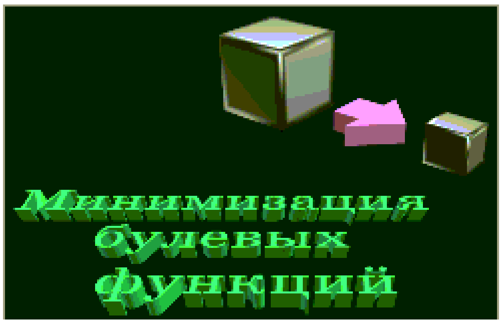

Рис. 6. Текстура для сегмента стен C

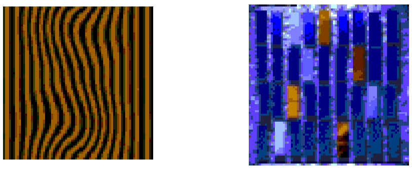
а б

Рис. 7. Текстуры для сегментов стен:
а – А и В; б – D

Заключение

В работе исследована проблема компьютерного моделирования трехмерных пространств в режиме реального времени. На примере идеализированной модели виртуального пространства выявлены основные этапы построения трехмерных пространств. Предложены два алгоритма, позволяющие создавать иллюзию трехмерного пространства, и рассмотрены особенности их программной реализации. Приведен пример изображения, созданного программой, основанной на втором варианте алгоритма трассировки луча. Указанная программа при предъявлении минимальных на сегодняшний день требований к ресурсам вычислительной системы (500Кб оперативной памяти, 2 Мб пространства на жестком диске, i386 микропроцессор) обладает следующими характеристиками: использование стандартных графических видеорежимов адаптера VGA с 256 цветами, что обеспечивает практически 100% переносимость программы; частота смены кадров составляет 30 кадров в секунду; возможность разбиения виртуального пространства, превышающего объем свободной оперативной памяти на несколько частей, загружаемых в заданной последовательности; возможность наполнения виртуального пространства неподвижными объектами произвольной формы; реализация открывающихся дверей и возможность работы с анимированными текстурами; поддержка 256-цветных спрайтов в форматах PCX и LBM.

Литература: 1. *Белоус Н.В., Выродов А.П., Шубин И.Ю.* О некоторых алгоритмах построения виртуальных пространств // Проблемы бионики. 1998. №48. С. 52—59. 2. *Белоус Н.В., Выродов А.П., Шубин И.Ю.* Математические модели построения виртуальных пространств //Проблемы бионики. 1998. №49. С. 203—211. 3. *Ла Мот А., Ратклифф Дж., Семинаторе М., Тайлер Д.* Секреты программирования игр. СПб: Питер, 1995. 616 с.

Поступила в редколлегию 19.09.98

Рецензент: д-р техн. наук Петров Э.Г.

Белоус Наталия Валентиновна, канд. техн. наук, доцент кафедры ПОЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: разработка обучающих программ, гипертекстовых компьютерных учебников, моделирование сложных объектов. Адрес: Украина, 310093, Харьков, ул. Социалистическая, 68-5, кв. 65, тел. 72-76-47.

Шубин Игорь Юрьевич канд. техн. наук, доцент кафедры ПОЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: перспективные информационные технологии, трехмерная компьютерная графика. Адрес: Украина, 310170, Харьков, ул. Акад. Павлова, 134/16, кв. 263, тел. 68-64-89.

Выродов Александр Павлович, студент гр. ПОВТАС 96-1 ХТУРЭ. Научные интересы: трехмерная компьютерная графика. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина, 14.

УДК 519.7

О ДЕЙСТВИЯХ С ЛИНЕЙНЫМИ ЛОГИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

ГВОЗДИНСКАЯ Н.А., ДУДАРЬ З.В., ПОСЛАВСКИЙ С.А., ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО Ю.П.

Рассматривается затронутая в работах [4, 6] тема: линейные логические операторы и соответсвующие им матрицы. Описываются такие действия с линейными логическими операторами как дизъюнкция, произведение и умножение логического скаляра на линейный логический оператор.

