УДК 519.81

Н.С. ШИЛО

АНАЛИЗ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ МАКСИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ ПРАВИЛЬНОСТИ ВЫБОРА ПРЕДПОЧТЕНИЙ ЛПР

Постановка проблемы и задачи исследования.

В работе [1] предложен метод параметрической идентификации модели выбора альтернативы, т.е. определения предпочтений лица, принимающего решения (ЛПР). В качестве модели выбора принята традиционная аддитивная функция полезности, метод идентификации ее параметров основан на идеях компараторной идентификации. Особенностью синтезированной модели идентификации является то, что она определяет множество возможных значений (полиэдр) и поэтому является некорректной по Адамару [2]. В связи с этим возникает необходимость регуляризации исходной задачи, т.е. определения критерия выбора единственного точечного решения из допустимой области. В работах [1, 3] предложено использовать в качестве критериев выбора точечного решения Чебышевскую точку, модель максимизации силы предпочтений ЛПР, модель максимизации функции правильности выбора предпочтений (ММФПВП). Однако, необходима оценка адекватности предложенных критериев. В статье [4] предложена методика оценки адекватности результатов точечной идентификации предпочтений ЛПР по различным критериям. Целью данной статьи является проведение вычислительного эксперимента с целью получения объективной оценки как ММФПВП, так и других критериев точечной идентификации.

Анализ проблемы.

Построение ММФПВП основано на анализе исходных данных, предложенных ЛПР для оценки и выбора. Пусть ЛПР оценивает набора альтернатив $X = \{x_i\}, i = \overline{1, n}$, причем каждая альтернатива описывается набором частных характеристик $K = \{k_j\}, j = \overline{1, m}$, допускающим объективное количественное измерение. Для обеспечения сравнимости альтернатив, значения разнородных частных характеристик $K = \{k_j\}, j = \overline{1, m}$ нормализованы, т.е. определены их функции полезности вида [1]:

$$p_j[k_j(x)] = \left(\frac{k_j(x) - k_{jнх}}{k_{jнл} - k_{jнх}} \right)^{\alpha_j}, \tag{1}$$

где $k_j(x)$ – фактическое абсолютное значение частного критерия альтернативы x;

$k_{jнл}; k_{jнх}$ – наилучшее и наихудшее значение частного критерия на всем множестве альтернатив, на котором производится выбор;

α_j – коэффициент нелинейности, определяющий вид зависимости функции полезности частных характеристик от значения критерия. Для простоты рассматриваем линейную зависимость $\alpha_j = 1$.

В результате, множество альтернатив X, характеризуется матрицей

$$\Theta = \left\| \begin{matrix} p_1[k_1(x_1)] & p_2[k_2(x_1)] & \dots & p_m[k_m(x_1)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1[k_1(x_n)] & p_2[k_2(x_n)] & \dots & p_m[k_m(x_n)] \end{matrix} \right\|. \tag{2}$$

В соответствии с теорией полезности и правилом рационального поведения, выбор ЛПР некой альтернативы $x_s \in X$, из набора альтернатив $X = \{x_i\}, i = \overline{1,n}$ означает, что ее полезность для него максимальна. Можно предположить, что выбор ЛПР, помимо субъективных мотивов и предпочтений, связан с объективным анализом значений характеристик $K = \{k_j\}, j = \overline{1,m}$ набора альтернатив $X = \{x_i\}, i = \overline{1,n}$, предложенного ему для оценки. Пусть выбранная альтернатива $x_s \in X$, по некоторым, наиболее предпочтительным для ЛПР, характеристикам, имеет значительный "выигрыш" в значениях, по сравнению с остальными альтернативами. Из этого предположения вытекает гипотеза, на основе которой и строится предлагаемый метод идентификации предпочтений: для выбранной ЛПР альтернативы $x_s \in X$, характеристики со значительными "выигрышами" в значениях должны иметь более высокие значения весовых коэффициентов [2]. Объективно оценить выигрыш в значениях альтернатив относительно друг друга можно с помощью таблицы нормализованных значений частных характеристик (1). В результате, можно сформировать представление о сильных и слабых сторонах каждой альтернативы (характеристиках, имеющих большой выигрыш в значениях для заданной альтернативы, и характеристиках, имеющих малый выигрыш в значениях).

