

К РАСЧЕТУ ПОЛЯ В МНОГООТВЕРСТНЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ЦВМ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. И. Петрушенко, Г. П. Стрий

Киев

Многоотверстные ферромагнитные элементы находят широкое применение в цифровой вычислительной технике [1]. Принцип их действия основан на нелинейности характеристик ферромагнетика. Тем не менее определенный практический интерес представляет расчет поля в линейном приближении.

Подобный расчет дает возможность оценить влияние формы отверстий и их взаимного расположения на потокораспределение. С вычислительной точки зрения линейная задача позволяет более простым способом проанализировать причины накопления погрешности и способы ее уменьшения.

При расчете поля в магнитных системах сложной формы удобно использовать метод интегральных уравнений [2], поскольку он позволяет разработать достаточно простые и вместе с тем универсальные алгоритмы и программы для ЦВМ. В соответствии с этим методом поле рассчитывается в два этапа: на первом определяются плотности связанных токов намагниченности на поверхности ферромагнетика решением интегрального уравнения, на втором рассчитывается поле в исследуемой части пространства интегрированием по области, занимаемой связанными токами и проводниками с током.

Наиболее ответственным и трудоемким моментом при этом является решение интегрального уравнения.

В плоско-параллельном поле интегральное уравнение для плотности тока намагниченности имеет вид

$$\sigma(Q) - \frac{\kappa}{\pi} S\sigma = \frac{\kappa}{\pi} F(Q), \quad Q \in L; \quad (1)$$

где

$$S\sigma = \oint_L \sigma(M) \frac{\cos(\widehat{\vec{n}_Q, \vec{r}_{QM}})}{r_{QM}} dl_M, \quad Q \in L;$$

$$F(Q) = \iint_{D_0} \delta(M) \frac{\cos(\widehat{\vec{n}_Q, \vec{r}_{QM}})}{r_{QM}} dS_M, \quad Q \in L;$$

$$\kappa = \frac{\mu_\Phi - \mu_0}{\mu_\Phi + \mu_0};$$

$\sigma(Q)$ — плотность тока намагниченности в точке Q границы ферромагнетика L ;

D_0 — сечение проводников с током, плотность которого δ ;
 n_Q — нормаль к границе L в точке Q , направленная из ферромагнетика в воздух;
 r_{QM} — расстояние между точками Q и M .

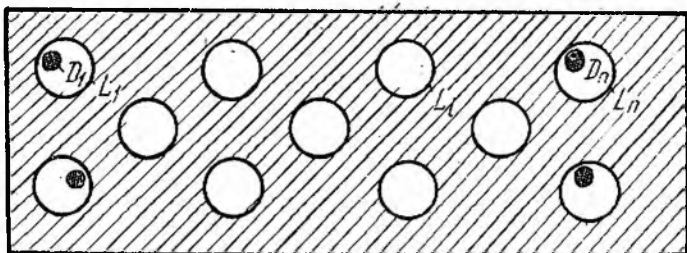


Рис. 1. Сечение ферромагнитного элемента.

Известно [3], что в интервале $(-1, 1)$ изменения параметра κ нет характеристических чисел. Следовательно, при конечной магнитной проницаемости μ_f для любой формы сечения элементов независимо от расположения проводников и значений токов в них уравнение (1) разрешимо и имеет единственное решение. Однако погрешности при численном решении уравнения (1) существенно зависят от формы контура L , значений токов в проводниках и значений магнитной проницаемости.

Рассмотрим этот вопрос подробно. Предположим, что сечение элемента имеет вид, показанный на рис. 1. Контур $L = L_0 + \sum_{i=1}^n L_i$ представляет собой $(n + 1)$ замкнутых контуров, один из которых (L_0) охватывает все остальные. В этом случае $\kappa = 1$, соответствующее $\mu_f = \infty$, является характеристическим числом ранга n , поскольку, как нетрудно проверить, сопряженное однородное уравнение при $\kappa = 1$ имеет n линейно независимых собственных функций:

$$\sigma_{0i}(Q) = \begin{cases} 0, & \text{если } Q \in L_0 + \sum_{j=1}^n L_j; \\ \frac{1}{L_i}, & \text{если } Q \in L_i \ (i = 1, \dots, n). \end{cases} \quad (2)$$

