Проблемы бионики
1999. Вып. 51. С. 27–33

ХТУРЭ

УДК 519.7

З.В. ДУДАРЬ, А.В ПРОНЮК, С.Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

ОБ ИЗОМОРФНЫХ ПРЕДИКАТАХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Ввиду важности вопроса об изоморфности характеристических функций эквивалентностей для решения задач компараторной идентификации* в этой статье продолжена его разработка.

Предикаты P и P' на $A\times B$ и $A'\times B'$ называются слабо изоморфными (или просто изоморфными), если существуют биекции φ: $A\to A'$ и ψ: $B\to B'$, такие что для всех $x\in A$ и $y\in B$ выполняется равенство

$$P(x, y)=P'(\varphi(x), \psi(y)) . \tag{1}$$

Будем говорить также, что предикат P (φ, ψ)-*изоморфен* предикату P'. Биекции φ и ψ, удовлетворяющие условию (1), называются *левым* и *правым изоморфизмами* предикатов P и P'. Предикаты $P(x, y)$ и $P'(x', y')$ на $A\times B$ и $A'\times B'$ называются *сильно изоморфными*, если существует биекция φ: $A\cup B\to A'\cup B'$, такая что для всех $x\in A$ и $y\in B$ выполняется равенство

$$P(x, y)=P'(\varphi(x), \varphi(y)) . \tag{2}$$

Будем говорить также, что предикат P φ-*изоморфен* предикату P'. Биекция φ, удовлетворяющая условию (2), называется *изоморфизмом предикатов* P и P'.

Понятия слабого и сильного изоморфизмов предикатов играют в теории компараторной идентификации важную роль. Дело в том, что выбор обозначений для сигналов идентифицируемой системы находится всецело во власти исследователя и определяется принятой им системой единиц. Если два исследователя, изучая поведение одной и той же системы, используют разные обозначения для ее входных сигналов, то они получат для нее различные предикаты. Если все входные сигналы одной и той же изучаемой системы каждым исследователем записываются в единой (но своей) системе единиц, то получаемые ими предикаты будут сильно изоморфными, если же - в разных, то предикаты будут слабо изоморфными. В этом случае будем говорить, что изучаемые системы *идентифицированы с точностью до обозначений* (общих или раздельных). В случае сильной изоморфности предикатов будем говорить, что идентифицируемые системы совпадают с точностью до обозначений в *единой* системе единиц. В случае слабой изоморфности предикатов будем говорить, что идентифицируемые системы совпадают с точностью до обозначений в *разных* системах единиц.

---

* *Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко С. Ю.*, Предикаты эквивалентности в задачах компараторной идентификации // Проблемы бионики. 1999. № 51. С. 19-26.

Теорема 1. *Изоморфизм φ предикатов P и P′, определенных соответственно на $A \times B$ и $A' \times B'$, биективно отображает $A \cap B$ на $A' \cap B'$, $A \setminus B$ на $A' \setminus B'$ и $B \setminus A$ на $B' \setminus A'$.*

Доказательство. Доказываем, что φ отображает $A \cap B$ на $A' \cap B'$. Поскольку $A \cap B \subseteq A \cup B$, то, по определению сильно изоморфных предикатов P и P', для всех $x \in A \cap B$, $y \in B$ и $z \in A$ имеют место равенства $P(x, y)=P'(\varphi(x), \varphi(y))$ и $P(z, x)=P'(\varphi(z), \varphi(x))$. Следовательно, $\varphi(x) \in A'$ и $\varphi(x) \in B'$, т.е. $\varphi(x) \in A' \cap B'$. Так как φ - биекция, то для всех $x \in A' \cap B'$, $y \in B'$ и $z' \in A'$ имеют место равенства $P'(x, y)=P(\varphi^{-1}(x'), \varphi^{-1}(y'))$, $P'(z, x)=P(\varphi^{-1}(z'), \varphi^{-1}(x'))$. Следовательно, $\varphi^{-1}(x') \in A' \cap B'$. Таким образом, ограничение функции φ на $A \cap B$ имеет значения в множестве $A' \cap B'$ и сюръективно. Кроме того, φ инъективно. Поэтому φ биективно отображает множество $A \cap B$ на множество $A' \cap B'$. Доказываем, что φ отображает $A \setminus B$ на $A' \setminus B'$. Пусть $x \in A \setminus B$. Предположим, что $\varphi(x) \in B'$. Тогда для всех $z' \in A'$ имеет место равенство $P'(z', \varphi(x))=P(\varphi^{-1}(z'), x)$. Следовательно, $x \in B$, что противоречит условию. Таким образом, имеем: $\varphi(x) \in A' \setminus B'$. Аналогично выводим, что для всех $x \in A' \setminus B'$ $\varphi^{-1}(x) \in A' \setminus B'$. Значит, φ сюръективно отображает $A \setminus B$ на $A' \setminus B'$. Будучи инъективной по определению, φ биективно отображает $A \setminus B$ на $A' \setminus B'$. Доказательство того, что φ биективно отображает $A' \setminus B'$ на $A \setminus B$, аналогично предыдущему. Теорема доказана.