Выберем в логическом пространстве L два линейных логических оператора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и произвольный вектор l. Применим последовательно к вектору l сначала оператор $\mathbf{A}$, затем оператор $\mathbf{B}$. В результате получим некоторый вектор

$$d=\mathbf{B}(\mathbf{A}l).$$

Оператор, переводящий вектор l в вектор d, называется произведением $\mathbf{B}$ на $\mathbf{A}$:

$$(\mathbf{BA})l=\mathbf{B}(\mathbf{A}l). \qquad (1)$$

Исходя из этого равенства, можно записать следующее, имея в виду, что α и β – некоторые логические скаляры, а $l, g\in L$:

$$(\mathbf{BA})(\alpha l\vee\beta g)=\mathbf{B}(\mathbf{A}(\alpha l\vee\beta g)).$$

В силу линейности операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют место равенства

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}(\alpha l\vee\beta g))=\mathbf{B}(\alpha(\mathbf{A}l)\vee\beta(\mathbf{A}g))=\mathbf{B}(\alpha\mathbf{A}l)\vee\mathbf{B}(\beta\mathbf{A}g).$$

Иными словами,

$$(\mathbf{BA})(\alpha l\vee\beta g)=\alpha(\mathbf{BA})l\vee\beta(\mathbf{BA})g. \qquad (2)$$

Из равенства (2) следует, что произведение линейных логических операторов также является линейным оператором. Обозначим через C матрицу произведения линейных логических операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Она будет равна произведению матриц A и B, отвечающих операторам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно, т.е.

$$C=BA. \qquad (3)$$

Для доказательства этого утверждения выберем в логическом пространстве L некоторый базис. Произвольному вектору $l\in L$ отвечает координатный столбец $[l]$ в выбранном базисе. Следовательно,

$$[(\mathbf{BA})l]=C[l]. \qquad (4)$$

В то же время

$$[(\mathbf{BA})l]=[\mathbf{B}(\mathbf{A}l)]=B[\mathbf{A}l]=BA[l]. \qquad (5)$$

Сравнивая равенства (4) и (5), получаем утверждение (3).

Например, возьмем вектор булева пространства размерности 4 [1, 3] $l=(0, 1, 1, 0)$, линейные логические операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, которым отвечают логические матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&1&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

соответственно. Тогда логическому оператору ***BA*** будет отвечать матрица

$$BA=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Вектор l с помощью оператора ***BA*** перейдет в вектор

$$[d]=[(\boldsymbol{BA})l]=BA[l]=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь в качестве поля логических скаляров множество одноместных предикатов $P_i(x)$, определенных на множестве $\{0,1\}$, $i=0, \ldots, 3$ [2]. В качестве пространства логических векторов возьмем множество двухместных предикатов $Q_j(x, y)$, $j=0, \ldots, 15$. Пусть оператору ***A*** в некотором базисе соответствует матрица

$$A=\begin{pmatrix}P_1&P_3\\P_2&P_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(0,1)&(1,1)\\(1,0)&(0,1)\end{pmatrix}, \qquad (6)$$

а оператору ***B*** – матрица

$$B=\begin{pmatrix}P_2&P_1\\P_1&P_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,0)&(0,1)\\(0,1)&(0,0)\end{pmatrix}.$$

Тогда оператору ***BA*** будет соответствовать матрица

$$BA=\begin{pmatrix}(1,0)&(0,1)\\(0,1)&(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(0,1)&(1,1)\\(1,0)&(0,1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(0,0)&(1,1)\\(0,1)&(0,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_0&P_3\\P_1&P_1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь обратимый логический оператор ***A*** и обратный по отношению к нему логический оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$ [4]. В случае линейного логического оператора $\boldsymbol{A}$: $L\to L$ логический оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$: $L\to L$ также является линейным. Для доказательства этого утверждения положим

$$\boldsymbol{A}^{-1}x=l,\ \boldsymbol{A}^{-1}y=d,$$

где x и y – некоторые произвольные векторы. В силу того, что логический оператор ***A*** является линейным, можно записать следующее:

$$\boldsymbol{A}(\alpha l\vee\beta d)=\alpha\boldsymbol{A}l\vee\beta\boldsymbol{A}d=\alpha x\vee\beta y,$$

откуда вытекает, что

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\alpha x\vee\beta y)=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}(\alpha l\vee\beta d)=\alpha l\vee\beta d=\alpha\boldsymbol{A}^{-1}x\vee\beta\boldsymbol{A}^{-1}y,$$

т.е. оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$ линейный. Если оператору ***A*** отвечает матрица A, а обратному ему оператору $\boldsymbol{A}^{-1}$ – некоторая логическая матрица B, то из соотношения

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$$

непосредственно вытекает, что

$$AB=BA=E,$$

это означает, что $B=A^{-1}$. Иными словами, матрица, отвечающая логическому оператору, обратному к оператору ***A***, является обратной по отношению к матрице A. В силу того, что обратимыми являются только ортогональные логические матрицы [5], логический оператор будет иметь обратный в том и только в том случае, когда ему соответствует ортогональная матрица.