В реальных условиях значение $\kappa = 1$ не достигается. Однако уже при $\mu_f/\mu_0 \geq 200$, например, κ отличается от единицы в третьем и более высоком разрядах. Естественно, при этом интегральное уравнение (1) плохо обусловлено: при численном решении этого уравнения или при аппроксимации его алгебраической системой малым погрешностям в задании исходной информации могут соответствовать большие погрешности в решении, полностью обесценивающие результат. Вместе с тем численные расчеты на ЦВМ показывают, что в тех случаях, когда при κ , близких к единице, но не равных ей, правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию разрешимости при $\kappa = 1$, т. е. когда полный ток, протекающий сквозь отверстие D_i , ограниченное контуром L_i , равен нулю:

$$I_i = \iint_{D_i} \delta dS = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

плохая обусловленность не проявляется. Это можно объяснить следующим образом.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$A_x \sigma = \frac{x}{\pi} F, \quad (4)$$

где
$$A_x = E - \frac{x}{\pi} S;$$

E — оператор тождественного преобразования;

$$F = S_0 \delta.$$

При $x = 1$

$$A_1 = E - \frac{1}{\pi} S.$$

Следуя работе [4], представим решение уравнения (4) в виде ряда по ортонормальной системе собственных функций $U_{x1}, U_{x2}, \dots, U_{xk}, \dots$ оператора $A_x^1 A_x$, соответствующих собственным числам¹ $\chi_{x1}, \chi_{x2}, \dots, \chi_{xk}, \dots$

$$\sigma = \sum_k d_{xk} U_{xk}. \quad (5)$$

Для определения коэффициентов $d_{xk} (k = 1, 2, \dots)$ разложим правую часть F в ряд по функциям

$$V_{xk} = \frac{1}{\sqrt{\chi_{xk}}} A_x U_{xk} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

представляющих собой ортонормальную систему собственных функций оператора $A_x A_x^1$:

$$F = \sum_k C_{xk} V_{xk}, \quad (7)$$

где

$$C_{xk} = (F, V_{xk}). \quad (8)$$

Подставляя (5) и (7) в (4), получаем

$$\sum_k d_{xk} A_x U_{xk} = \sum_k d_{xk} \sqrt{\chi_{xk}} V_{xk} = \frac{x}{\pi} \sum_k C_{xk} V_{xk},$$

откуда

$$d_{xk} = \frac{C_{xk}}{\sqrt{\chi_{xk}}} \frac{x}{\pi}. \quad (9)$$

При x , близких к единице, среди чисел $\chi_{xk} (k = 1, 2, \dots)$ есть n чисел, близких к нулю. Именно они и претерпевают большие относительные изменения при малых вычислительных погрешностях, что может приводить к значительным колебаниям соответствующих коэффициентов d_{xk} и, следовательно, к неустойчивости получаемых решений.

Существование близких к нулю собственных чисел при близком к единице x следует из того, что при $x = 1$ оператор $A_1 A_1^1$ имеет собственное число ранга n , равное нулю. Действительно, непосредственная

¹ Собственные числа повторяются в этой последовательности столько раз, каков их ранг.

подстановка показывает, что функции σ'_{oi} [2] при $\chi_{1i} = 0$ $i = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяют уравнению

$$A_1 A_1' \sigma'_{oi} = \chi_{1i} \sigma'_{oi}, \quad (10)$$

где $A_1 A_1' = \left(E - \frac{1}{\pi} S' \right) = E - \frac{1}{\pi} S - \frac{1}{\pi} S' + \frac{1}{\pi^2} SS';$

$$S \sigma'_{oi} = \oint \frac{\cos(\bar{n}_Q, \widehat{r}_{QM})}{r_{QM}} \sigma'_{oi}(M) dl_M = \frac{1}{L_i} \oint \frac{\cos(\bar{n}_Q, \widehat{r}_{QM})}{r_{QM}} dl_M;$$

$$S' \sigma'_{oi} = \oint \frac{\cos(\bar{n}_M, \widehat{r}_{QM})}{r_{QM}} \sigma'_{oi}(M) dl_M = \frac{1}{L_2} \varphi;$$

$$SS'_{oi} = \oint_L \oint_L \frac{\cos(\bar{n}_Q, \widehat{r}_{QM})}{r_{QM}} \frac{\cos(\bar{n}_P, \widehat{r}_{PM})}{r_{PM}} \sigma'_{oi}(P) dl_M dl_P =$$

$$\frac{\pi}{L_i} \oint_L \frac{\cos(\bar{n}_Q, \widehat{r}_{QM})}{r_{QM}} dl_M.$$

Следовательно, σ'_{oi} ($i = 1, \dots, n$) являются собственными функциями, а параметр $\chi_{1i} = 0$ — собственным числом ранга n оператора $A_1 A_1'$. Поскольку собственные числа сопряженных операторов сопряженные, то $\chi_{1i} = 0$ — собственное число ранга n оператора $A_1' A_1$.

