СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ ЦИФРОВОЙ САР С НЕНАДЕЖНЫМ КАНАЛОМ СВЯЗИ

Г. А. Калинин

Харьков

Рассматривается случай управления объектом с помощью ЦВМ, работающей в режиме вычисления сигнала рассогласования и последовательно включенной в замкнутый контур передачи воздействий, когда каждая кодограмма, поступившая с выхода ЦВМ, с вероятностью q

поступает на непрерывную часть системы и с вероятностью $r = 1 - q$ теряется в канале связи.

К данной модели приводится, например, случай стыковки управляющей ЦВМ с множеством исполнительных органов через буферное запоминающее устройство с ограниченной емкостью [1].

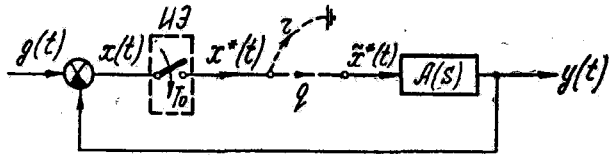

Рис. 1.

В ходе анализа предполагается, что выполняются те допущения, при которых возможно эквивалентное структурное представление цифровой САР в виде линейной импульсной системы с постоянным периодом дискретности T_0 (рис. 1), где через $A(s)$ обозначена передаточная функция непрерывной части системы. Импульсный элемент (*ИЭ*) генерирует

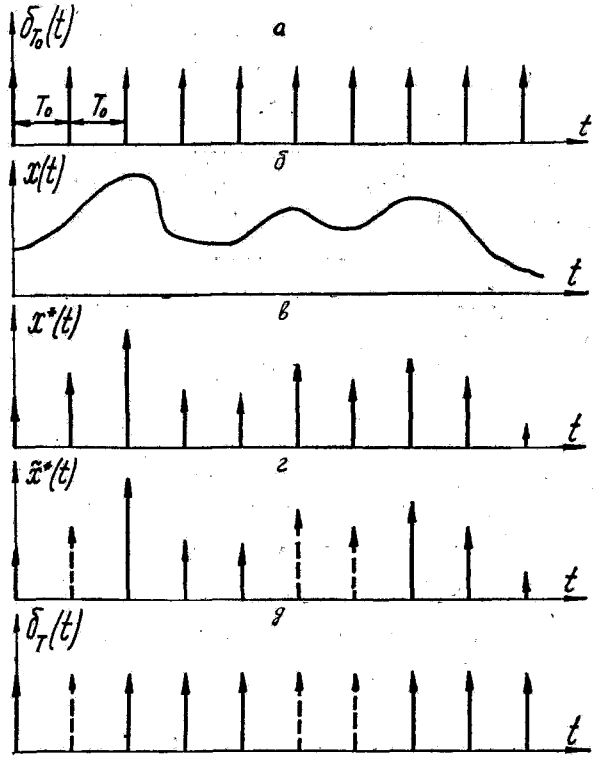

Рис. 2.

последовательность единичных импульсных функций $\delta_{T_0}(t)$ (рис. 2, *а*), площадь которых модулирована функцией $x(t)$, т. е.

$$x^*(t) = x(t)\,\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t - nT_0).$$

Пунктирные линии на рис. 1 отражают потерю импульсов. Таким образом, на непрерывную часть системы приходит новая импульсная

последовательность $\tilde{x}^*(t)$ (рис. 2, *г*), образованная из импульсной последовательности $x^*(t)$, если в последней случайным образом возникают пропуски импульсов. Задача заключается в том, чтобы проанализировать влияние пропусков импульсов на общую погрешность регулирования при условии, что на непрерывную часть системы в свою очередь действует случайное возмущение.

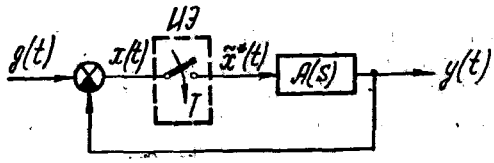

Рис. 3.

Рассмотрение временных диаграмм на рис. 2 позволяет сделать следующий вывод: последовательность разреженных импульсных функций $\tilde{x}^*(t)$ будет иметь такой же вид, как если бы в последовательности $\delta_{T_0}(t)$ случайным образом возникали пропуски импульсов, а канал связи был бы абсолютно надежным. Это равносильно тому, что ключ *ИЭ* замыкается случайным образом (рис. 2, *д*), генерируя последовательность единичных импульсных функций $\delta_T(t)$. Совокупность случайных величин, характеризующих интервалы между соседними моментами замыкания ключа *ИЭ*, образует в этом случае процесс восстановления с дискретным аргументом.