Формирование функции правильности выбора предпочтений $\omega(a_j)$ позволяет оценить, насколько точно подобран весовой коэффициент $a_j \in A, j = \overline{1,m}$ для характеристики $k_j \in K, j = \overline{1,m}$ при условии, что ЛПР выбрал альтернативу $x_s \in X$ из набора альтернатив. Функция $\omega(a_j)$ изменяется в интервале $[0,1]$, причем значение $\omega(a_j) = 0$, означает, что весовой коэффициент $a_j \in A, j = \overline{1,m}$ выбран абсолютно неправильно, а $\omega(a_j) = 1$ – абсолютно правильно. Если разделить для каждой альтернативы все характеристики на две группы: характеристики, для которых значения имеют значительный выигрыш ($p_j[k_j(x_s)] \geq 0.5, j = \overline{1,v}$, где v -число характеристик в первой группе) и характеристики, для которых значения имеют незначительный выигрыш ($p_j[k_j(x_s)] < 0.5, j = \overline{v+1,m}$, где m-общее число характеристик), то правило выбора весовых коэффициентов:

$$\omega(a_j) = \begin{cases} a_j, & p_j[k_j(x_s)) \geq 0.5 \\ 1 - a_j, & p_j[k_j(x_s)] < 0.5 \end{cases} \tag{3}$$

Таким образом, модель максимизации функции правильности выбора предпочтений (матрицы весовых коэффициентов $A = \{a_j\}, j = \overline{1,m}$) имеет вид:

$$A^* = \arg\max_{A \in \Omega_a} \sum_{j=1}^{m} \omega(a_j),$$

$$\omega(a_j) = \begin{cases} a_j, & p_j[k_j(x_s)) \geq 0.5 \\ 1 - a_j, & p_j[k_j(x_s)] < 0.5 \end{cases}.$$

при условиях
$$\eta_c(A) \equiv \sum_{j=1}^{m} b_{cj} \cdot a_j < 0 \quad c = \overline{1,w}; \tag{4}$$

$$\eta_c(A) \equiv \sum_{j=1}^{m} b_{cj} \cdot a_j \leq 0 \quad c = \overline{w+1, w+o};$$

$$\eta_c(A) \equiv \sum_{j=1}^{m} b_{cj} \cdot a_j = 0 \quad c = \overline{w+o+1, w+o+z};$$

$$\eta_{c+I}(A) \equiv a_j + a_\rho - 1 \le 0, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad \rho = \overline{j+1, m};$$

$$-1 \le b_{cj} \le 1, \quad c = \overline{1, w+o+z}, \quad j = \overline{1, m};$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = 1; \; a_j \ge 0, \quad j = \overline{1, m},$$

где $p_j[k_j(x_v)] - p_j[k_j(x_s)] = b_{cj}, \quad x_v, x_s \in X, \quad j = \overline{1,m}, \quad c = \overline{1, w+o+z};$

w – количество строгих неравенств в модели;

o – количество нестрогих неравенств в модели;

z – количество уравнений в модели;

I – количество дополнительных неравенств в модели.

Для проверки адекватности и точности ММФПВП используем методику оценки адекватности результатов точечной идентификации предпочтений ЛПР по различным критериям [3]. Основная идея данной методики состоит в следующем: если нет возможности точно идентифицировать реальные предпочтения ЛПР, то можно задать эти предпочтения и рассматривать их как эталон. Тогда, появляется возможность оценить результаты идентификации по различным критериям относительно этого эталона и, следовательно, определить наиболее точные и адекватные критерии точечной идентификации.

Для наглядности анализа оценим адекватность и точность Чебышевской точки (ЧТ), модели максимизации силы предпочтений ЛПР (ММСП), а также средней точки $A^{cp} = \{a_j^{cp}\}, \; j = \overline{1, m}$, которую также можно использовать в качестве критерия точечной идентификации предпочтений ЛПР. Нахождение средней точки (СТ) предполагает выполнение следующих шагов:

1. Решаем задачу нахождения интервальных оценок матрицы весовых коэффициентов $A = \{a_j\}, \; j = \overline{1, m}$, удовлетворяющих области допустимых значений $\Omega_д$ [1].

