Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Позиційні ігрові задачі як багатокроковий процес прийняття рішень
(тема)

Виконав:
здобувач 2 року навчання, групи ПМм-24-1
Олександр МИРОНЕНКО
(Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)
Спеціальність
113 Прикладна математика
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма
Прикладна математика
(повна назва освітньої програми)
Керівник доц. Ольга МАТВІЄНКО
(посада, Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

Допускається до захисту

Завідувач кафедри ПМ ____________ Максим СИДОРОВ
(підпис) (Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра прикладної математики
Рівень вищої освіти другий (магістерський)
Спеціальність 113 Прикладна математика
(код і повна назва)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма Прикладна математика
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Завідувач кафедри ____________
(підпис)
“ 10 ” листопада 2025 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Мироненку Олександру Юрійовичу
(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема роботи Позиційні ігрові задачі як багатокроковий процес прийняття рішень

затверджена наказом по університету від 10 листопада 2025 р. № 1028 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 18 грудня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель сигнальної гри прийняття інвестиційних рішень в умовах невизначеності

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі

1. Аналіз предметної області
2. Вибір і обґрунтування методу розв’язання
3. Програмна реалізація
4. Результати обчислювального експерименту
5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп’ютерних ілюстрацій

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Аналіз предметної області
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	10 – 16 листопада 2025 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	17 – 23 листопада 2025 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	24 – 30 листопада 2025 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	01 – 07 грудня 2025 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	08 – 17 грудня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	18 грудня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання _10_ листопада 2025 р.

Здобувач ______________________________________
(підпис)

Керівник роботи __________________ доц. Ольга МАТВІЄНКО
(підпис) (посада, Власне ім’я, ПРІЗВИЩЕ)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 73 с., 12 рис., 1 дод., 30 джерела.

АНАЛІТИЧНА МАТЕМАТИКА, БАЙЄСОВА РІВНОВАГА, ДЕРЕВО ГРИ, МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, МОДЕЛЬ СПЕНСА, ПОЗИЦІЙНІ ІГРИ, РІВНОВАГА НЕША, СИГНАЛЬНІ ІГРИ, СТРАТЕГІЇ, ТЕОРІЯ ІГОР.

Об’єкт дослідження – математичні моделі позиційних ігор з неповною інформацією та методи їх розв’язання.

Мета роботи – проведення аналізу позиційних ігор з неповною інформацією на прикладі гри «фірма – інвестор» та знаходження рівноважних стратегій у термінах досконалої байєсівська рівновага.

Методи дослідження – методи теорії ігор, імітаційного та комп’ютерного моделювання.

Кваліфікаційна робота присвячена дослідженню математичного апарату позиційних ігор та методів прийняття рішень в умовах невизначеності. У роботі проводиться аналіз предметної області позиційних ігор, зокрема ігор з повною та неповною інформацією. Досліджуються основні властивості ігор у розгорнутій формі, поняття стратегій, інформаційних множин та рівноваги Неша. Основну увагу приділено методам розв’язання ігор, таким як метод зворотної індукції для ігор з досконалою інформацією та концепція досконалої байєсової рівноваги для сигнальних ігор. Проаналізовано сигнальну модель Спенса на ринку праці.

ABSTRACT

Introductory note: 73 pages, 12 figures, 1 appendix, 30 sources.

ANALYTICAL MATHEMATICS, BAYESIAN EQUILIBRIUM, GAME THEORY, GAME TREE, MATHEMATICAL MODELING, NASH EQUILIBRIUM, POSITIONAL GAMES, SIGNALING GAMES, SPENCE MODEL, STRATEGIES

Object of research – mathematical models of positional games with incomplete information and methods of their solution.

Purpose of work – analyze positional games with incomplete information using the example of the game «firm – investor» and find equilibrium strategies in terms of perfect Bayesian equilibrium.

Methods of research – methods of game theory, simulation, and computer modeling.

The qualification work is devoted to the study of the mathematical apparatus of positional games and methods of decision-making under conditions of uncertainty. The work analyzes the subject area of positional games, in particular games with complete and incomplete information. The main properties of games in expanded form, the concepts of strategies, information sets and Nash equilibrium are studied. The main attention is paid to methods for solving games, such as the method of backward induction for games with perfect information and the concept of perfect Bayesian equilibrium for signaling games. The Spence signaling model in the labor market is analyzed.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

БР – байєсова рівновага;

ПІ – позиційні ігри;

ІМ – інформаційна множина;

НФ – нормальна форма;

СФ – стратегічна форма.

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасний етап розвитку математичного моделювання характеризується широким використанням апарату теорії ігор для опису конфліктних ситуацій, динаміка яких впливає на поведінку учасників. Важливе місце серед них займають позиційні ігри, які моделюють процеси послідовного прийняття рішень в умовах змінюваної в часі та неповної інформації. Фундаментальні результати у цій галузі, зокрема теорема Куна про існування рівноваги Неша в чистих стратегіях для ігор з досконалою інформацією , а також розробка концепцій досконалої байєсової та секвенційної рівноваги, створили основу для формалізації стратегічних взаємодій. Незважаючи на значні теоретичні напрацювання, задача ефективного знаходження рівноважних стратегій у іграх зі складною інформаційною структурою залишається предметом активних досліджень для науковців.

У світі спостерігається тенденція застосування теоретико-ігрових моделей для вирішення прикладних задач в економіці та соціології, зокрема в умовах інформаційної асиметрії. Значна увага приділяється сигнальним іграм, де дії учасників слугують сигналами про їхні приховані характеристики.

Актуальність теми зумовлена необхідністю глибокого аналізу багатоетапних процесів прийняття рішень у конфліктних ситуаціях, що мають місце в різних сферах людської діяльності. Динамічні ігри дають змогу адекватно моделювати стратегічні взаємодії між учасниками, враховуючи часовий аспект і можливість зміни стратегій. Використання апарату теорії динамічних ігор забезпечує методологічну основу для прогнозування результатів таких взаємодій і сприяє підвищенню ефективності прийняття рішень у складних системах.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є проведення аналізу позиційних ігор з неповною інформацією на прикладі гри «фірма – інвестор» та знаходження рівноважних стратегій у термінах досконалої байєсівська рівновага. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі позиційних ігор;

– дослідити математичний апарат та моделі, що використовуються для опису позиційних ігор;

– проаналізувати основні методи та алгоритми знаходження оптимальних стратегій і рівноваги в позиційних іграх;

– побудувати відповідну сигнальну гру «фірма – інвестор» у розгорнутій формі;

– знайти профілі стратегій і вірувань (σ_F, σ_I, q), що утворюють досконалу байєсову рівновагу;

– описати умови, за яких реалізуються три типи рівноваг;

– визначити критичні значення параметрів (зокрема p_c), які розділяють області існування об'єднувальної та розділяючої рівноваги;

– обрати інструмент програмної розробки та розробити програмний продукт для автоматизації підрахунків та швидкого отримання результатів;

– провести економічну інтерпретацію отриманих результатів і зробити висновки щодо поведінки гравців.

Об'єктом дослідження є математичні моделі позиційних ігор з неповною інформацією та методи їх розв'язання.

Предметом дослідження є застосування математичних методів для моделювання та розв'язання прикладних позиційних ігрових задач.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються методи теорії ігор, імітаційного та комп'ютерного моделювання.

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Позиційні ігри

Одним із класів ігор, що описують конфлікти, динаміка яких впливає на поведінку учасників, є так звані ПІ.

Позиційна гра – це безкоаліційна гра, що моделює процеси послідовного прийняття рішень гравцями в умови змінюваної в часі і неповної інформації.

Процес гри полягає в послідовному переході від одного стану гри до іншого стану, який здійснюється або шляхом вибору гравцями однієї з можливих дій у відповідності до правил гри, або випадковим чином (випадковий хід).

Прикладом ПІ є хрестики-нулики, шашки, шахи, карткові ігри, доміно та інші. Право вибору першого ходу у цих іграх частіше визначається випадковим чином [1].

Стан гри прийнято називати вузлами чи позиціями (з цього назва ПІ), а можливі вибори кожної позиції – альтернативами. Остаточні позиції називаються вершинами.