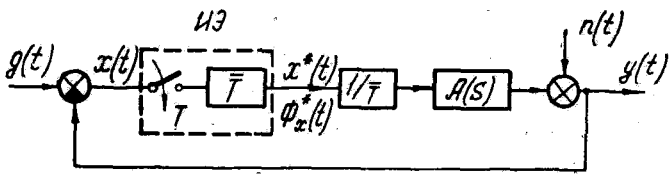

Рис. 4.

Сделанные выше выводы дают возможность перейти от структурной схемы на рис. 1 к эквивалентному представлению в виде импульсной системы со случайным периодом дискретности (рис. 3), где T — случайный период замыкания ключа *ИЭ* (если $r = 0$, то $T = T_0$).

Импульсную систему со случайным периодом дискретности рассматривал Берген [2], который нашел замкнутую форму выражения для спектральной плотности случайного сигнала на выходе *ИЭ*, периоды замыкания которого представляют собой независимые случайные числа.

Теперь от структурной схемы на рис. 3 перейдем к структурной схеме на рис. 4, где через $n(t)$ обозначено случайное возмущение, приведенное к выходу системы. На рис. 4, следуя Бергену, импульсный элемент состоит из ключа со случайным периодом замыкания T и звена с передаточным коэффициентом $\bar{T}$, означающим математическое ожидание случайной величины T. Звено с передаточным коэффициентом $\bar{T}^{-1}$ приводит к нужному уровню усиленный в $\bar{T}$ раз сигнал на выходе *ИЭ*.

Для стационарного случайного процесса $x(t)$ с автокорреляционной функцией $\varphi_x(\tau)$ Берген получил $\Phi_x^*(s)$ — спектральную плотность квантованного случайного сигнала на выходе *ИЭ*:

$$\Phi_x^*(s) = S_x^*(s) + S_x^*(-s), \tag{1}$$

где

$$S_x^*(s) = \frac{\overline{T}}{4\pi j}\oint_\Gamma S_x(s)\frac{1+Q(s-p)}{1-Q(s-p)}dp. \tag{2}$$

В формуле (2) приняты следующие обозначения: $S_x(s)$ — одностороннее преобразование Лапласа автокорреляционной функции $\varphi_x(\tau)$; $Q(s)$ — преобразование Лапласа — Стильтьеса от функции распределения $F(t)$ случайной величины T — периода замыкания ключа *ИЭ*, т. е.

$$Q(s) = \int_0^\infty e^{-st}dF(t). \tag{3}$$

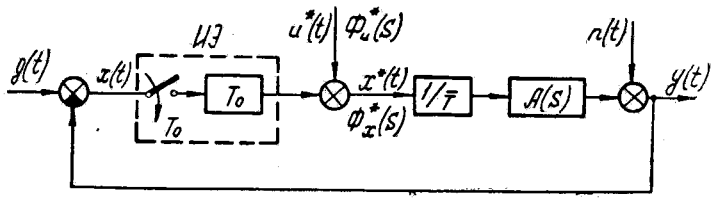

Рис. 5.

Контур интегрирования в формуле (2) включает в себя линию, параллельную мнимой оси, и замкнутую кривую в левой части комплексной плоскости.

В нашем случае

$$Q(s) = \frac{qe^{-T_0 s}}{1-re^{-T_0 s}} \tag{4}$$

и математическое ожидание $\overline{T} = T_0 q^{-1}$.

Последовательное применение формул (2) и (3) дает следующее выражение для $\Phi_x^*(s)$:

$$\Phi_x^*(s) = \frac{T_0}{2\pi j}\oint_\Gamma S_x(s)\frac{1-e^{2pT_0}}{[1-e^{-(s-p)T_0}][1-e^{(s+p)T_0}]}dp + \frac{T_0 r}{q}\langle x^2(t)\rangle. \tag{5}$$

Первое слагаемое в формуле (5) есть спектральная плотность выходного сигнала *ИЭ*, когда ключ замыкается регулярно с периодом T_0. Второе слагаемое, не зависящее от s, представляет собой спектральную плотность «белого» шума, который, кроме того, некоррелирован с любым ансамблем входных сигналов.