Для решения задачи необходимо по каждой j-й переменной матрицы весовых коэффициентов $A = \{a_j\}, \; j = \overline{1, m}$, последовательно решить 2n оптимизационных задач вида:

$$a_j \to \max_{A^* \in \Omega_д} \quad \forall \; j = \overline{1, m};$$

$$a_j \to \min_{A^* \in \Omega_д} \quad \forall \; j = \overline{1, m};$$

при условиях

$$\eta_c(A) \equiv \sum_{j=1}^{m} b_{cj} \cdot a_j < 0 \quad c = \overline{1, w}; \tag{5}$$

$$\eta_c(A) \equiv \sum_{j=1}^{m} b_{cj} \cdot a_j \le 0 \quad c = \overline{w+1, w+o};$$

$$\eta_c(A) \equiv \sum_{j=1}^{m} b_{cj} \cdot a_j = 0 \quad c = \overline{w+o+1, w+o+z};$$

$$\eta_{c+I}(A) \equiv a_j + a_\rho - 1 \le 0, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad \rho = \overline{j+1, m};$$

$$-1 \le b_{cj} \le 1, \quad c = \overline{1, w+o+z}, \quad j = \overline{1, m};$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = 1;\ a_j \geq 0, \quad j = \overline{1,m},$$

где $\quad p_j[k_j(x_v)] - p_j[k_j(x_s)] = b_{cj}, \quad x_v, x_s \in X, \quad j = \overline{1,m}, \quad c = \overline{1, w+o+z};$

w – количество строгих неравенств в модели;

o – количество нестрогих неравенств в модели;

z – количество уравнений в модели; l – количество дополнительных неравенств в модели.

2. Находим среднее арифметическое каждой j-й переменной

$$a_{cpj} = \frac{a_j^{\max} - a_j^{\min}}{2}. \tag{6}$$

3. Для того, чтобы выполнялось условие $\sum_{j=1}^{m} a_j = 1$, нормируем каждую j-ю переменную

$$a_{cpj}^{н} = \frac{a_{cpj}}{\sum_{j=1}^{m} a_{cpj}}. \tag{7}$$

Средняя точка $A^* = \{a_{cpj}^{н}\},\ j = \overline{1,m}$ является простейшим решением задачи идентификации предпочтений ЛПР, поскольку не требует введения дополнительной целевой функции, оптимизация которой позволит определить численное значение матрицы A.

Анализ адекватности критериев на примере.

Сравнение адекватности и точности результатов идентификации по различным критериям точечной идентификации будем проводить на примере выбора ЛПР модели бензиновой газонокосилки (Таблица 1). Данный пример является в некоторой степени утрированным, поскольку как число, так и сами характеристики могут быть отличными от приведенных. Однако, следует отметить, что качественные характеристики не рассматриваются, поскольку задача идентификации строится исходя из гипотезы, что все характеристики допускают количественную оценку. Также отметим, что приведенный набор характеристик был использован экспертами журнала для сравнительного анализа достоинств и недостатков различных моделей газонокосилок. Число альтернатив было выбрано небольшим для упрощения анализа и наглядности примера.

Таблица 1

Альтернативы		Характеристики*						
		Мощн. двигат. л.с., k_1	Ширина кошения см., k_2	Максим. высота среза мм, k_4	Число ступ. регулир. высоты среза, k_5	Объем травосбор. л., k_6	Масса кг, k_7	Цена у.е., k_8
40B	x_1	3	40	65	3	65	20	300
LR43PB	x_2	3.75	43	75	4	50	23	350
47B	x_3	3.7	47	75	4	65	26	485
4241ZB	x_4	6.5	57	85	7	80	46	510

* Данные примера взяты из журнала "Идеи вашего дома", №7, 2001.

Результаты нормализации представлены в таблице 2.

Таблица 2

Альтернативы		Характеристики						
		Мощн. двигат. л.с., k_1	Ширина кошения см, k_2	Максим. высота среза мм, k_4	Число ступ. регулир. высоты среза, k_5	Объем травосбор. л., k_6	Масса кг, k_7	Цена у.е., k_8
40B	x_1	0	0	0	0	0.5	1	1
LR43PB	x_2	0.214	0.176	0.5	0.25	0	0.885	0.762
47B	x_3	0.2	0.412	0.5	0.25	0.5	0.769	0.119
4241ZB	x_4	1	1	1	1	1	0	0

В качестве критериев адекватности и точности весовых коэффициентов использованы следующие показатели [3]

$$\sum_{j=1}^{m}\left|a_j^{эт}-a_j\right|, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(a_j^{эт}-a_j\right)^2, \tag{9}$$

где $a_j^{эт}$ – эталонное значение весового коэффициента частной характеристики $k_j \in K,\ j=\overline{1,m}$,

a_j – модельное значение весового коэффициента частной характеристики $k_j \in K,\ j=\overline{1,m}$, полученное с помощью одного из критериев точечной идентификации.

