окраску», т. е. характер дисперсии; матрица вычисления оказывается наиболее простой — 2 × 2 элемента.

Список литературы: 1. *Горобец Н. Н., Давидчевский Ю. И., Чекалин Г. М.* Комплексный спектр сигналов с вращающейся и произвольной линейной поляризацией // Вестн. Харьк. ун-та. 1982. № 227. С. 3—10. 2. *Горобец Н. Н., Давидчевский Ю. И., Чекалин Г. М.* Собственные поляризации как критерий в фазорной эллипсометрии // Вестн. Харьк. ун-та. 1985. № 273. С. 5—11. 3. *Горобец Н. Н., Давидчевский Ю. И., Чекалин Г. М.* и др. Формирование поляризационных мультиплетов на СВЧ // Вестн. Харьк. ун-та. 1987. № 307. С. 49—55. 4. *Горобец Н. Н., Давидчевский Ю. И.* Комплексно-сигнальная модель волновых сигналов // Отбор и передача информации. 1989. № 3 (79). С. 35—40. 5. *Аззам Р., Башара Н.* Эллипсометрия и поляризованный свет. М., 1981. 583 с. 6. *Рамзей В. Г.* Передача между антеннами эллиптической поляризации. Антенны эллиптической поляризации. М., 1961. С. 15—29.

Поступила в редколлегию 27.09.88