

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ПРОЦЕСІВ САМОЗАЙМАННЯ МЕТОДАМИ РОТЕ ТА КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА ПОБУДОВИ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Калініченко А.С.

e-mail: anatolii.kalinichenko@nure.ua

Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра прикладної математики
м. Харків, Україна

This work is focused on solving the initial-boundary value problem for the 3D semilinear equation of thermal conductivity by using Rothe's method in combination with the method of two-sided approximations based on the Green-Rvachev function.

Дослідження процесів самозаймання у скупченні сипучого матеріалу (зерно, вугілля, бавовна), форма якого описується просторовою областю Ω , методами математичного моделювання приводить до необхідності знаходження розв'язку початково-крайової задачі для тривимірного напівлінійного рівняння теплопровідності для функції зміни температури

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = A\Delta\theta + Be^{\theta}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, t_0], \quad (1)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, t_0], \quad (2)$$

$$\theta(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (3)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad t \in [0, t_0], \quad (4)$$

де Δ – оператор Лапласа, $A > 0$, $B > 0$ – параметри, що задають фізико-хімічні властивості процесу, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, Ω – обмежена область з $\mathbb{R}^3$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, t_0 – час моделювання.

Останній доданок в правій частині рівняння враховує тепло, що виділяється при хімічній екзотермічній реакції окиснення матеріалу, та отриманий апроксимацією з закону Арреніуса [2] у припущенні про сталість параметрів A і B .

На часовому відрізку $[0, t_0]$ введемо сітку з кроком τ :

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad m\tau = t_0,$$

та позначимо $\Theta_j = \Theta_j(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}, t_j)$. Розв'язок задачі (1) – (4), відповідно до методу Роте, шукатимемо вздовж прямих $t = \text{const}$. Для цього на кожній прямій $t = t_j$ апроксимуємо відношенням скінченних різниць диференціальний оператор в лівій частині рівняння (1), що в сукупності з (3) та (4) дозволяє звести знаходження розв'язку початково-крайової задачі (1) – (4) до розв'язання послідовності крайових задач:

$$\Theta_0(\mathbf{x}) = 0,$$

$$-\Delta \Theta_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{A\tau} \Theta_j(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \Theta_j(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5)$$

$$\Theta_j(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6)$$

$$\Theta_j(\mathbf{x}) = 0 \text{ на } \partial\Omega, j=1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

де $F(\mathbf{x}, \Theta_j(\mathbf{x})) = \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1} + \frac{B}{A} e^{\Theta_j}$. Для знаходження наближеного розв'язку кожної з них застосуємо метод двобічних наближень з використанням квазіфункції Гріна-Рвачова [1], який дозволяє побудувати ітераційний процес для більшого класу областей, ніж при використанні звичайної функції Гріна.

Нехай $\omega(\mathbf{x})$ – елементарна функція, що описує геометрію області Ω ($\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω , $\omega(\mathbf{x}) = 0$ і $|\nabla \omega(\mathbf{x})| \neq 0$ на $\partial\Omega$), що побудована методом R -функцій. Тоді квазіфункція Гріна-Рвачова для оператора Гельмгольца $-\Delta + \frac{1}{A\tau}$ з правої частини рівняння (5) визначатиметься формулою

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})} e^{-\frac{1}{\sqrt{A\tau}}r} - r e^{-\frac{1}{\sqrt{A\tau}}\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}}{r\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}},$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2}$.

Надалі вважатимемо j фіксованим. Оскільки при знаходженні функції Θ_j уже відома функція Θ_{j-1} , то крайова задача (5) – (7) у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ неперервних у $\bar{\Omega}$ функцій з конусом невід'ємних функцій $\mathcal{K}_+ = \{\theta \in C(\bar{\Omega}) : \theta(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$ еквівалентна інтегральному рівнянню Урисона $\Theta_j(\mathbf{x}) = T(\Theta_j)(\mathbf{x})$ з гетеротонним оператором

$$\begin{aligned} T(\Theta_j)(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} P(\mathbf{x}, \mathbf{s}, F(\mathbf{s}, \Theta_j(\mathbf{s}))) d\mathbf{s} = \\ &= \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \Theta_j(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \Theta_j(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) F(\mathbf{s}, \Theta_j(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) &= \max\{0, K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \\ K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) &= \max\{0, -K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \\ K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) &= \frac{1}{4\pi} \left(-\Delta_s + \frac{1}{A\tau} \right) \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}} e^{-\frac{1}{\sqrt{A\tau}}\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}. \end{aligned}$$

На j -му часовому шарі сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді $< 0, \beta_j >$, де число $\beta_j > 0$ визначається з нерівностей

$$\begin{aligned} -\beta \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} + \frac{B}{A} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} &\geq 0 \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \\ \beta \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} + \frac{1}{A\tau} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \frac{B}{A} e^{\beta} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} &\leq \beta \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Отже, ітераційний процес методу двобічних наближень матиме вигляд

$$\begin{aligned} v^{(k)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k-1)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k-1)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ &+ \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) F(\mathbf{s}, v^{(k-1)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k=1, 2, \dots, \\ w^{(k)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k-1)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k-1)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ &+ \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) F(\mathbf{s}, w^{(k-1)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k=1, 2, \dots, \\ v^{(0)}(\mathbf{x}) &= 0, \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_j. \end{aligned}$$

За наближений розв'язок вихідної задачі (1) – (4) на j -му часовому шарі на k -й ітерації з точністю $\varepsilon > 0$ приймаємо функцію

$$\Theta_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}$$

при виконанні умови

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon.$$

Застосовуючи до крайових задач (5) – (7) на кожному часовому шарі запропонований ітераційний процес методу двобічних наближень, отримаємо набір функцій $\Theta_0(\mathbf{x}) = 0$, $\Theta_1^{(k_1)}(\mathbf{x})$, $\Theta_2^{(k_2)}(\mathbf{x})$, ..., $\Theta_m^{(k_m)}(\mathbf{x})$, який можна використати як каркас для побудови наближеного розв'язку, неперервного за часовою змінною.

Обчислювальний експеримент було проведено для сферичної області $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ з радіусом 1, описаної функцією $\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$, при значеннях параметрів $A=1$, $B=1,25$, $t_0=1$, $\tau = \frac{1}{3}$.

Список використаних джерел:

1. Сидоров М. В. Застосування методу квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних наближень до розв'язку задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2018. № 18. С. 146–161.
2. Франк-Каменецкий Д. А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Долгопрудный : Издательский Дом «Интеллект», 2008. 408 с.