Эталонные весовые коэффициенты вычислены следующим образом:

$$a_j^{эт}=\frac{bal_j}{\sum_{j=1}^{m} bal_j}, \tag{10}$$

где bal_j – балльная оценка частной характеристики $k_j \in K,\ j=\overline{1,m}$.

Адекватность и точность полезностей альтернатив оценивается с помощью следующих показателей

$$\sum_{i=1}^{n}\left|P^{эт}(x_i)-P(x_i)\right|, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(P^{эт}(x_i)-P(x_i)\right)^2, \tag{12}$$

где $P^{эт}(x_s)$ – эталонное значение полезности альтернативы x_i;

$P(x_i)$ – модельное значение полезности альтернативы x_i.

Эталонные полезности определяются следующим образом:

$$P^{эт}(x_i)=\sum_{j=1}^{m} a_j^{эт} p_j[k_j(x_i)], \tag{13}$$

где $a_j^{эт}$ – эталонное значение весового коэффициента частной характеристики $k_j \in K$, $j = \overline{1,m}$;

$p_j[k_j(x_i)]$ – значение функции полезности частной характеристики $k_j \in K$, $j = \overline{1,m}$ для альтернативы $x_i \in X$, $i = \overline{1,n}$.

Тогда, наиболее адекватной, точной и эффективной можно считать идентификацию с помощью такого критерия, результаты которой позволяют получить

– наименьшие значения показателей адекватности весовых коэффициентов (8) и (9);

– совпадение с выбором потребителя наиболее полезной альтернативы, или совпадение с установленным потребителем отношением предпочтения;

– наименьшие значения показателей адекватности полезностей альтернатив (11) и (12).

В ходе эксперимента исследователем были случайным образом подобраны балльные оценки, а затем вычислены эталонные весовые коэффициенты, причем так, чтобы каждая $x_i \in X$, $i = \overline{1,n}$ получила максимальную полезность, т.е. "была выбрана ЛПР". Набор эталонных весовых коэффициентов представлен в таблице 3.

Таблица 3

Выбранная альтернатива	Эталонные весовые коэффициенты характеристик						
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
x_1	0.031	0.063	0.031	0	0.25	0.313	0.313
x_2	0.171	0.086	0.086	0.114	0.057	0.257	0.229
x_3	0	0.02	0.235	0	0.314	0.392	0.039
x_4	0.278	0.139	0.111	0.278	0.167	0	0.028

Используя эталонные весовые коэффициенты были вычислены эталонные полезности альтернатив и, в соответствии с полученными значениями полезностей, на заданном наборе альтернатив X были установлены отношения предпочтения (табл. 4).

Таблица 4

Эталонные полезности альтернатив				Альтернатива, имеющая максимальную эталонную полезность	Установленное отношение предпочтения
$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	$P(x_4)$		
0.75	0.548	0.45	0.375	x_1	$P(x_1) > P(x_2) > P(x_3) > P(x_4)$
0.514	**0.525**	0.395	0.514	x_2	$P(x_2) > P(x_1) = P(x_4) > P(x_3)$
0.588	0.498	**0.589**	0.569	x_3	$P(x_3) > P(x_1) > P(x_4) > P(x_2)$
0.139	0.239	0.336	**0.944**	x_4	$P(x_4) > P(x_3) > P(x_2) > P(x_1)$

Анализ результатов показывает, что при выборе ЛПР альтернативы x_1, критерий точечной идентификации, наиболее адекватно идентифицирующий весовые коэффициенты – ММФПВП, поскольку он имеет минимальные значения показателей адекватности (8) и (9), а наиболее точно идентифицирует полезности альтернатив ЧТ, так как получила минимальные значения (11) и (12). Кроме того, анализ полученных полезностей показывает, что эти критерии позволили в обоих случаях однозначно выявить наиболее предпочтительную альтернативу.