Характерною особливістю ПІ є можливість представлення множини позицій у вигляді деревоподібної впорядкованої множини, яка називається деревом гри (рис. 1.1).

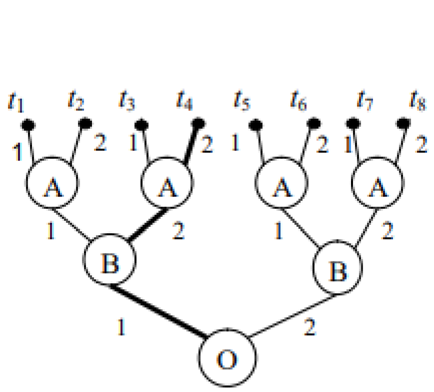


Рисунок 1.1 – Дерево позиційної гри

Символи O, A або B у кружку вказують, хто з гравців (O, A або B) робить черговий хід у даній позиції. При цьому символом O зазвичай позначається хід у грі, що здійснюється не гравцем, а яким-небудь випадковим механізмом.

Також у дереві є термінальні ПІ, тобто кінцеві результати, вони представлені у вигляді $t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8$. Це позиції, в яких гра завершується і для яких визначені остаточні виграші або програші кожного гравця.

Означення 1.1. У грі з розгорнутою формою «множина чистих стратегій гравця i» є

$$S_i = \prod_{h_i \in H_i} A(h_i),$$

де H_i містить всі ІМ, в яких робить хід гравець i, а $A(h_i)$ позначає всі дії, доступні гравцю i в ІМ h_i.

При цьому кількість чистих стратегій у гравця i буде

$$N_i = \prod_{h_i \in H_i} \left| A(h_i) \right|. \tag{1.1}$$

Наприклад, якщо в якійсь грі в якогось гравця є три ІМ, в яких можливо по 3, 4 і 5 дій, то число його чистих стратегій дорівнює $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Сукупність дерева гри та ІМ гравців дозволяє визначити множину стратегій для кожного гравця.

Оскільки виграш кожного гравця однозначно визначається стратегіями, обраними гравцями, то це дозволяє говорити про рівновагу Неша в іграх у розгорнутій формі [2].

Означення 1.2. Гра у розгорнутій формі є сукупність Γ наступних об'єктів.

1. Множини гравців $I = \{1,...,N\} \cup \{природа\}$.

2. Дерева гри – $(X, \mapsto)$,

де X – множина вершин;

$\mapsto$ – відношення успадкування, тобто $x \mapsto y$ позначає, що x відбувається раніше за y, або y лежить нижче за x.

Нехай це відношення має наступні властивості:

а) $\mapsto$ транзитивне: якщо $x' \mapsto x$, $x \mapsto x''$, то $x' \mapsto x''$;

б) $\mapsto$ антисиметрична: не виконується $x \mapsto x$ (антисиметричність та транзитивність визначають $\mapsto$ як частковий порядок на X);

в) якщо $x' \mapsto x$ та $x'' \mapsto x$, то або $x' \mapsto x''$, або $x'' \mapsto x'$.

Множина кінцевих вершин $Z \subset X$: для $z \in Z$ не існує вершини $x \subset X$, такої, що $z \mapsto x$. Початкова вершина $o \in X$ така, що $o \mapsto x$ для всіх $x \in X$.

3. Функцій виграшів $u_i : Z \to R$ для $I = 1,...,N$.

4. Черговість ходів $i : X \setminus Z \to I$.

5. Множини дій A. Нехай $A(x)$ – дії, доступні у вершині $x \in X \setminus Z$.

6. Інформаційних множин. Нехай H – розбиття $X \setminus Z$ не підмножини, таке, що для всіх $h \in H$, якщо $x \in h$ та $x' \in h$, то $i(x) = i(x')$, тобто кожна ІМ містить вершини, в яких ходить тільки один гравець. Якщо $x, x' \in h$, то $A(x) = A(x')$. Тобто в усіх множинах, які входять в ІМ, гравцю доступний один і той самий набір дій.

Множина X та відношення $\mapsto$ визначають спрямований граф. Умови на відношення $\mapsto$ гарантують, що граф є деревом.

Початкова вершина o відповідає моменту початку гри. Кожна вершина, яка не є кінцевою, означає або ухвалення рішення одним із гравців, або випадковий хід, що робить природа [3].

Кожна кінцева вершина відповідає закінченню гри та якомусь вектору виграшів гравців.

ІМ показують, що відомо гравцям про ходи, які зроблені раніше іншими гравцями.

1.2 Позиційні ігри з повною інформацією

Гра в розгорнутій формі, в якій всі ІМ містять рівно по одному вузлу, називається грою з повною інформацією. У ПІ з повною інформацією кожен гравець знає при своєму ході ту позицію дерева гри, в якій він знаходиться.

Означення 1.3. Нехай кожна ІМ в грі Γ містить одну вершину. Така гра називається грою із досконалою інформацією.

Теорема 1.1. У будь-якій кінцевій грі з досконалою інформацією є рівновага у чистих стратегіях.

Визначимо, як у загальному випадку отримувати поведінкові стратегії зі змішаних. Якщо $R_i(h_i)$ – множина чистих стратегій гравця i, що допускають проходження гри через ІМ h_i при якихось s_{-i}, то ймовірність того, що гравець i обере дію a_i в ІМ h_i, є

$$b_i(a_i \mid h_i) = \frac{\sum\limits_{s_i \in R_i(h_i), s_i(h_i) = a_i} \sigma_i(s_i)}{\sum\limits_{s_i \in R_i(h_i)} \sigma_i(s_i)}, \tag{1.2}$$

де $\sigma_i(s_i)$ – ймовірність зіграти чисту стратегію s_i при змішаній стратегії σ_i.

Позначимо через $b_i(\sigma_i)$ поведінкову стратегію, отриману таким чином зі змішаної стратегії σ_i. Позначимо через $\Omega_i(b_i)$ множину всіх змішаних стратегій, що призводять до поведінкової стратегії b_i.

Можна сказати, що для широкого класу ігор, ігор із досконалою пам’яттю, ми можемо шукати рівновагу як у змішаних, так і в поведінкових стратегіях [4]. Існує наступний результат.

Теорема 1.2. Для всіх ігор із досконалою пам'яттю змішані та поведінкові стратегії еквівалентні. Тобто для всіх b_i, b_{-i} та всіх $\sigma_i \in \Omega_i(b_i)$, $\sigma_{-i} \in \Omega_{-i}(b_{-i})$ ми шукаємо

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_i(b_i, b_{-i}), \tag{1.3}$$

де u_i – функція виграшів.

У грі з досконалою пам'яттю кожен гравець у кожній ІМ пам'ятає всю послідовність зроблених ним ходів, а також не забуває всі побачені ним ходи інших гравців.

Означення 1.4. Нехай Γ – гра у розгорнутій формі. Підгра $\Gamma(x)$ – це частина дерева гри, яка починається з деякої вершини x і задовольняє наступним властивостям:

а) x – єдиний елемент у своїй ІМ;

б) ІМ, що містять вершини з підгри $\Gamma(x)$, не містять вершин, що лежать поза деревом підгри $\Gamma(x)$.

Означення 1.5. Нехай Γ – ПІ. Профіль стратегій є досконалим за підіграми, якщо він є рівнозначним для кожної з підігор Γ.

Означення 1.6. Нехай Γ – гра у розгорнутій формі, $T > 1$ – натуральне число. Визначимо як $G(T)$ ПІ, в якій гра Γ повторюється T разів, а виграш гравця i складає

$$u_i = \sum_{t=1}^{T} u_i(a_t), \tag{1.4}$$

де $a_t \in A$ – дія гравців в момент часу $t = 1,...,T$.

Саму гру G ми називатимемо покрокової грою, а елементи множини стратегій крокової гри $a \in A$ – діями.

Теорема 1.3. Нехай $G = \langle I, A, u \rangle$ – гра в НФ з єдиною рівновагою a^*, $T > 1$. Тоді в грі $G(T)$ існує єдина досконала за підіграми рівновага Неша, така, що в кожній підгрі, що починається з $t \geq 1$, гравці виберуть дії a^*.

Означення 1.7. Нехай $G = \langle I, A, u \rangle$ – гра в НФ. Нехай $0 \leq \delta < 1$.