Теперь не представляет труда понять, почему при выполнении условия (3) плохая обусловленность не сказывается. Для этого выпишем выражения коэффициентов C_{1i} ($i = 1, \dots, n$), соответствующие $\chi = 1$ и $\chi_{1i} = 0$:

$$C_{1i} = \sigma'_{oi} \oint F(Q) dl_Q = \sigma'_{oi} \oint \oint_{L_i D_i} \delta(M) \times$$

$$\times \frac{\cos(\bar{n}_Q, \widehat{r}_{QM})}{r_{QM}} dS_M dl_Q = \sigma'_{oi} 2\pi L_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (11)$$

Из этих выражений следует, что если суммарный ток сквозь i -е отверстие равен нулю, то коэффициент $C_{1i} = 0$, а при χ , близких к единице, C_{1i} близок к нулю. В результате влияния члена с коэффициентом d_{1i} в выражении (5) мало даже при относительно больших его колебаниях, вызванных погрешностями.

Если же условия (3) не выполняются, то в уравнении (1) можно сделать замену переменных так, чтобы правая часть вновь полученного уравнения удовлетворяла условию разрешимости. В самом деле, будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\sigma(Q) = \sigma^*(Q) + \sum_{i=1}^n \gamma_i \sigma'_{oi}, \quad (12)$$

где коэффициенты γ_i ($i = 1, \dots, n$) неизвестны.

Уравнение (1) относительно новой переменной $\sigma^*(Q)$ запишется так:

$$\sigma^*(Q) - \frac{\kappa}{\pi} S\sigma^* = \frac{\kappa}{\pi} F^*(Q), \quad (13)$$

где

$$F^*(Q) = S_0\delta - \frac{\pi}{\kappa} \sum_{i=1}^n \gamma_i \sigma'_{oi} + \sum_{i=1}^n \gamma_i S\sigma'_{oi}. \quad (14)$$

Легко проверить, что если коэффициенты

$$\gamma_i = \frac{2\kappa}{1-\kappa} I_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (15)$$

то правая часть выражения (14) удовлетворяет условию разрешимости

$$\oint_{L_i} F^*(Q) dQ = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (16)$$

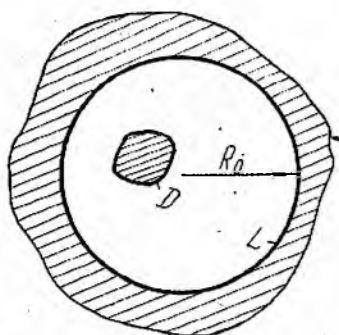


Рис. 2. Отверстие кругового сечения в неограниченном ферромагнетике.

ограниченном ферромагнетике имеется одно отверстие радиуса R_0 (рис. 2). Если учесть, что ядро уравнения при этом

При вычислении новой правой части (14), как показывают численные эксперименты, необходима высокая точность вычисления интегралов, поскольку имеют место разности близких величин.

Ниже, в приложении, даются выражения для погрешности в решении уравнений (1) и (13) для воздушной полости кругового сечения с током (рис. 2), наглядно иллюстрирующие все изложенное.

Приложение

Выведем приближенную формулу для погрешности в решении интегрального уравнения (1), предполагая, что в неограниченном ферромагнетике имеется одно отверстие радиуса R_0 (рис. 2). Если учесть, что ядро уравнения при этом

$$\frac{\cos(\widehat{n_Q, \vec{r}_{QM}})}{r_{QM}} = \frac{1}{2R},$$

нетрудно получить точное решение его

$$\sigma(Q) = \frac{\kappa}{\pi} \left[\frac{\kappa}{1-\kappa} \frac{I}{R_0} + F(Q) \right], \quad (1^*)$$

где $I = \iint_D \delta(M) dS_M$ — полный ток в отверстии.