При выборе ЛПР альтернативы x_2 наименьшие значения показателей адекватности (8)-(9) и (11)-(12) получает СТ. Но СТ не позволяют правильно выявить наиболее предпочтительную альтернативу: x_4 вместо x_2. Это означает, что результаты идентификации по СТ нельзя использовать, поскольку не выполняется гипотеза о том, что ЛПР выбрал альтернативу x_2. ММФПВП и ЧТ однозначно и правильно идентифицируют выбранную альтернативу x_2, однако эти критерии не достигают наименьших значений показателей адекватности.

Для выбранной ЛПР альтернативы x_3 наименьшие значения показателей адекватности (8)-(9) и (11)-(12) получает ММФПВП и при этом он позволяет однозначно выявить выбранную альтернативу.

При выборе ЛПР альтернативы x_4, наиболее адекватным критерием точечной идентификации является ЧТ, поскольку он имеет минимальные значения показателей адекватности (8)-(9) и (11)-(12). Кроме того, анализ полученных полезностей показывает, что как ЧТ, так и все остальные критерии, позволили однозначно выявить наиболее предпочтительную альтернативу.

Анализ результатов идентификации предпочтений ЛПР при выборе им единственной, наиболее предпочтительной альтернативы из набора, с помощью различных критериев точечной идентификации позволяет сделать вывод, что для выбранного примера ЧТ и ММФПВП являются критериями, для которых выполняется гипотеза о выборе ЛПР определенной альтернативы во всех четырех случаях, т.е. они точно определяют выбранную ЛПР альтернативу, даже если ее результаты идентификации не получают наименьших значений показателей адекватности (8)-(9) и (11)-(12). ММФПВП в двух случаях из четырех наиболее точно идентифицирует весовые коэффициенты, а ЧТ – полезности альтернатив (Рис.1). Наименее точным критерием, не позволяющим правильно определить выбранную ЛПР альтернативу в трех случаях из четырех, является СТ.

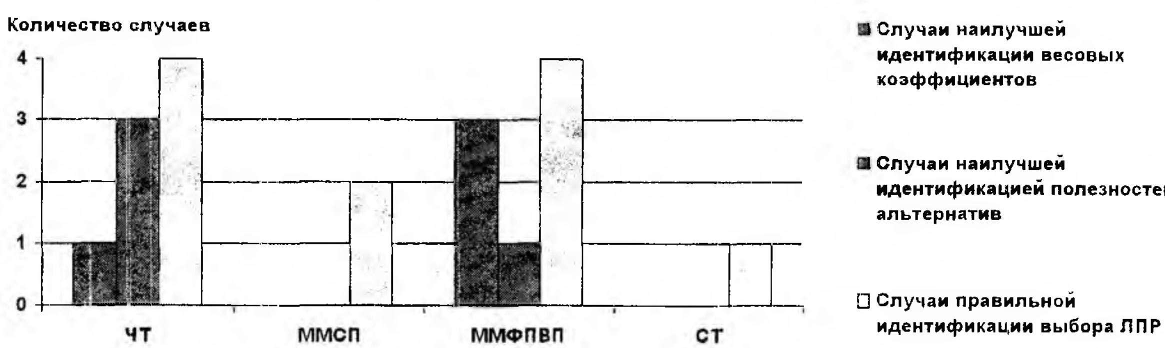

Рис. 1. Характеристики работы критериев точечной идентификации при выборе ЛПР единственной альтернативы из множества заданных альтернатив.

Похожую ситуацию можно наблюдать при установлении отношения предпочтения на множестве альтернатив. Так, для отношения предпочтений $P(x_1) > P(x_2) > P(x_3) > P(x_4)$ наиболее точно и адекватно идентифицируют весовые коэффициенты ЧТ и ММФПВП, поскольку они имеют наименьшие значения показателя адекватности (9), а более точные полезности можно получить с помощью ЧТ. Кроме того, и ЧТ, и ММФПВП позволяют точно восстановить заданное отношение предпочтения.

Для эталонного отношения $P(x_2) > P(x_1) = P(x_4) > P(x_3)$ наименьшие значения показателей адекватности (8) и (9) получает СТ, а (11) – (12) – ЧТ. Однако СТ не восстанавливает эталонное отношение предпочтения – получаем $P(x_4) > P(x_2) > P(x_3) > P(x_1)$, поэтому результаты идентификации по СТ нельзя использовать: не выполняется гипотеза о том, что ЛПР установил заданное отношение предпочтения. Эталонное отношение предпочтения успешно восстанавливают ММФПВП и ЧТ.