Позначимо моменти часу через $t = 0,1,...$. Нехай $a_t \in A$ – дії гравців в момент часу t. Введемо позначення

$$\overline{u}_i(\tau) = (1-\delta)\sum_{t=\tau}^{\infty}\delta^{t-\tau}u_i(a_t). \tag{1.5}$$

Позначимо через $G(\delta)$ гру G, повторювану нескінченну кількість разів, в якій виграш гравця i дорівнює $\overline{u}_i(0)$.

Величина $0 \le \delta < 1$ – дисконт. Чим ця величина менша, тим менше гравці цінують майбутні виграші порівняно з поточними виграшами. Величину $\overline{u}_i(\tau)$ називатимемо усередненим дисконтованим виграшом. Ця величина є середнім виграшом гравця i, починаючи з моменту часу τ.

Припустимо, що гравець i у кожний момент часу $t = \tau, \tau+1, \ldots$ отримує виграш $\overline{u}_i(\tau)$. Тоді його приведений або дисконтований виграш на момент часу $t = \tau$ дорівнюватиме його дисконтованому виграшу у разі, коли гравець у момент часу $t \ge \tau$ отримав би $u_i(a_t)$:

$$\sum_{t=\tau}^{\infty}\delta^{t-\tau}\overline{u}_i(\tau) = \frac{\overline{u}_i(\tau)}{1-\delta} = \sum_{t=\tau}^{\infty}\delta^{t-\tau}u_i(a_t). \tag{1.6}$$

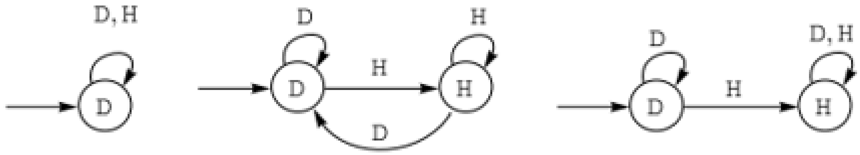
Множина стратегій (нехай навіть чистих) у грі, що нескінченно повторюється, дуже велике. Дійсно, стратегія повинна наказувати, як діяти кожному гравцю залежно від усіх можливих дій усіх гравців у попередні періоди – для кожного моменту часу $t \ge 0$. У грі, що нескінченно повторюється, будь-яка підгра еквівалентна самій грі. Тому ми обмежуватимемося стратегіями, в яких дія гравця в поточний період залежить від дій усіх гравців за якесь кінцеве число попередніх періодів [5].

Означення 1.8. Нехай $G = \langle I, A, u \rangle$ – гра в НФ. Тоді марківська стратегія з пам'яттю T для гравця i є функція

$$m_i : A^T \to A_i, \tag{1.7}$$

яка визначає a_{it} для кожної історії гри довжиною T.

На рисунку 1.2 показані приклади різних марківських стратегій з пам’яттю довжиною $T=1$ для гри «дилема ув'язненого».



а) Завжди грати D б) Око за око в) Тригер

Рисунок 1.2 – Різні марківські стратегії з пам'яттю $T=1$

Стратегія на рисунку 1.2 (а) наказує зробити перший хід D, потім весь час повторювати його, незалежно від послідуючих ходів суперника. На рисунку 1.2 (б) показано стратегію «око за око», згідно з якою перший хід повинен бути D, потім щоразу треба повторювати хід, зроблений суперником у попередній момент часу. На рисунку 1.2 (в) зображено так звана «тригерна» чи «похмура» стратегія: у початковий час гравець робить хід D, потім повторює його, доки суперник не зробить хід H. Після цього тригерна стратегія наказує весь час ходити H, незалежно від подальших дій суперника.

Нехай $G=\langle I, A, u\rangle$ – гра у СФ. Позначимо через $u(a)$ вектор виграшів всіх гравців. Нехай

$$X=\left\{x\in R^N \middle| x=\sum_{a\in A}\alpha_a u(a),\ \sum_{a\in A}\alpha_a=1,\ \alpha_a\geq 0\right\}. \tag{1.8}$$

Будь-який вектор із цієї множини є опукла комбінація виграшів гравців за якихось чистих стратегій. Можна довести, що за досить великого δ будь-який вектор $x\in X$ буде вектором наведених виграшів гравців для якихось дій гравців $a_0, a_1, \ldots$ [6].

Позначимо через

$$\underline{u}_i = \min_{a_{-i} \in A_{-i}} \max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, a_{-i}) \tag{1.9}$$

мінімаксний виграш – мінімальний виграш, який може собі гарантувати гравець i в грі G. У будь-якій рівновазі в повторюваній грі $G(\delta)$ наведений виграш гравця i не може бути менше, ніж $\underline{u}_i$. Дійсно, в момент часу $t = 0$ гравець i може вибити дію a_{i0}, що максимізує $u_i(a_i, a_{-i0})$, в момент часу $t = 1$ – дію a_{i1} максимінізуюче $u_i(a_i, a_{-i1})$ і так далі. У кожному періоді його виграш не буде меншим, ніж $\underline{u}_i$.

Нехай

$$Y = \left\{ y \in R^N \middle| y_i > \underline{u}_i \right\}. \tag{1.10}$$

Тоді вірно наступне твердження.

Теорема 1.4. Нехай $G = \langle I, A, U \rangle$ – гра у СФ. Нехай $u \in X \cap Y$. Тоді існує $\bar{\delta} < 1$, таке, що для всіх $\delta \in \left[\bar{\delta}, 1\right)$ у повторюваній грі $G(\delta)$ існує рівновага в чистих стратегіях, в якому наведений виграш кожного гравця i дорівнює u_i.

Теорема 1.5. Нехай $G = \langle I, A, u \rangle$ – гра у НФ. Нехай виграш $u \in X \cap Y$, розмірність множини $X \cap Y$ дорівнює числу гравців N. Тоді існує дисконт $\bar{\delta} < 1$, такий, що для всіх $\delta \in \left[\bar{\delta}, 1\right)$ у грі $G(\delta)$, що повторюється, існує досконала за підіграми рівновага, в якій усереднені дисконтовані виграші гравців рівні u.

Означення 1.9. Нехай Γ – гра в розгорнутій формі, x – нескінченна вершина дерева гри. Піддеревом гри Γ з вершини x назвемо сукупність всіх вершин, що лежать нижче x, і самої вершина x. Піддерево називається підігрою, коли будь-яка ІМ гри Γ або повністю міститься в піддереві, або не перетинається з ним.

1.3 Позиційні ігри з неповною інформацією

В ПІ з неповною інформацією (наприклад доміно) гравець, що робить хід, не знає точно, в який момент позиції дерева гри він фактично знаходиться. Цьому гравцю відомо лише кілька множин позицій, що включає його фактичну позицію [7].

Означення 1.10. Якщо хоча б у одного з гравців існує ІМ, яка складається з двох або більше вершин, то така гра називається грою з недосконалою інформацією.

Стратегією гравця є набір дій гравця в усіх ІМ, в яких йому належить хід. В іграх з неповною інформацією гравець вибирає стратегію в кожній своїй ІМ (на відміну від ігор з досконалою інформацією, де гравець вибирає стратегію у кожній вершині, в якій йому належить хід).

Під час аналізу ПІ з неповною інформацією ми стикаємося з проблемою, як правильно визначити рівновагу. У ПІ з повною інформацією ми були змушені ввести поняття абсолютної за підіграми рівновагу, оскільки знаходження всіх «простих» рівноваг Неша в ПІ іноді дає надто багато рішень. Деякі з них були неприйнятні, бо припускали наявність заздалегідь нездійсненних загроз з боку деяких гравців. Однак в іграх з неповною інформацією вчинена за підіграми рівновага нас вже не влаштовує.

Означення 1.11. Нехай Γ – гра у розгорнутій формі, h – ІМ в цій грі. Назвемо вірою μ_h розподіл ймовірностей на вершинах, що входять до h. Позначимо через $\mu = (\mu_h)$ систему вір у грі Γ – розподіл ймовірностей для всіх ІМ.

Віра гравця в ІМ відображає його уявлення про те, в якій саме вершині множини він зараз перебуває з якоюсь ймовірністю. У тих випадках, коли це можливо, віра має бути узгоджена з його уявленнями про стратегії інших гравців [8].