Содержательно теорема 1 означает, что если сигналы x и y системы $P(x, y)$ имеют имена в единой системе обозначений, то при переобозначении этих имен необходимо имена из области $A \cap B$ превратить в имена из области $A' \cap B'$, имена из $A \setminus B$ – в имена из $A' \setminus B'$ и имена из $B \setminus A$ – в имена из $B' \setminus A'$. Если сделать иначе, то предикат P', получаемый из предиката P в результате переобозначения его входных сигналов, может оказаться неизоморфным предикату P, что недопустимо.

Теорема 2. *Если $A \cap B = \varnothing$ и $A' \cap B' = \varnothing$, то слабо изоморфные предикаты P и P′, определенные на $A \times B$ и $A' \times B'$, будут также и сильно изоморфными.*

Доказательство. Если предикаты P и P' слабо изоморфны, то существуют биекции $\psi_1 : A \to A'$ и $\psi_2 : B \to B'$, такие, что для всех $x \in A$ и $y \in B$ выполняется равенство $P(x, y)=P'(\psi_1(x), \psi_2(y))$. Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), \text{ если } x \in A; \\ \psi_2(x), \text{ если } x \in B. \end{cases}$$

Очевидно, что φ биективно отображает $A \cup B$ на $A' \cup B'$, и для всех $x \in A$ и $y \in B$ выполняется равенство $P(x, y)=P'(\varphi(x), \varphi(y))$. Это означает, что предикаты P и P′ сильно изоморфны. Теорема доказана.

Содержательно теорема 2 означает: два различных описания одной и той же идентифицируемой системы $P(x, y)$, входные сигналы которой определены на непересекающихся областях, всегда совпадают с точностью до сильного изоморфизма, т.е. совпадают с точностью до обозначений входных сигналов x и y системы P, описываемых в единой системе обозначений.

Теорема 3. *Пусть P и P' - предикаты, определенные на $A\times B$ и $A'\times B'$; $A\cap B$ не пусто; φ_1: $A\to A'$ и φ_2: $B\to B'$ - левый и правый изоморфизмы предикатов P и P'. Если образом множества $A\cap B$ при отображениях φ_1 и φ_2 является множество $A'\cap B'$ и на множестве $A\cap B$ значения биекций φ_1 и φ_2 совпадают, то предикаты P и P' сильно изоморфны.*

Доказательство. Так как предикаты P и P' слабо изоморфны, то для всех $x\in A$ и $y\in B$ $P(x, y)=P'(\varphi_1(x), \varphi_2(y))$. Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), \text{ если } x\in A, \\ \varphi_2(x), \text{ если } x\in B\setminus A. \end{cases}$$

Поскольку $\varphi_1(x)$ биективно отображает множество A на множество A', а $\varphi_2(x)$ - множество $B\setminus A$ на $B'\setminus A'$, то $\varphi(x)$ биективно отображает $A\cup B$ на $A'\cup B'$. Докажем, что для всех $x\in A$ и $y\in B$ $P(x, y)=P'(\varphi_1(x), \varphi_2(y))$. Пусть $x\in A$ и $y\in B$. Возможны два случая: $y\in A\cap B$ и $y\in B\setminus A$. Пусть $y\in A\cap B$. Тогда, поскольку по условию теоремы 3 значения биекций φ_1 и φ_2 совпадают, то $\varphi_2(x)=\varphi_1(x)=\varphi(x)$. Если же $y\in B\setminus A$, то $\varphi_2(y)=\varphi(y)$. Следовательно, при любых $x\in A$ и $y\in B$ имеем: $P(x, y)=P'(\varphi_1(x), \varphi_2(y))=P'(\varphi(x), \varphi(y))$. Это означает, что предикаты P и P' сильно изоморфны. Теорема доказана.

Содержательно теорема 3 означает, что если для системы $P(x, y)$ найдется сигнал a, который можно подать как на вход x, так и на вход y (т.е. $x=y=a$), и если все такие сигналы переобозначаются биекциями $\varphi_1(x)=x'$ и $\varphi_2(y)=y'$ по-одинаковому, то в результате получаем предикат $P'(x, y)$, вне зависимости от способа переобозначения остальных сигналов (при условии, что для них не используются имена сигналов a).