Погрешность в решении интегрального уравнения складывается из погрешности в задании геометрии системы и погрешности аппроксимации его алгебраическими уравнениями. Поэтому фактически решается уравнение вида

$$\sigma(Q) - \frac{\kappa}{\pi} S\sigma = \frac{\kappa}{\pi} F(Q), \quad (2^*)$$

где

$$\tilde{S} = S + P; \quad (3^*)$$

$$\tilde{F} = F + h; \quad (4^*)$$

$$\tilde{\sigma} = \sigma + r. \quad (5^*)$$

Вычитая из уравнения (2*) выражение (1) и пренебрегая членом Rr , получаем приближенное уравнение для погрешности

$$r(Q) - \frac{x}{\pi} Sr = \frac{x}{\pi} h(Q) + \frac{x}{\pi} P\sigma. \quad (6^*)$$

Проинтегрируем это уравнение по контуру L . После некоторых преобразований имеем

$$\oint r(Q) dl_Q = \frac{1}{1-x} \frac{x}{\pi} [\oint h(Q) dl_Q + \oint \oint \sigma(M) P(QM) dl_M dl_Q] \quad (7^*)$$

Подставляя (7*) и (1*) в (6*), находим

$$\begin{aligned} r(Q) = & \frac{x}{\pi} h(Q) + \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2R_0} \frac{1}{1-x} \oint h(Q) dl_Q + \\ & + \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 \frac{1}{2R_0} \frac{x}{(1-x)^2} \frac{I}{R_0} \oint \oint P(Q, M) dl_M dl_R + \\ & + \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 \frac{1}{2R_0} \frac{1}{1-x} \oint \oint F(M) P(Q, M) dl_M dl_Q + \\ & + \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \frac{x}{1-x} \frac{I}{R_0} \oint R(Q, M) dl_M + \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \oint F(M) P(Q, M) dl_M. \end{aligned} \quad (8^*)$$

Теперь в уравнении (1) произведем замену переменных:

$$\sigma(Q) = \sigma^*(Q) + \sigma_0,$$

где

$$\sigma_0 = \frac{2xI}{L(1-x)}.$$

Правая часть и точное решение уравнения (13) при этом соответственно равны

$$R^*(Q) = F(Q) - \frac{I}{R_0},$$

$$\sigma^*(Q) = \frac{x}{\pi} F^*(Q).$$

Уравнение для погрешности имеет вид

$$r^*(Q) - \frac{x}{\pi} Sr^* = \frac{x}{\pi} (h^*(Q) + R\sigma^*), \quad (9^*)$$

где

$$r^* = \tilde{r} - \sigma^*;$$

$$h^* = \tilde{h} - F^*.$$

Решая его аналогично тому, как это сделано для уравнения (6*), получаем

$$\begin{aligned}
 r^*(Q) = & \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2R_0} \frac{1}{1-x} \oint_L h^*(M) dl_M + \frac{x}{\pi} h^*(Q) + \\
 & + \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 \frac{1}{2R_0} \frac{1}{1-x} \oint_L \oint_L \left[F(M) - \frac{I}{R_0} \right] P(Q, M) dl_M dt_Q + \\
 & + \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \oint_L \left[F(M) - \frac{I}{R_0} \right] \cdot P(Q, M) dl_M. \quad (10*)
 \end{aligned}$$

Сравнение выражений (8*) и (10*) показывает, что при суммарном токе в отверстии, отличном от нуля, если $x \rightarrow 1$, погрешность в первом случае стремится к бесконечности пропорционально $\frac{1}{(1-x)^2}$, а во втором — пропорционально $\frac{1}{1-x}$. Точное же решение, как это видно из уравнения (1*), при $x \rightarrow 1$ выражается пропорционально $\frac{1}{1-x}$.

Таким образом, предложенная в работе замена переменных позволяет значительно улучшить обусловленность задачи и сделать ее практически не проявляющейся в диапазоне реальных изменений x .

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Бардиж. Магнитные элементы цифровых вычислительных машин. Изд-во «Энергия», 1967.
2. Е. И. Петрушенко. К расчету статистических магнитных полей в нелинейных средах методом интегральных уравнений. Сб. «Теоретическая электротехника», вып. 4. Изд-во Львовск. ун-та, 1967.
3. И. П. Забрейко и др. Интегральные уравнения. Изд-во «Наука», 1968.
4. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. О плохо обусловленных системах линейных уравнений. ЖВП и МФ, т. 1, № 3, 1963.