Пусть линейному логическому оператору ***C*** отвечает ортогональная матрица

$$C=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тогда оператору $\boldsymbol{C}^{-1}$ будет соответствовать матрица

$$C^{\mathrm{T}}=C^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Возьмем в логическом пространстве L произвольный вектор l и применим к нему оператор ***A***, а затем полученный новый вектор умножим на логический скаляр α, получив в результате некоторый вектор d. Оператор, переводящий вектор l в вектор d, назовем *произведением логического скаляра* α *на логический оператор* ***A*** и обозначим через $\alpha\boldsymbol{A}$. Другими словами,

$$(\alpha\boldsymbol{A})l=\alpha(\boldsymbol{A}l). \qquad (7)$$

Обозначим через ***B*** произведение $\alpha\boldsymbol{A}$. Если ***A*** является линейным оператором, то мы можем записать следующее:

$$\boldsymbol{B}(\beta l\vee\gamma g)=\alpha\boldsymbol{A}(\beta l\vee\gamma g)=\beta\alpha\boldsymbol{A}l\vee\gamma\alpha\boldsymbol{A}g=\beta\boldsymbol{B}l\vee\gamma\boldsymbol{B}g. \qquad (8)$$

Равенство (8) доказывает линейность логического оператора $\boldsymbol{B}=\alpha\boldsymbol{A}$. Возьмем произвольный базис в логическом пространстве L. Обозначим через A матрицу, отвечающую в выбранном базисе логическому линейному оператору ***A***, а через B – матрицу оператора $\alpha\boldsymbol{A}$. Следовательно,

$$[(\alpha\boldsymbol{A})l]=B[l], \qquad (9)$$

$$[(\alpha\boldsymbol{A})l]=[\alpha(\boldsymbol{A}l)]=\alpha[\boldsymbol{A}l]=\alpha A[l]=(\alpha A)[l]. \qquad (10)$$

Из соотношений (9) и (10) вытекает, что

$$B[l]=(\alpha A)[l].$$

Другими словами,

$$B=\alpha A. \qquad (11)$$

Следовательно, матрица, отвечающая произведению логического скаляра а на линейный логический оператор ***A***, равна произведению этого скаляра на матрицу, соответствующую этому логическому оператору. Если в качестве логического скаляра а взять одноместный предикат P_2, то произведению P_2 на оператор (6) будет соответствовать матрица

$$P_2A=(1,0)\begin{pmatrix}(0,1)&(1,1)\\(1,0)&(0,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,0)\cdot(0,1)&(1,0)\cdot(1,1)\\(1,0)\cdot(1,0)&(1,0)\cdot(0,1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(0,0)&(1,0)\\(1,0)&(0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_0&P_2\\P_2&P_0\end{pmatrix}.$$

Для произведения логического скаляра на линейный логический оператор выполняются следующие соотношения:

$$0 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}, \qquad (12)$$

$$1 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \qquad (13)$$

$$\alpha(\beta \boldsymbol{A}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{A}, \qquad (14)$$

$$\alpha(\boldsymbol{AB}) = (\alpha \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\alpha \boldsymbol{B}). \qquad (15)$$

Возьмем некоторые операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ логического пространства L и каждому вектору $l \in L$ поставим в соответствие вектор $\boldsymbol{A}l \vee \boldsymbol{B}l$. Логический оператор, переводящий вектор l в вектор $\boldsymbol{A}l \vee \boldsymbol{B}l$, назовем *дизъюнкцией логических операторов* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ и обозначим через $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$. Следовательно, согласно определению

$$(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})l = \boldsymbol{A}l \vee \boldsymbol{B}l. \qquad (16)$$

Дизъюнкция двух линейных логических операторов также является линейным логическим оператором. Для доказательства этого утверждения запишем следующие соотношения:

$$(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})(\alpha l \vee \beta g) = \boldsymbol{A}(\alpha l \vee \beta g) \vee \boldsymbol{B}(\alpha l \vee \beta g) =$$
$$= \alpha \boldsymbol{A}l \vee \beta \boldsymbol{A}g \vee \alpha \boldsymbol{B}l \vee \beta \boldsymbol{B}g =$$
$$= \alpha(\boldsymbol{A}l \vee \boldsymbol{B}l) \vee \beta(\boldsymbol{A}g \vee \boldsymbol{B}g) = \alpha(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})l \vee \beta(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})g,$$