Теорема 4. *Если предикаты эквивалентности E и E' на $A\times A$ и $A'\times A'$ слабо изоморфны, то они также и сильно изоморфны.*

Доказательство. Поскольку предикаты E и E' слабо изоморфны, то существуют биекции φ_1:$A\to A'$ и φ_2:$A\to A'$, такие что для любых $x, y\in A$ имеет место равенство $E(x, y)=E'(\varphi_1(x), \varphi_2(y))$ (а). Подставляя в (а) $y=x$, по свойству рефлексивности предиката E получаем $E'(\varphi_1(x), \varphi_2(x))=1$ (б). Далее, используя свойство симметричности предиката E', выводим $E'(\varphi_2(x), \varphi_1(x))=1$ (в). Пусть $x, y\in A$ таковы, что $E(x, y)=1$. Тогда из (а) следует $E'(\varphi_1(x), \varphi_2(y))=1$ (г). По свойству транзитивности предиката E' из (в) и (г) выводим $E'(\varphi_2(x), \varphi_2(y))=1$ (д). Если же $x, y\in A$ таковы, что $E(x, y)=0$, то из (а) следует $E'(\varphi_1(x), \varphi_2(y))=0$ (е). Если бы выполнялось равенство (д), то, в силу транзитивности предиката E', из (б) и (д) следовало бы $E'(\varphi_1 x), \varphi_2(y))=1$, что противоречит (е). Следовательно, (д) не выполняется, т.е. $E'(\varphi_2(x), \varphi_2(y))=0$. Итак, для всех $x, y \in A$ имеет место равенство $E(x, y)=E'(\varphi_2(x), \varphi_2(y))$. Это означает, что предикаты E и E' сильно изоморфны. Теорема доказана.

Содержательно теорема 4 означает, что сигналы x и y предиката эквивалентности $E(x, y)$ нельзя описывать в разных системах обозначений, а только в одной и той же. Желая описать систему $E(x, y)$ моделью эквивалентности, исследователь должен выражать ее выходные сигналы x и y в одной системе обозначений.

Теорема 5. *Пусть E - предикат эквивалентности на $A\times A$ и $F: A\to B$ - его характеристическая функция. Тогда эквивалентность E изоморфна равенству D на $B\times B$ в том и только том случае, когда F инъективна.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть предикаты E и D изоморфны. Тогда существует биекция $\varphi: A\to B$ такая, что для всех $x, y\in A$ $E(x, y)=D(\varphi(x), \varphi(y))$. Проверяем инъективность функции F. Пусть $x, y\in A$ таковы, что $F(x)=F(y)$. Тогда $E(x, y)=1$, следовательно, $\varphi(x)=\varphi(y)$. Поскольку φ биективна, то $x=y$. *Достаточность.* Пусть функция F инъективна. Поскольку F сюръективна, то она биективна. По определению характеристической функции F предиката E для всех $x, y\in A$ $E(x, y)=D(F(x), F(y))$. Следовательно, предикаты E и D изоморфны. Теорема доказана.

Теорема 5 дает ответ на вопрос, в каких случаях при восприятии предметов человек получает о них всю информацию, а в каких - не всю. Информация не теряется в тех случаях, когда органы чувств человека каждому предмету ставят в соответствие свой субъективный образ (неважно какой). Если же образов меньше, чем воспринимаемых предметов, то часть информации о предметах теряется. Глаз человека при восприятии световых излучений теряет часть информации о них. Это доказывается тем, что существуют такие различные световые излучения, которые воспринимаются глазом в виде одного и того же цвета. Например, существует такая смесь красного и зеленого монохроматических излучений, которая неотличима по цвету от желтого монохроматического излучения.

Переходим к изучению изоморфизма характеристических функций эквивалентностей. Любую функцию $y=F(x)$, отображающую множество A в множество B, можно задать, указывая соответствующий ей предикат $F(x, y)$, определенный на $A\times B$. Для этого при любых $x\in A$, $y\in B$ полагаем $F(x, y)=1$, если $F(x)=y$, и $F(x, y)=0$, если $F(x)\neq y$. Пусть $F: A\to B$ и $F: A'\to B'$ - функции, а F и F' на $A\times B$ и $A'\times B'$ - соответствующие им предикаты. Будем говорить, что функция F (φ, ψ)-*изоморфна* функции F', если предикат F (φ, ψ)-изоморфен предикату F'. Если биекции φ и ψ существуют, то будем говорить, что функции F и F' *слабо изоморфны*. Если, кроме того, $\varphi=\psi$, то будем говорить, что они *сильно изоморфны*.