Структурная схема на рис. 5 иллюстрирует применение формулы (5). Здесь к выходу *ИЭ*, действующего без пропусков, прибавляется фиктивный «белый» шум со спектральной плотностью

$$\Phi_u^*(s) = \frac{r}{q}T_0\langle x^2(t)\rangle, \tag{6}$$

где через $\langle x^2(t)\rangle$ обозначен средний квадрат случайного процесса $x(t)$.

Случайный процесс $u^*(t)$ сам может быть образован так, как показано на рис. 6, где через $u(t)$ обозначен непрерывный «белый» шум, некоррелированный с любым ансамблем входных сигналов. На рис. 6 $ИЭ_1$ и $ИЭ_2$ представляют собой импульсные элементы, ключи которых замыкаются одновременно с периодом T_0.

Поскольку в линейной системе операция алгебраического суммирования коммутативна с операцией временного квантования, то от рис. 6 можно перейти к рис. 7, где квантование производится после суммирования $x(t)$ и $u(t)$. Поэтому коэффициенты T_0 и T_0^{-1} сокращаются, а множитель q отнесен к непрерывной части системы.

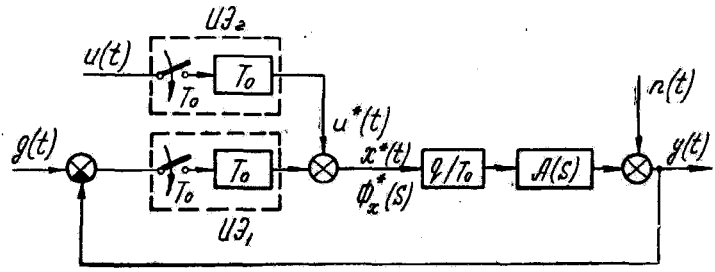

Рис. 6.

Действие возмущающего воздействия $n(t)$ и «белого» шума, вызванного потерями кодов, на импульсную САР можно исследовать, если предположить, что управляющее воздействие $g(t) \equiv 0$, и в этих условиях рассмотреть, чему равен выход системы $y(t)$. Поскольку управляющее воздействие равно нулю, то желаемый выход также должен быть нулевым, однако возмущающее воздействие и фиктивный «белый» шум вызывают колебания выходной координаты относительно нулевого уровня с интенсивностью $\langle y^2(iT_0)\rangle$, где последняя величина представляет собой средний квадрат выходной координаты в дискретные моменты времени, т. е.

$$\langle y^2(iT_0)\rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} y^2(iT_0). \qquad (7)$$

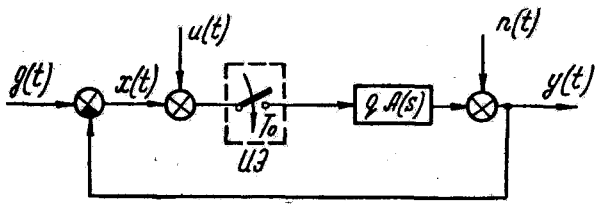

Рис. 7.

Структурная схема на рис. 7 является исходной для расчета среднего квадрата ошибки, вызванной потерями кодов в канале связи и действием возмущающего воздействия $n(t)$. Поскольку САР является линейной, по принципу суперпозиции можно рассчитать составляющие общей ошибки от каждого источника погрешности с учетом того, что эти источники взаимно некоррелированы:

$$\langle y_\Sigma^2(iT_0)\rangle = \langle y_n^2(iT_0)\rangle + \langle y_u^2(iT_0)\rangle, \qquad (8)$$

где $\langle y_n^2(iT_0)\rangle$ — средний квадрат выходного сигнала вследствие действия возмущающего воздействия; $\langle y_u^2(iT_0)\rangle$ — компонента выходной погрешности из-за потери кодов.

Выражение для среднеквадратичной ошибки выходного сигнала в дискретные моменты времени получено Скланским [3] для разомкнутой

системы общего вида, изображенной на рис. 8. Здесь стационарный случайный сигнал $x(t)$ квантуется с постоянным периодом T_0. Линейная система, передаточная функция $K(s)$ которой есть произведение $A^*(e^{sT_0})$ и $H(s)$, откликается на квантованный сигнал $x^*(t)$ выходом $\vartheta(t)$. Предполагается, что дискретные и непрерывные звенья на рис. 8 являются

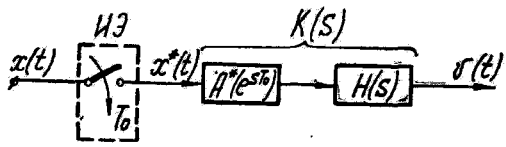

Рис. 8.