Означення 1.12. Нехай Γ – гра у розгорнутій формі, σ – профіль поведінкових стратегій у цій грі. Нехай μ – система вір. Будемо говорити, що μ слабо узгоджена з σ, якщо для всіх ІМ h таких, що при σ існує додатня ймовірність влучення гри в h, і для всіх вершин $a \in h$ вірно наступне:

$$\mu_h(a) = \frac{P(a \mid \sigma)}{P(h \mid \sigma)}, \tag{1.11}$$

де $P(a \mid \sigma)$ – ймовірність того, що траєкторія гри пройде через вершину a;

$P(h \mid \sigma) = \sum_{b \in h} P(b \mid \sigma)$ – траєкторія буде через ІМ h.

У кожній ІМ оптимальна дія гравця повинна залежати від його віри в цій ІМ. Нехай σ – профіль поведінкових стратегій, μ – система вір. Нехай h – ІМ, в якій гравець i робить хід. Позначимо через $u_{i,h}(\sigma \mid \mu_h)$ очікуваний виграш гравця i за умови, що гра досягла множини h. Ця величина дорівнює сумі виграшів даного гравця у всіх вершинах ІМ h, помноженої на ймовірності опинитися в цих вершинах, що визначаються μ_h. Будемо говорити, що σ_i секвенційно раціональна відносно μ, якщо для всіх σ'_i ми маємо $u_{i,h}(\sigma_i, \sigma_{-i} \mid \mu_h) \geq u_{i,h}(\sigma'_i, \sigma_{-i} \mid \mu_h)$. Можна дати таке визначення рівноваги.

Означення 1.13. Пара (σ, μ) є слабо секвенційною рівновагою, якщо σ секвенційно раціональна відносно μ і μ слабо узгоджена з σ.

Назвемо σ цілком змішаним профілем стратегій, якщо в кожній ІМ кожна дія реалізується з додатньою ймовірністю. Для такого σ рівняння (1.10) визначає віру для кожної ІМ. Дамо визначення.

Означення 1.14. Нехай σ – профіль поведінкових стратегій. Будемо вважати, що система вір μ є сильно узгодженою з σ, якщо існує послідовність цілком змішаних профілів $\sigma^n \to \sigma$, таких, що $\mu^n \to \mu$, де μ^k – система вір, слабо узгоджених з профілем стратегій σ^k.

Сильна узгодженість потребує, щоб віра була границею послідовності вір, отриманих із збіжних до стратегії σ профілів стратегії.

Означення 1.15. Пара (σ, μ) є сильно секвенційною рівновагою або просто секвенційною рівновагою, якщо σ секвенційно раціональна відносно μ і μ сильно узгоджена з σ.

Поняття сильно секвенційної рівноваги – більше строгий, ніж досконалість за підіграми, критерій для ПІ з неповною інформацією [9].

Означення 1.16. Нехай G – гра в НФ. Нехай σ – профіль стратегій, причому існує послідовність σ^n цілком змішаних профілів стратегій, таких, що:

а) $\sigma^n \to \sigma$;

б) для всіх k і для всіх i стратегія σ_i являється найкращою відповіддю на σ_{-i}^k.

Будемо називати σ досконалою (або досконалою відносно тремтячої руки) рівновагою.

Теорема 1.6. Нехай G – кінцева гра в НФ. Тоді в цій грі існує рівновага, досконала відносно тремтячої руки.

Лема 1.1. Нехай $G = \langle I, S, u \rangle$ – гра в НФ, σ^* – досконала рівновага в G. Нехай стратегія s_i для гравця i являється слабо домінуючою. Тоді $\sigma_i^*(s_i) = 0$.

Теорема 1.7. Нехай Γ – гра в розвернутій формі, G – гра в НФ, відповідна їй. Нехай σ^* – досконала рівновага в G. Тоді існує віра μ, така, що (μ, σ^*) – сильно секвенційна рівновага в Γ.

Таким чином, будь-яка досконала рівновага являється сильно секвенційною. Зворотне невірне: існують випадки, коли рівновага являється сильно секвенційною, но не досконалою.

Теорема 1.8. Нехай Γ – гра з досконалою пам'яттю. Тоді в ній існуй існує сильно секвенційна рівновага.

Тепер ми можемо вимагати від рівноваги, щоб вона була секвенційною [10].

Розглянемо такий клас ігор з неповною інформацією [11].

Гравці ходять по черзі, причому всі ходи всіх гравців спостерігаються. При цьому приватною інформацією являється тільки тип гравця, що визначає його переваги відносно різних результатів гри.

В такій грі порядок ходів визначається так само, як і в грі з повною інформацією, причому множина ходів, доступних гравцю на кожному етапі гри, не залежить від його типу. Припустимо таке, що тип гравців незалежний і початковий розподіл ймовірностей однаковий для усіх гравців.

Означення 1.17. Нехай Γ – гра в розгорнутій формі з повною інформацією, $T = T_1 \times \ldots \times T_N$ – множина типів гравців, $P = P_1 \times \ldots \times P_N$ – розподіл ймовірностей на T, u_i – функція виграшів гравця i, що визначає виграш незалежно від кінцевої вершини і його типу t_i, $u = (u_i)_{i=1}^N$. Тоді $\langle \Gamma, T, P, u \rangle$ – гра з діями, що спостерігаються.

Чому відповідають вершини в ІМ в такій грі? Нехай в ІМ h робить хід гравець i. Йому відома історія гри, але невідомі типи інших гравців.

Відповідно, кожна вершина ІМ h відповідає множині інших гравців T_{-i}, де T_{-i} – множина профілів типів всіх гравців, окрім i-го.

Аналогічно визначається P_{-i}. Віра μ_h в ІМ h – це розподіл ймовірностей на множині гравців T_{-i}. Нехай μ_{hj} – розподіл ймовірностей на множина T_j типів i-го гравця в ІМ h.

Означення 1.18. Нехай (μ, σ) – система вір і профілів поведінкових стратегій для гри, де дії спостерігаються. Назвемо систему вір μ розумною відносно σ, якщо виконується наступне.

1. μ слабо узгоджена з σ.

2. Нехай h і h' – ІМ, в яких в множину h' можна потрапити одним ходом із множини h. Нехай гравець i не робить хід ні в h, ні в h'. Тоді $\mu_{hi} = \mu_{h'i}$.

3. Нехай h – ІМ, в якій робить хід гравець i. Тоді $\mu_h = \prod_{j \neq i} \mu_{hj}$. Якщо o – початкова вершина, i – гравець, що робить перший хід, тоді $\mu_o = P_{-i} = \prod_{j \neq i} P_j$.

Третє твердження означає, що в кожній ІМ віри гравця i відносно типів інших гравців являються незалежними.

У сукупності з іншими твердженнями це означає, що поки будь-який гравець не зробить хід, інші гравці не дізнаються про нього нічого нового.

Таким чином, роблячи хід, гравець може змінювати уяву гравців тільки про свій тип, але не про тип інших гравців.

Означення 1.19. Нехай (μ,σ) – профіль поведінкових стратегій і система віри такі, що μ являється розумною відносно σ, а σ – секвенційно раціональною відносно μ. Тоді (μ,σ) називаємо досконало БР.

Теорема 1.9. Нехай Γ – гра з діями, що спостерігаються, (μ,σ) – досконала БР. Тоді (μ,σ) – сильно секвенційна рівновага, якщо у грі Г не більше двох ходів або у кожного гравця є не більше двох типів.

Якщо у такого типу гравця – більше двох типів, а періодів більше двох, то для деяких (але не для всіх) таких ігор існує (μ,σ), яке являється досконалою БР, але при цьому не являється секвенційною рівновагою.

Означення 1.20. Сигнальна гра – це гра з діями, що спостерігаються, в якій:

а) два гравці – відправник S та отримувач R;

б) у отримувача один тип, у відправника – більше одного;

в) перших хід робить відправник, другий хід – отримувач.

Справді, відправник – тип якого невідомий – може сигналізувати свій тип другому гравцю, вибираючи якусь дію, що спостерігається.

Як приклад, напиток, який вибрав відвідувач кафе, сигналізує хулігану тип відвідувача, або наявність або відсутність престижного диплома у претендента може насправді давати сигнал відносно його працьовитості.