откуда и следует линейность дизъюнкции линейных логических операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Аналогичным образом доказывается линейность дизъюнкции любого числа линейных логических операторов. Выберем в пространстве L некоторый базис, в котором линейные логические операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ будут иметь матрицы A и B соответственно. Тогда можно записать следующее:

$$[(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})l] = [\boldsymbol{A}l \vee \boldsymbol{B}l] = [\boldsymbol{A}l] \vee [\boldsymbol{B}l] = A[l] \vee B[l] = (A \vee B)[l], \qquad (17)$$

откуда следует, что дизъюнкции линейных логических операторов отвечает дизъюнкция матриц, соответствующих складываемым операторам. Например, для приведенного выше примера дизъюнкции $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$ будет отвечать матрица

$$A \vee B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем теперь операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, которым отвечают матрицы

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_3 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$B = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) \end{pmatrix},$$

соответственно. Тогда их дизъюнкции будет соответствовать матрица

$$A \vee B = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) \vee (1,0) & (1,1) \vee (0,1) \\ (1,0) \vee (0,1) & (0,1) \vee (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,1) \\ (1,1) & (0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} P_3 & P_3 \\ P_3 & P_1 \end{pmatrix}.$$

Для дизъюнкции линейных логических операторов справедливы следующие соотношения:

коммутативности

$$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{A}, \qquad (18)$$

ассоциативности

$$(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \vee \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \vee (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}), \qquad (19)$$

дистрибутивности относительно умножения на скаляр

$$\alpha(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) = \alpha \boldsymbol{A} \vee \alpha \boldsymbol{B}, \qquad (20)$$

дистрибутивности относительно дизъюнкции скаляров

$$(\alpha \vee \beta)\boldsymbol{A} = \alpha \boldsymbol{A} \vee \beta \boldsymbol{A}, \qquad (21)$$

закон нуля

$$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}, \qquad (22)$$

закон идемпотентности

$$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \qquad (23)$$

левой и правой дистрибутивности

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} \vee \boldsymbol{AC}, \qquad (24)$$

$$(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} \vee \boldsymbol{BC}. \qquad (25)$$

Докажем равенство (24). Для этого запишем следующие равенства:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C})l = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}l) \vee \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}l), \qquad (26)$$

$$(\boldsymbol{AB} \vee \boldsymbol{AC})l = (\boldsymbol{AB})l \vee (\boldsymbol{AC})l = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}l) \vee \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}l). \qquad (27)$$

Сравнивая (26) и (27), устанавливаем справедливость равенства (24). Утверждения (18)-(23) и (25) доказываются аналогично.

Литература. 1. *Гвоздинская Н.А.* Булевы и предикатные логические пространства // Проблемы бионики. 1999. Вып. 51 . С.36-44. 2. *Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О логических пространствах // АСУ и приборы автоматики. 1997. Вып. 106. С.21-30. 3. *Поваров Г.Н.* О групповой инвариантности булевых функций // Применение логики в науке и технике. М.: Изд-во АН СССР, 1960. С.263-340. 4. *Гвоздинская Н.А.* О логических операторах // Проблемы бионики. 1998. Вып.49. С.90-94. 5. *Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О логических матрицах // Проблемы бионики. 1998. Вып. 48. С.12-22. 6. *Гвоздинская Н.А.* О матрицах линейных логических операторов // Проблемы бионики. 1999. Вып. 50. С.25-30.

Поступила в редколлегию 08.09.98

Рецензент: д-р техн. наук Петров Э.Г.

Гвоздинская Наталья Анатольевна, аспирантка кафедры ПОЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: логическая алгебра, искусственный интеллект. Адрес: Украина. 310093, Харьков, ул. Скорохода, 24, кв. 79, тел. 40-94-46.

Дударь Зоя Владимировна, канд. техн. наук, доцент кафедры ПОЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: формализация текстов естественного языка. Адрес: Украина, 310202, Харьков, пр. Л. Свободы, 39Б, кв. 31, тел. 40-94-46.

Пославский Сергей Александрович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической механики ХГУ. Научные интересы: логическая алгебра. Адрес: Украина, 310726, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-46.

Шабанов-Кушнаренко Юрий Петрович, д-р техн. наук, профессор кафедры ПОЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: теория интеллекта, алгебраическая логика. Адрес: Украина, 310058, Харьков, ул. Культуры, 11, кв. 31, тел. 40-94-46.