устойчивыми и что известна $\Phi_x(s)$ — спектральная плотность входного сигнала. При этих допущениях

$$\langle \vartheta^2(iT_0)\rangle = \frac{1}{2\pi j T_0}\oint_{|z|=1} \Phi_x^*(z)\, A^*(z)\, A^*(z^{-1})\, \psi^*(z)\, z^{-1} dz. \qquad (9)$$

В формуле (9) $\Phi_x^*(z)$ представляет собой z-преобразование автокорреляционной функции $\varphi_x^*(iT_0)$ импульсной последовательности $x^*(t)$, т. е.

$$\Phi_x^*(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_x^*(iT_0)\, z^{-1}. \qquad (10)$$

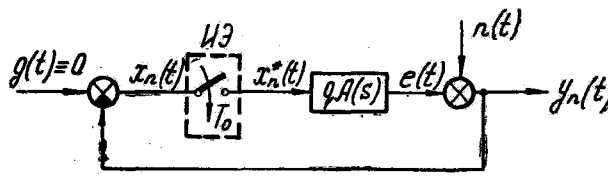

Рис. 9.

Если известна $\varphi_x(\tau)$ — автокорреляционная функция стационарного случайного процесса $x(t)$, то $\varphi_x^*(iT_0)$ может быть получено на основе известного соотношения [4]

$$\varphi_x^*(iT_0) = \frac{1}{T_0}\varphi_x(iT_0). \qquad (11)$$

На практике $\Phi_x^*(z)$ находится более простым путем, чем непосредственное применение формулы (10). Для этого нужно воспользоваться существующими таблицами соответствий между временными функциями, их преобразованиями Лапласа и z-преобразованиями.

Тогда

$$\Phi_x^*(z) = Z\{\Phi_x(s)\}, \qquad (12)$$

где Z — символ z-преобразования.

$A^*(z)$ в формуле (9) получается из $A^*(e^{sT_0})$ заменой e^{sT_0} на z; в свою очередь,

$$\psi^*(z) = Z\{H(s)\, H(-s)\}. \qquad (13)$$

Обратимся теперь к структурной схеме на рис. 9, которая соответствует отсутствию потерь кодов. Если здесь входом считать сигнал $n(t)$, а выходом — сигнал $e(t)$, то нетрудно получить передаточную функцию для этих переменных, которая изображена на рис. 10. Сравнивая схему на рис. 10 с тем, что рассматривал Скланский (см. формулу (9) и

рис. 8), приходим к выводу, что легко получить $<e^2(iT_0)>$ по формуле (9), если полагать

$$A_1^*(e^{sT_0}) = \frac{1}{1+qA^*(e^{sT_0})}; \tag{14}$$

$$H_1(s) = qA(s). \tag{15}$$

Тогда справедливо

$$<e^2(iT_0)> = \frac{1}{2\pi jT_0}\oint_{|z|=1} \Phi_n^*(z)\, A_1^*(z)\, A_1^*(z^{-1})\, \psi_1^*(z)\, z^{-1}dz, \tag{16}$$

где $\psi_1^*(z)$ отвечает функции $H_1(s)$.

Фактически нас интересует не значение $<e^2(iT_0)>$, а величина $<y_n^2(iT_0)>$. Схема на рис. 7 дает

$$y_n(iT_0) = n(iT_0) - e(iT_0). \tag{17}$$

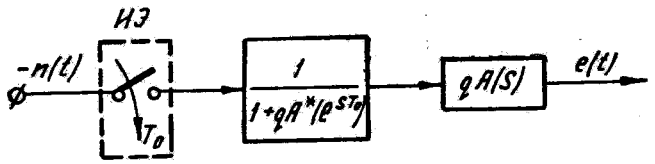

Рис. 10.

Возведем в квадрат обе части равенства (17) и выполним операцию временного усреднения. Тогда

$$<y_n^2(iT_0)> = <n^2(iT_0)> - 2<n(iT_0)\,e(iT_0)> + <e^2(iT_0)>. \tag{18}$$

Окончательное выражение для $<y_n^2(iT_0)>$ будет определяться значением второго слагаемого в правой части формулы (18). Дальнейшие выкладки станут более обозримыми, если допустить, что автокорреляционная функция $\varphi_n(\tau)$ процесса $n(t)$ быстро затухает в течение интервала дискретности. Это равносильно слабой корреляционной связи между $e(iT_0)$ и $n(iT_0)$, поэтому

$$<y_n^2(iT_0)> = <n^2(iT_0)> + <e^2(iT_0)>. \tag{19}$$

Выражение (19) дает несколько большее значение погрешности, чем применение формулы (18). В этом смысле полученную ниже погрешность можно рассматривать в качестве максимальной оценки для импульсной САР рассматриваемого типа.