Наявність тільки двох періодів в грі з діями, що спостерігаються – достатня умова для того, щоб досконала БР була секвенційною.

Перефразуємо визначення рівноваги для сигнальної гри. Визначимо через T множину типів гравця S. Нехай M – множина дій (сигналів) гравця S, що приписує певну дію залежно від типу.

ІМ гравця R будуть відповідати сигналам, які може послати гравець S. Нехай $\mu(t\,|\,m)$ – віра гравця R відносно того, що гравець S має тип $t \in T$ за умови, що його перших хід був $m \in M$. Визначимо через A множину дій гравця

R. Нехай $a: M \to A$ – стратегія гравця R, що приписує дію незалежно від сигналу, що йде від гравця S. Визначимо через $u_S(t,m,a)$ та $u_R(t,m,a)$ виграші двох гравців.

Досконалу БР можна переформулювати наступним чином.

Означення 1.21. Досконала БР в чистих стратегіях в сигнальній грі – це набір $\left(m^*(\cdot), a^*(\cdot), \mu(\cdot\,|\,\cdot)\right)$, такий, що:

а) для будь-якого $m \in M$ дія $a^*(m)$ максимізує очікуваний виграш гравця R за системи вір $\mu(\cdot\,|\,\cdot)$, тобто для всіх $a' \in A$ виконано

$$\sum_{t \in T} \mu(t\,|\,m) u_R\left(t, m, a^*(m)\right) \geq \sum_{t \in T} \mu(t\,|\,m) u_R\left(t, m, a'\right); \tag{1.12}$$

б) для всіх $t \in T$ дія $m^*(t)$ гравця S максимізує його виграш за умови, що гравець R буде грати урівноважену стратегію $a^*(\cdot)$:

$$u_S\left(t, m^*(t), a^*(m^*(t))\right) \geq u_S\left(t, m', a^*(m')\right) \tag{1.13}$$

для всіх $m' \in M$;

в) для всіх $m \in M$ таких, що існує $\tilde{t} \in T$ з властивістю $m^*(\tilde{t}) = m$, віра гравця R після ходу m визначається за правилом Байєса:

$$\mu(t\,|\,m) = \frac{P(t)}{\sum_{t' \in T_m} P(t')}, \tag{1.14}$$

де $P(t)$ – ймовірність того, що гравець S має тип $t \in T$;

T_m – всі типи гравців t', такі, що $m^*(t') = m$.

Перші дві вимоги в цій рівновазі – секвенційна раціональність гравців. Третя вимога – узгодженість системи вір для стратегії гравців.

1.4 Змістовна та формальна постановка задачі

Розглянемо динамічну модель взаємодії фірми та інвестора в умовах інформаційної асиметрії на ринку капіталу. Взаємодія описується позиційною грою з неповною інформацією (сигнальною грою), у якій один з гравців (фірма) володіє приватною інформацією про свою прибутковість, а інший гравець (інвестор) спостерігає лише непрямі сигнали та приймає рішення щодо фінансування проєкту.

У задачі розглядається взаємодія фірми та інвестора в умовах інформаційної асиметрії. Фірма має проєкт, для запуску якого потрібні інвестиції обсягом I. Реалізація проєкту приносить додатковий дохід R, який ділиться між фірмою та інвестором залежно від запропонованої частки s.

Фірма може бути двох типів.

1. L-тип – низька прибутковість L.
2. H-тип – висока прибутковість H, де $H > L$.

Справжній тип фірми є їй відомою приватною інформацією. Інвестор її не знає, а лише вірить, що фірма є L-типу з ймовірністю p і H-типу – з ймовірністю $1-p$.

Фірма першою робить хід – подає сигнал у вигляді частки s, яку готова передати інвестору в обмін на капітал. Інвестор, спостерігаючи лише s, вирішує, інвестувати чи відмовитися. Якщо інвестиція відбувається, сторони отримують частки від доходу $\theta + R$, де $\theta \in \{L, H\}$.

Таким чином, саме s є сигналом про тип фірми, і залежно від параметрів гри можуть виникати різні рівноваги:

– об'єднувальна (обидва типи пропонують однакову частку);

– розділяюча (типи обирають різні частки, що дозволяє інвестору їх відокремити).

Завдання полягає у визначенні можливих типів рівноваг та умов їх існування.

Розглядається сигнальна гра між фірмою та інвестором. Природа на початку обирає тип фірми $\theta \in \{L, H\}$, де $L < H$, причому ймовірність типу L дорівнює p, а типу H $-$ $1-p$. Тип фірми є її приватною інформацією, тоді як інвестор спостерігає лише розподіл і не знає θ.

Фірма має можливість реалізувати інвестиційний проєкт, який за умови фінансування приносить додатковий дохід $R > 0$, тоді як без інвестиції фірма отримує базовий прибуток θ.

Для реалізації проєкту необхідна інвестиція обсягом $I > 0$, а альтернативна дохідність капіталу для інвестора становить $r \geq 0$, тому інвестор, роблячи внесок I, вимагає компенсацію не меншу за $I(1+r)$.

Фірма, знаючи свій тип, робить хід першою і пропонує інвестору частку $s \in [0,1]$ у майбутньому доході $\theta + R$. Частка s є спостережуваним інвестору сигналом, на основі якого він оновлює свою віру $q(s) = P(\theta = L | s)$. Після спостереження сигналу інвестор приймає рішення, інвестувати чи відмовитись.

Якщо інвестиція здійснюється, то фірма отримує виграш $(\theta + R)(1-s)$, а інвестор отримує виграш $s(\theta + R) - I(1+r)$. Якщо інвестор відмовляється, фірма отримує θ, а інвестор – нуль.

Розв’язання задачі полягає у визначенні таких стратегій фірми s_L, s_H, стратегії інвестора (приймати або відхиляти пропозицію залежно від s) та системи вір $q(s)$, які разом утворюють досконалу байєсову рівновагу.

Це означає, що для кожного типу фірми вибір частки s_θ максимізує її виграш з урахуванням реакції інвестора, що рішення інвестора максимізує його очікуваний виграш у відповідь на будь-який сигнал, і що віра $q(s)$ узгоджена з рівноважною поведінкою фірми згідно з правилом Байєса.

1.5 Постановка задач дослідження

Використання ПІ з неповною інформацією дозволяє формалізувати задачу взаємодії підприємця та інвестора за умов асиметричної інформації. Це дає можливість дослідити вплив сигналів підприємця на рішення інвестора, визначити, за яких умов інвестор погоджується інвестувати, та які стратегії є оптимальними для обох сторін.

Метою кваліфікаційної роботи є проведення аналізу позиційних ігор з неповною інформацією на прикладі гри «фірма – інвестор» та знаходження рівноважних стратегій у термінах досконалої байєсівська рівновага. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі позиційних ігор;

– дослідити математичний апарат та моделі, що використовуються для опису позиційних ігор;

– проаналізувати основні методи та алгоритми знаходження оптимальних стратегій і рівноваги в позиційних іграх;

– побудувати відповідну сигнальну гру «фірма – інвестор» у розгорнутій формі;

– знайти профілі стратегій і вірувань (σ_F, σ_I, q), що утворюють досконалу байєсову рівновагу;

– описати умови, за яких реалізуються три типи рівноваг;

– визначити критичні значення параметрів (зокрема p_c), які розділяють області існування об’єднувальної та розділяючої рівноваги;

– обрати інструмент програмної розробки та розробити програмний продукт для автоматизації підрахунків та швидкого отримання результатів;

– провести економічну інтерпретацію отриманих результатів і зробити висновки щодо поведінки гравців.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Метод зворотної індукції

Розглянемо ігри із досконалою інформацією. Дуже важливим для практичного застосування динамічних ігор з досконалою інформацією є математичний результат, отриманий Куном.

Теорема Куна. Для кожної кінцевої гри із досконалою інформацією існує рівновага Неша в чистих стратегіях.

Ця теорема гарантує, що кожна динамічна (позиційна) гра має таке рішення, що кожному з гравців невигідно відхилятися від певної стратегії.

Для знаходження рівноваги Неша використовується метод зворотної індукції.