Пусть имеется преобразователь сигналов, реализующий функцию $y=F(x)$, которая отображает множество A на множество B. Переименовывая его входные и выходные сигналы x и y с помощью биекций φ: $A\to B$ и ψ: $A\to B$, получаем $x'=\varphi(x)$, $y'=\psi(y)$. В результате тот же преобразователь сигналов опишется уже другой функцией $y'=F'(x')$, отображающей множество A' на множество B'. Обозначая через φ^{-1} функцию, обратную биекции φ, выражаем функцию F' через функцию F:

$$F'(x')=\psi(F(\varphi^{-1}(x'))\ . \tag{3}$$

Аналогично выражается функция F через функцию F':

$$F(x)=\psi^{-1}(F'(\varphi(x))\ , \tag{4}$$

где ψ^{-1} - функция, обратная биекции ψ.

Пусть E и E' - эквивалентности на $A\times A$ и $A'\times A'$; D и D' - предикаты равенства на $B\times B$ и $B'\times B'$.

Теорема 6. *Если предикат E φ-изоморфен предикату E', то существует такая биекция ψ: $A\to B$, что функция F (φ, ψ)-изоморфна функции F', а предикат D ψ-изоморфен предикату D'.*

Доказательство. Поскольку предикаты E и E' φ-изоморфны, то существует биекция φ:$A\to A'$ такая, что для любых x, $y\in A$ $E(x, y)=E'(\varphi(x), \varphi(y))$. Рассмотрим отношение ψ, заданное на $B\times B'$ и образованное всеми парами вида $(F(x), F'(\varphi(x)))$, где $x\in A$. Пусть x, $y\in A$ таковы, что $F(x)=F(y)$. Тогда $E(x, y)=1$, $E'(\varphi(x), \varphi(y))=1$, $F'(\varphi(x))=F'(\varphi(y))$. Таким образом, отношение ψ удовлетворяет условию однозначности. Область значений функции $F(x)$ совпадает с множеством B, поэтому отношение ψ всюду определено слева. Следовательно, отношение ψ есть функция. Область значений функции $F'(\varphi(x))$ совпадает с множеством B', поэтому функция ψ сюръективна. Пусть x, $y\in A$ таковы, что $F'(\varphi(x))=F'(\varphi(y))$, тогда $E'(\varphi(x), \varphi(y))=1$, $E(x, y)=1$, $F(x)=F(y)$. Следовательно, функция ψ инъективна. Итак, отношение ψ есть биекция, отображающая B на B'. Из определения отношения ψ непосредственно следует, что для всех $x\in A$ $F'(\varphi(x))=\psi(F(x))$. Согласно (4) это означает, что функции F и F' (φ, ψ)-изоморфны. Доказываем изоморфность предикатов D и D'. В силу биективности ψ, для любых $u,v\in B$ из $D(u, v)=1$ следует $u=v$, $\psi(u)=\psi(v)$, $D'(\psi(u), \psi(v))=1$; из $D(u, v)=0$ следует $u\neq v$, $\psi(u)\neq\psi(v)$, $D'(\psi(u), \psi(v))=0$. Итак, для любых u, $v\in B$ $D(u, v)=D'(\psi(u), \psi(v))$, а это означает, что предикаты D и D' ψ-изоморфны. Теорема доказана.

Теорема 7. *Если функция F (φ, ψ)-изоморфна функции F', то предикат E φ-изоморфен предикату E', а предикат D ψ-изоморфен предикату D'.*

Доказательство. Предположим, что функция F (φ, ψ) - изоморфна функции F'. Тогда, согласно (4), $F'(x)=\psi^{-1}(F'(\varphi(x)))$ для любого $x \in A$. Пусть $x, y \in A$ таковы, что $E(x, y)=1$. Тогда $D(F(x), F(y))=1$, $F(x)=F(y)$, $\psi^{-1}(F'(\varphi(x)))=\psi^{-1}(F'(\varphi(y)))$, $F'(\varphi(x))=F'(\varphi(y))$, $D'(F'(\varphi(x)), F'(\varphi(y)))=1$, $E'(\varphi(x), \varphi(y))=1$. Если же $x, y \in A$ таковы, что $E(x, y)=0$, то $D(F(x), F(y))=0$, $F(x) \neq F(y)$, $\psi^{-1}(F'(\varphi(x))) \neq \psi^{-1}(F'(\varphi(y)))$, $F'(\varphi(x)) \neq F'(\varphi(y))$, $D'(F'(\varphi(x)), F'(\varphi(y)))=0$, $E'(\varphi(x), \varphi(y))=0$. Итак, при любых $x, y \in A$ $E(x, y)=E'(\varphi(x), \varphi(y))$. Мы доказали, что предикат E φ-изоморфен предикату E'. Пусть $u, v \in B$ таковы, что $D(u, v)=1$. Тогда $u=v$, $\psi(u)=\psi(v)$, $D'(\psi(u), \psi(v))=1$. Если же $u, v \in B$ таковы, что $D(u, v)=0$. Тогда $u \neq v$, $\psi(u) \neq \psi(v)$, $D'(\psi(u), \psi(v))=0$. Итак, при любых $u, v \in B$ $D(u, v)=D'(\psi(u), \psi(v))$. Мы доказали, что предикат D ψ-изоморфен предикату D'. Теорема доказана.