Сделанные выше допущения относительно характера автокорреляционной функции $\varphi_n(\tau)$ позволяют найти значение $\Phi_n^*(z)$ в соотношении (16). Применение формулы (10) дает

$$\Phi_n^*(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_n^*(iT_0)\, z^{-i} = \varphi_n^*(0) = <n^2(iT_0)>. \tag{20}$$

С учетом (16) и (20) формула (19) перепишется следующим образом:

$$<y_n^2(iT_0)> = <n^2(iT_0)> + \frac{<n^2(iT_0)>}{2\pi jT_0}\oint_{|z|=1} A_1^*(z)\, A_1^*(z^{-1})\, \psi_1^*(z)\, z^{-1}dz. \tag{21}$$

Составляющую суммарной погрешности, вызванную действием фиктивного «белого» шума, можно найти из анализа структурной схемы на рис. 11. Если для этой схемы составить передаточную функцию от входа $u(t)$ до выхода $y_u(t)$, то по аналогии с предыдущим нетрудно записать

$$<y_u^2(iT_0)> = \frac{1}{2\pi jT_0}\oint_{|z|=1} \Phi_u^*(z)\, A_1^*(z)\, A_1^*(z^{-1})\, \psi_1^*(z)\, z^{-1}dz, \tag{22}$$

где $A_1^*(z)$, $\psi_1^*(z)$ равны соответствующим функциям в формуле (16) и

$$\Phi_u^*(z) = \frac{r}{q} T_0 <x^2(iT_0)>. \qquad (23)$$

На заключительном этапе подставим значение $\Phi_u^*(z)$ из (23) в формулу (22) и произведем суммирование компонент $<y_n^2(iT_0)>$ и $<y_u^2(iT_0)>$ с учетом того, что $<x^2(iT_0)> = <y_\Sigma^2(iT_0)>$. После приведения подобных членов получим окончательно

$$<y_\Sigma^2(iT_0)> = <n^2(iT_0)> \frac{\left[1 + \frac{1}{2\pi j T_0} \oint_{|z|=1} A_1^*(z) A_1^*(z^{-1}) \psi_1^*(z) z^{-1} dz\right]}{1 - \frac{r}{2\pi j q} \oint_{|z|=1} A_1^*(z) A_1^*(z^{-1}) \psi_1^*(z) z^{-1} dz}. \qquad (24)$$

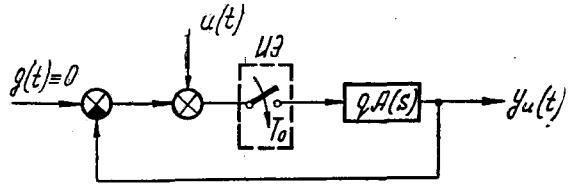

Рис. 11.

Выражение (24) дает значение среднего квадрата ошибки на выходе системы в дискретные моменты времени, когда на непрерывную часть системы действует случайное возмущение, и некоторые коды теряются в канале связи. Средний квадрат выхода оказывается в функции среднего квадрата возмущающего воздействия, параметров системы, периода дискретности и характеристик канала связи. Численное значение $<y_\Sigma^2(iT_0)>$ можно найти, зная вычеты подынтегральной функции внутри окружности единичного радиуса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Калинин. О синтезе многоканальных преобразователей «код — угол» для цифровых управляющих машин. Сб. «Методы разработки схем и конструкций цифровых систем», ч. I. ЛДНТП, 1967.

2. А. Р. Берген. О статистическом расчете линейных импульсных систем со случайными интервалами повторения импульсов. Тр. I Конгресса ИФАК, М., 1961.

3. J. Sklansky. On Closed-Form Expressions for Mean Squares in Discrete-Continous Systems. «IRE Trans on Automatic Control», 1958, № 3.

4. I. Ragazzini, G. Franklin. Sampled-Data Control Systems. Mc. Graw.-Hill Book Co., N. Y., 1958.

5. Ю. Т. Ту. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», М., 1964.

МЕТОДЫ ЗАДАНИЯ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

В. Л. Дженюк, С. А. Неделько, А. Я. Шпильберг

Харьков

При решении задач математической физики методом Монте-Карло возникает необходимость задания области определения и граничных условий. Например, алгоритм решения задачи Дирихле для уравнения