Розглянемо сукупність дій, які може виконати певний гравець, який знаходиться в заданій вершині дерева гри. Рішення, яке приймає гравець у цій вершині, не залежить від взаємодії з іншими гравцями (це справедливо тільки для гри із досконалою інформацією), і тому гравець може однозначно вибрати своє оптимальне рішення, а тепер, знаючи це рішення гравця, можемо розглянути ситуацію в «попередній» вершині (вже для іншого гравця). І так далі.

Очевидно, що такий розгляд повинен починатися «з кінця», від кінцевих (термінальних) вершин для заданої динамічної гри.

Для кожної конечної гри із досконалою інформацією існує рівновага Неша, яка може бути знайдена за допомогою методу зворотної індукції. Якщо до того ж жоден з гравців не має однакових виграшів у жодній термінальній вершині, то існує лише одна рівновага Неша, яка й знаходиться за допомогою цього метода [11].

Розглянемо наступну динамічну гру. Виграші сторін написані під відповідними термінальними вершинами: спочатку виграш гравця 1, під ним – виграш гравця 2, під ним – виграш гравця 3. Стратегії відповідають ребрам графа і позначені буквами $a,...,k$.

Біля кожної вершини показано, який саме гравець здійснює хід (рис. 2.1).

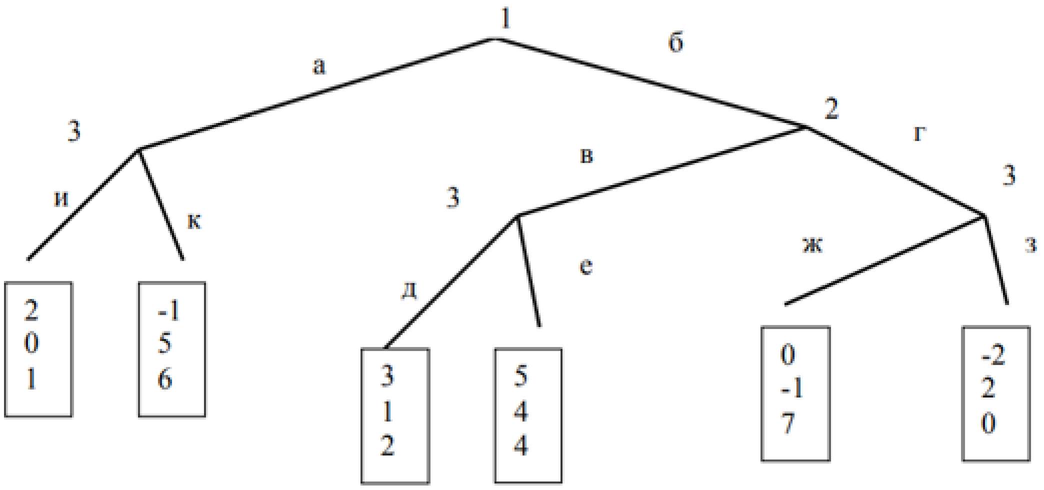


Рисунок 2.1 – Приклад позиційної гри

Для стратегії a гравця 1 гравець 2 не ходить. Використаємо метод зворотної індукції. Останнім ходить гравець 3 – тому й починаємо із нього: його виграші «перші знизу».

Найбільше значення виграшу гравця 3 для стратегії $г$ гравця 2 відповідає вибору стратегії $ж$ і дорівнює 7. А найбільше значення виграшу гравця 3 для стратегії $в$ гравця 2 відповідає вибору стратегії $е$ і дорівнює 4. Таким чином, гравець 3 не буде грати стратегій $д$ і $з$.

Чи можемо відкинути також і стратегії $и$ та $к$ для нього? Не можемо: для цих стратегій гравець 2 пропускає свій хід після гравця 1, і тому ми повинні зберегти для гравця 1 можливість здійснити хід.

Дійсно, якщо відкинемо стратегії $и$ та $к$, тим самим звузимо можливість рішень для гравця 1, але, відповідно до методу зворотної індукції, можна звузити множину стратегій лише для гравця 2.

Таким чином, отримуємо наступну редуковану («звужену») гру на рис. 2.2 для гравця 2, переносячи відповідні виграші до його вершин.

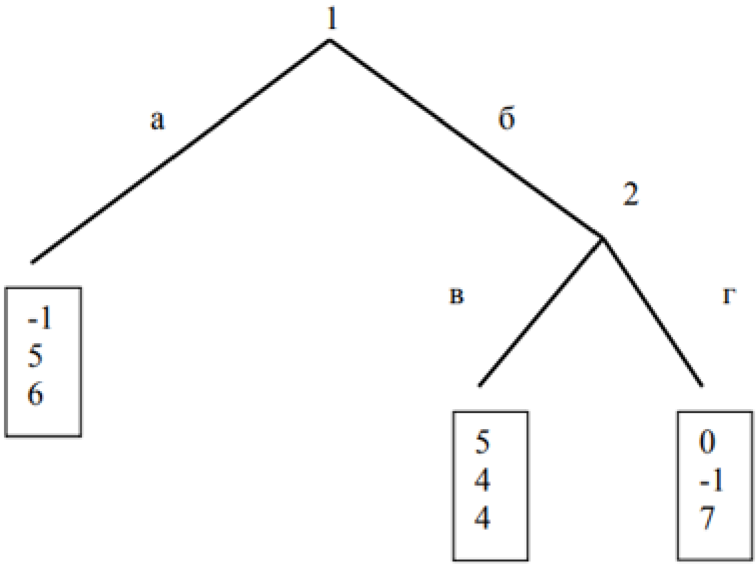


Рисунок 2.2 – Перша редукована гра (для гравця 2)

Тепер справа за гравцем 2. Він може вибирати між своїми стратегіями $в$ і $г$, порівнюючи другі знизу числа у стовпчику виграшів. Звичайно, гравець 2 вибере для гри стратегію $в$. Перенесемо виграш цього його вибору у вершину, позначену його номером і подивимось на гру на рис. 2.3.

Отже, гравець 1 буде вибирати між своїми стратегіями $а$ і $б$, порівнюючи перші числа в таблиці виграшів. Звичайно, вибере він стратегію $б$.

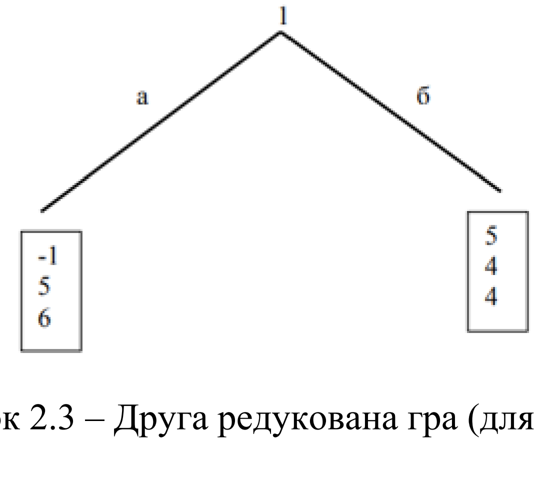


Рисунок 2.3 – Друга редукована гра (для гравця 1)

Таким чином, знайшли рівновагу Неша для цієї гри, яка полягає у виборі гравцями наступних стратегій: гравець 1 грає $б$, гравець 2 грає $в$, а гравець 3 грає $е$.

Але маємо декілька зауважень. У цій грі є ще дві рівноваги Неша: гравець 1 грає a, гравець 2 «не грає», а гравець 3 грає або u, або κ. Але ми можемо побачити, що в цих випадках гравець 1 виграє або 2, або -1, тоді як для знайденої методом зворотної індукції рівноваги Неша він буде вигравати 5. Звичайно, якщо ми вважаємо, гравець 1 є раціональним (тобто прагне максимізувати свій виграш), то він буде грати саме ту рівновагу Неша, яка знайдена методом зворотної індукції.

В практичних застосуваннях теорія ігор часто використовується як один із етапів при моделюванні. Тому іноді, за певних додаткових умов, внаслідок яких змінюється для певної сукупності гравців саме поняття «раціональність», в соціально-економічних системах можуть бути реалізовані не тільки ті рівноваги Неша, які знайдені методом зворотної індукції [12].

2.2 Метод досконалої байєсової рівноваги для сигнальних ігор

Розглянемо наступну гру.