Наименьшие значения показателей адекватности (8)-(9) и (11)-(12) для эталонного отношения $P(x_3) > P(x_1) > P(x_4) > P(x_2)$ получил ММФПВП, и при этом ему удалось точно восстановить эталонное отношение.

При задании ЛПР эталонного отношения предпочтения $P(x_4) > P(x_3) > P(x_2) > P(x_1)$ наиболее точные весовые коэффициенты получаются при идентификации по методу СТ, а полезности альтернатив – с помощью ЧТ. Отношение предпочтений $P(x_4) > P(x_3) > P(x_2) > P(x_1)$ удалось точно восстановить всем методам.

Рассматривая результаты идентификации предпочтений ЛПР в случае установления им отношения предпочтения на множестве альтернатив, можно сделать вывод, что в примере ЧТ и ММФПВП удается наиболее точно восстановить эталонные отношения предпочтений, а ММСП и СТ – хуже всего (рис. 2).

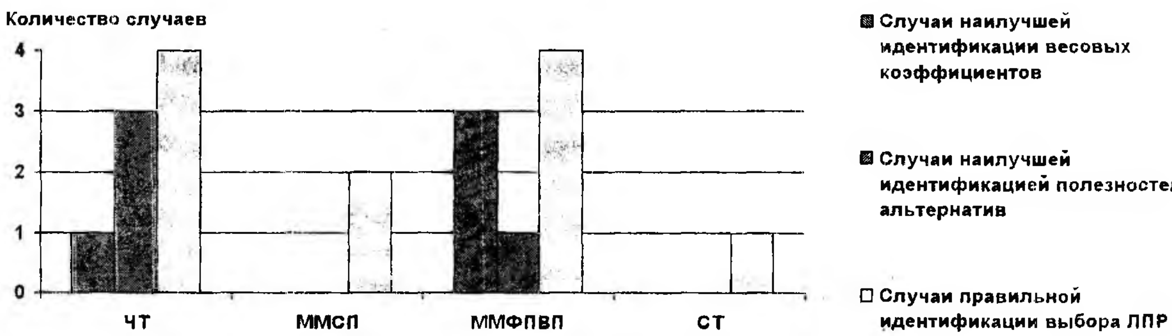

Рис. 2. Характеристики работы критериев точечной идентификации при установлении отношения предпочтения на множестве заданных альтернатив.

Выводы. Представленный анализ адекватности и точности различных критериев точечной идентификации с помощью методики оценки адекватности результатов точечной идентификации предпочтений ЛПР предполагает признание ММФПВП критерием, если и не всегда достигающим наименьших значений показателей адекватности, но позволяющим как точно выявить выбранную ЛПР альтернативу, так и всегда точно восстановить установленное отношение предпочтения.

Как видно из результатов идентификации предпочтений ЛПР с помощью ММФПВП, для каждой из альтернатив, характеристики, получающие по результатам идентификации не нулевые весовые коэффициенты, имеют значительный выигрыш в значениях. Кроме того, характеристики, имевшие более высокие выигрыши, получают более высокие весовые коэффициенты. Проанализировав адекватность и точность ММФПВП можно сделать вывод, что данная модель не только позволяет оценить структуру предпочтений ЛПР, но и, в ряде случаев, наилучшим образом идентифицировать предпочтения и полезности альтернатив. Следовательно, ММФПВП можно применять как альтернативный критерий точечной идентификации для анализа и идентификации предпочтений ЛПР.

Список литературы: 1. *Овезгельдыев А.О., Петров Э.Г., Петров К.Э.* Синтез и идент ификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации.- К.: Наукова думка, 2002, 164 с. 2. *Петров Э.Г. Новоженилова М.В., Гребенник И.В., Соколова Н.А.* Методы и средс тва принятия решений в социально-экономических и технических системах.- Херсон: ОЛДІ–плюс, 2003. 380с. 3. *Шило Н.С.* Использование модели максимизации функции правильности выбора предпочтений для идентификации предпочтений ЛПР // Вестник ХГТУ. 2003. № 2. С. 52-57. 4. *Петров Э.Г., Шило Н.С.* Методика оценки адекватности моделей точечной идентификации индивидуальных предпочтений ЛПР // РИ. 2003. №2. С.97-103.

Поступила в редколлегию 10.09.2003