Из теорем 6 и 7 непосредственно следует

Теорема 8. *Для того чтобы эквивалентность E была φ-изоморфна эквивалентности E', необходимо и достаточно, чтобы функция F была (φ, ψ)-изоморфна функции F'.*

Содержательно теоремы 6-8 означают, что поведение $E(x, y)=D(F(x), F(y))$ идентифицируемой системы E полностью (т.е. с точностью до обозначений) определяется действием идентифицируемого объекта F, и наоборот. Кроме того, действие нуль-органа $D(u, v)$ полностью определяется как поведением системы E, так и действием объекта F. Все сказанное свидетельствует о том, что компараторный метод является эффективным средством идентификации объекта F, внутреннего состояния $u=F(x)$ системы E и нуль-органа $D(u, v)$. Например, при изучении механизма цветового зрения человека иссследователь объективно наблюдает двоичные ответы испытуемого, сравнивающего цвета световых излучений, и только из этих ответов получает исчерпывающие описания: 1) субъективного цвета; 2) преобразования физических световых излучений в психологические цвета; 3) способа субъективного анализа цветов. Верно и обратное утверждение: если исследователь уже нашел вид преобразования $u=F(x)$ светового излучения x в цвет u, то он может заранее вычислить ответ $t=E(x, y)$ испытуемого, сравнивающего цвета произвольных световых излучений x и y.

Имеется некоторое неравноправие между внешним поведением E испытуемого и соответствующим ему внутренним информационным процессом F, поскольку сильной изоморфности предикатов E и E' соответствует слабая изоморфность функций F и F'. Следующее утверждение устанавливает условие, при котором предикат E и функция F становятся в этом смысле равноправными.

Теорема 9. *Для того чтобы φ-изоморфность любых эквивалентностей E и E' на $A \times A$ и $A' \times A'$ была равносильна φ-изоморфности их* *характеристических функций* F: $A \to B$, F: $A' \to B'$, ***необходимо и достаточно, чтобы множества** A **и** B, A' **и** B' **не пересекались.***

Доказательство. *Необходимость.* Для доказательства достаточно привести пример множеств A, B и B', таких что $A \cap B = \varnothing$, а также φ-изоморфных эквивалентностей E и E', заданных на $A \times A$, характеристические функции которых не являются φ-изоморфными. Положим $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{a_1, a_2\}$, $B'=\{a_1, a_3\}$. Эквивалентность $E=E'$ определим разбиением множества M: $\{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}\}$. Функцию F: $A \to B$ определим следующим образом: $F(a_1)=F(a_2)=a_1$, $F(a_3)=a_2$. Функцию F: $A' \to B'$ определим так: $F'(a_1)=F'(a_2)=a_1$, $F'(a_3)=a_2$. Очевидно, E и E', будучи равными, сильно изоморфны. Тем не менее, сильного изоморфизма для функций F и F' не существует, так как в противном случае такой изоморфизм должен отображать множество $\{a_1, a_2\}$ на себя и в то же время множество B на B', что невозможно. *Достаточность* непосредственно следует из теорем 2 и 6. Теорема доказана.

Теорема 9 содержит в себе рекомендацию инженеру, создающему искусственные анализаторы предметов для технических систем. Если требуется, чтобы предметы и их образы можно было измерять в одной и той же системе физических единиц и при этом всегда получать действие системы в виде предиката эквивалентности, то нужно обеспечить, чтобы множество всех анализируемых предметов и множество их образов не пересекались. Например, при создании системы искусственного цветового зрения нужно сделать так, чтобы цвета, как физические объекты, были представлены не световыми излучениями, а какими-то физическими процессами, например, магнитными полями.

Поступила в редколлегию 05.10.98