Хуліган є гравцем R, прибулець – гравцем S. Хуліган має єдиний тип, у прибульця два типи: 1 (крутий, з ймовірністю p) і 2 (слабкий, з ймовірністю $1-p$). Базова гра складається з двох етапів: спочатку прибулець вирішує, який напій йому замовити – H (пиво) або L (кава), потім хуліган вирішує, битися з прибульцем чи ні (h або l). Виграш прибульця (незалежно від його типу) дорівнює 1, якщо йому вдалося уникнути бійки, і 0, якщо йому довелося битися. У той самий час, він несе витрати $c > 0$ у тому випадку, якщо йому доводиться пити неулюблений напій (кава для крутого і пиво для слабкого). Хуліган отримує виграш 1 у тому випадку, якщо він б'ється зі слабким або не б'ється з крутим, і виграш 0 у протилежному випадку. Дерево цієї гри зображено на рис. 2.4.

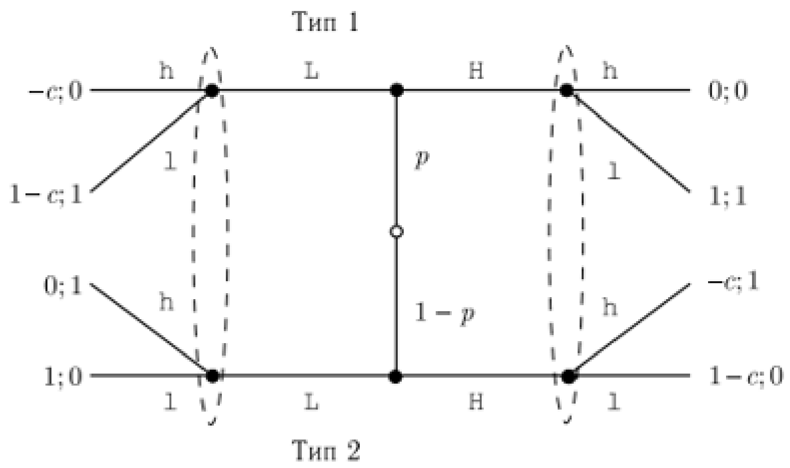


Рисунок 2.4 – Гра «пиво чи кава?»

Нехай $m(1)$, $m(2) \in \{H, L\}$ – ходи першого гравця залежно від його типу. Нехай $a(H)$, $a(L) \in \{h, l\}$ – ходи другого гравця залежно від того, яким був хід першого гравця. Знайдемо досконалу БР і випишемо умови, яким вона має відповідати.

Для знаходження рівноваги в цій грі ми повинні ввести віри μ_H, $\mu_L \in [0,1]$. Перша з цих двох величин – ймовірність, з якою прибулець має тип 1 у тому випадку, якщо він купив каву. Друга величина – ймовірність, з якою прибулець має тип 1 у тому випадку, якщо він купив пиво. Система вір є узгодженою зі стратегією гравця S, якщо вона задовольняє наступним умови:

а) $\mu_H = p$, $\mu_L \in [0,1]$, якщо $m(1) = H$, $m(2) = H$;

б) $\mu_H = 1$, $\mu_L = 0$, якщо $m(1) = H$, $m(2) = L$.

в) $\mu_H = 0$, $\mu_L = 1$, якщо $m(1) = L$, $m(2) = H$;

г) $\mu_H \in [0,1]$, $\mu_L = p$, якщо $m(1) = L$, $m(2) = L$.

Знайдемо, яким умовам задовольняє стратегія гравця R, якщо вона раціональна відносно системи вір (μ_H, μ_L). Очікуваний виграш хулігана в ІМ H – тобто якщо хід гравця S був H – при власному ході h дорівнює

$$E(u_R(\cdot, H, h)) = \mu_H \cdot u_R(1, H, h) + (1 - \mu_H) \cdot u_R(2, H, h) =$$
$$= \mu_H \cdot 0 + (1 - \mu_H) \cdot 1 = 1 - \mu_H, \qquad (2.1)$$

а при власному ході l буде

$$E(u_R(\cdot,H,l)) = \mu_H \cdot u_R(1,H,l) + (1-\mu_H)\cdot u_R(2,H,l) =$$
$$= \mu_H \cdot 1 + (1-\mu_H)\cdot 0 = \mu_H . \tag{2.2}$$

Аналогічно отримаємо виграші в ІМ L.

Отже, для $m \in \{H,L\}$

$$a(m) = \begin{cases} h, & \mu_m < 0,5 \\ \{h,1\}, & \mu_m = 0,5 \\ 1, & \mu_m > 0,5 \end{cases}. \tag{2.3}$$

Якою має бути стратегія гравця S залежно від стратегії гравця R? При $c<1$

$$(m(1),m(2)) = \begin{cases} (H,L), & a(H)=h, a(L)=h; \\ (L,L), & a(H)=h, a(L)=l; \\ (H,H), & a(H)=l, a(L)=h; \\ (H,L), & a(H)=l, a(L)=l. \end{cases} \tag{2.4}$$

При $c<1$ ми будемо мати $(m(1),\ m(2)) = (H,L)$ незалежно від $a(H)$ та $a(L)$. Рівновагою в цій грі є набір $(m^*(1), m^*(2), a^*(H), a^*(L), \mu_H^*, \mu_L^*)$, що задовольняє всі три перераховані вище умови. Число і тип рівноваг залежать від значення параметра c:

а) якщо c<1 і $p \geq 0,5$, то рівноваги дві:

$$m^*(1) = m^*(2) = H, a^*(H) = l, a^*(L) = h, \mu_H^* = p, \mu_L^* \in [0;0,5];$$
$$m^*(1) = m^*(2) = L, a^*(H) = h, a^*(L) = l, \mu_L^* = p, \mu_H^* \in [0;0,5];$$

б) якщо $c < 1$ і $p < 0,5$, то рівноваги в чистих стратегіях немає;

в) якщо $c > 1$, то рівновага в чистих стратегіях одна:

$$m^*(1) = H, m^*(2) = L, a^*(H) = l, a^*(L) = h, \mu_H^* = 1, \mu_L^* = 0 .$$

Тобто можливі два типи рівноваг. Перші дві рівноваги є змішаними, в яких гравці S різних типів обирають одну й ту саму дію. Тобто в нашій історії це означає, що і крутий, і слабкий замовлятимуть один і той самий напій. У якому випадку це можливо? По-перше, необхідно, щоб кількість крутих була достатньо великою $(p \geq 0,5)$. У такому випадку хуліган, дивлячись, що той, хто увійшов, замовляє «те саме, що й усі», остерігатиметься нападати, оскільки ймовірність нарватися на «крутого» буде надто великою. По-друге, необхідно, щоб витрати від вживання неулюбленого напою були нижчими, ніж витрати від бійки. Якщо обидва типи гравців замовляють один і той самий напій, то обов'язково вийде так, що для одного з них цей напій буде неулюбленим.

Другий тип рівноваг – розділяючи, в яких гравці S різних типів обирають різні дії. У нашому випадку така рівновага одна, в якій крутий обиратиме пиво, а слабак – каву. Така рівновага буде можливою, якщо витрати від вживання неулюбленого напою вищі, ніж витрати від бійки.

Що відбувається у тому випадку, якщо $c < 1$ і $p < 0,5$? Рівноваги в чистих стратегіях немає, однак згідно з теоремою має існувати досконала рівновага, яка обов'язково передбачатиме наявність хоча б у одного з гравців змішаних стратегій. Спробуємо знайти рівновагу в змішаних стратегіях у цій грі. Нехай $q_1, q_2 \in [0,1]$ – ймовірності, з якими гравець S обирає дію H у тому випадку, коли його тип дорівнює 1 або 2 відповідно. Якщо $pq_1 > 0$ або $(1-p)q_2 > 0$, то за правилом Байєса віра гравця R в ІМ H буде дорівнювати

$$\mu_H = \frac{pq_1}{pq_1 + (1-p)q_2} . \qquad (2.5)$$

Якщо $pq_1 = (1-p)q_2 = 0$, візьмемо будь-який $\mu_H \in [0,1]$. Аналогічно отримаємо

$$\mu_L = \frac{p(1-q_1)}{p(1-q_1)+(1-p)(1-q_2)}, \tag{2.6}$$

за умови того, що $p(1-q_1) > 0$ або $(1-p)(1-q_2) > 0$, і $\mu_L \in [0,1]$ у протилежному випадку. Нехай v_H, v_L – ймовірності, з якими гравець R обирає дію h в ІМ H і L відповідно. Знайдемо функцію реакції гравця R. Ця функція буде визначена відносно вір μ_H, μ_L:

$$v_H = \begin{cases} 1, & \mu_H < 0{,}5, \\ [0,1], & \mu_H = 0{,}5, \\ 0, & \mu_H > 0{,}5, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$v_L = \begin{cases} 1, & \mu_L < 0{,}5, \\ [0,1], & \mu_L = 0{,}5, \\ 0, & \mu_L > 0{,}5. \end{cases} \tag{2.8}$$

Очікуваний виграш гравця H залежно від його типу та дії, яку він обирає. При типі 1 і дії H маємо

$$E\big(u_S(1, H)\big) = 1 - v_H. \tag{2.9}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} E\big(u_S(2, H)\big) &= 1 - v_H - c, \\ E\big(u_S(1, L)\big) &= 1 - v_L - c, \\ E\big(u_S(2, L)\big) &= 1 - v_L. \end{aligned} \tag{2.10}$$

У рівновазі повинні мати

$$q_1 = \begin{cases} 1, & 1 - v_H > 1 - v_L - c, \\ [0,1], & 1 - v_H = 1 - v_L - c, \\ 0, & 1 - v_H < 1 - v_L - c. \end{cases} \tag{2.11}$$

$$q_2 = \begin{cases} 1, & 1 - v_H - c > 1 - v_L, \\ [0,1], & 1 - v_H - c = 1 - v_L, \\ 0, & 1 - v_H - c < 1 - v_L. \end{cases} \tag{2.12}$$

Рівновагою буде будь-який вектор $(q_1, q_2, v_H, v_L, \mu_H, \mu_L)$, що задовольняє умови (2.5) – (2.8), (2.11) і (2.12).

Подивимося, чи існує рівновага, в якій $q_2 \in (0,1)$.

У такій рівновазі ми повинні мати $q_1 = 1$ згідно з (2.11) і (2.12). Отже, ми маємо

$$\mu_H = \frac{p}{p + (1-p)q_2} \tag{2.13}$$

і $\mu_L = 0$. З (2.8) і (2.12) отримаємо, що $v_H = 1 - c$ і $v_L = 1$. З (2.7) випливає, що $\mu_H = 0{,}5$ і $q_2 = p/(1-p)$.

Якщо $p < 0{,}5$, то $q_2 < 1$, як ми і припускали.

Така рівновага називається гібридною – один тип гравця S грає чисту стратегію, інший – змішану.

2.3 Сигнальна модель Спенса на ринку праці

Майкл Спенс вперше запропонував модель “сигналів на ринку праці”. У ній роботодавець не знає справжньої продуктивності кандидата, однак, працівник подає “сигнал” про неї – переважно освіту. Розрізняльні пункти в новому підході полягають в тому, що освіта є характеристикою, а не причиною зростання продуктивності та її вартість є різною для “сильних” та “слабких”. Виходячи з цього, стає можливим відокремлення типів: високопродуктивним вигідно здобувати освіту, низькопродуктивним – ні.

Розглянемо таку гру.

У момент часу $t=0$ «природа» визначає тип працівника: високопродуктивний $\theta=\theta_H$ або низькопродуктивний $\theta=\theta_L$. Нехай p – ймовірність того, що $\theta=\theta_H$.

У момент часу $t=1$ працівник вирішує, скільки зусиль йому слід витратити на здобуття освіти. Нехай $e\geq 0$ – рівень освіти працівника. Ця величина є спостережуваною на відміну від θ, яка є приватною інформацією, і відома тільки самому працівнику.

У момент часу $t=2$ кожна з двох фірм пропонує працівнику контракт $w(e)$, що пов'язує заробітну плату з якістю здобутої освіти.

У момент часу $t=3$ працівник вирішує, пропозицію якої з двох фірм йому варто прийняти. Будемо вважати, що якщо обидві фірми запропонують йому рівні зарплати, то він обере пропозицію кожної з двох фірм з ймовірністю $1/2$.

Рівень зусиль e можна інтерпретувати як якість освіти, що здобувається працівником. У наш час усі закінчують середню школу; вакансії вимагають наявності вищої освіти, тривалість якої, як правило, стандартизована і становить від 4 до 6 років. Однак якість освіти може сильно відрізнятися від одного вишу до іншого і, як правило, тісно пов'язана з тим, наскільки легко студенту вчитися в цьому виші.

Складність навчальної програми, мотивація викладачів, лояльність викладачів та навчальної частини до студентів, готовність відраховувати неуспішних, нетерпимість по відношенню до списування – все це визначає, наскільки багато треба працювати заради того, щоб отримати заповітний диплом. А працювати не хочеться – адже той самий час можна витратити на клуби, кіно, гру в преферанс і покер, поїздки на море, і ще багато іншого. Але треба вчитися – не в останню чергу для того, щоб «зійти за розумного», тим більше, якщо роботодавцям відомо, в яких вишах вчитися важко, а в яких – ні.

Нехай виграш фірми, якщо вона взяла на роботу людину з продуктивністю θ на зарплату w, дорівнює

$$U = \theta - w. \tag{2.14}$$

Прибуток дорівнює нулю, якщо працівник не прийняв її пропозицію.

Будемо вважати, що виграш працівника дорівнює зарплаті мінус витрати на здобуття освіти:

$$u(w, e, \theta) = w - c(e, \theta), \tag{2.15}$$

де e – рівень освіти;

θ – тип працівника.

Зробимо два припущення щодо функції витрат $c(e, \theta)$.

По-перше, будемо вважати, що більш продуктивний працівник витрачає менше зусиль на здобуття даного рівня освіти: $c(e, \theta_L) > c(e, \theta_H)$ для всіх $e \geq 0$, причому $c(0, \theta_L) = c(0, \theta_H) = 0$.

По-друге, припустимо, що кожна додаткова одиниця освіти є більш витратною для менш продуктивного працівника: $c_e(e, \theta_L) > c_e(e, \theta_H)$ для всіх $e \geq 0$.

З останньої властивості випливає, що в системі координат $e - w$ криві байдужості працівників двох типів не будуть перетинатися більше одного разу, тобто якщо для якихось (w, e) маємо $u(w, e, \theta_L) = u(w, e, \theta_H)$, то ні для яких інших (w', e') ми не можемо мати $u(w', e', \theta_L) = u(w', e', \theta_H)$.

Будемо говорити, що функції виграшу задовольняють властивість одноразового перетину (рис. 2.5).

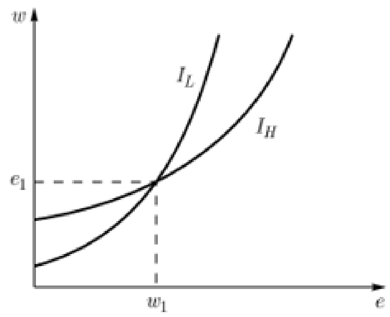


Рисунок 2.5 – Властивість одноразового перетину кривих байдужості

На даному рисунку показані I_H та I_L – криві байдужості продуктивного і непродуктивного працівників, що відповідають рівням виграшу $\pi_H = u(w_1, e_1, \theta_H)$ і $\pi_L = u(w_1, e_1, \theta_L)$. Для знаходження БР в цій грі нам необхідно знати:

а) e_H, e_L – рівні освіти, обрані працівниками з продуктивністю θ_H і θ_L;

б) $\mu(e) = \mu(\theta = \theta_H \mid e)$ – віру кожної з фірм при даному e;

в) $w_1(e), w_2(e)$ – яку зарплату кожна фірма запропонує залежно від рівня освіти.

Нехай у момент часу $t = 1$ рівень освіти працівника становить e. Покажемо, що в рівновазі в $t = 2$ ми повинні мати

$$w_1(e) = w_2(e) = \mu(e)\theta_H + (1 - \mu(e))\theta_L. \tag{2.16}$$

Для початку переконаємося, що цей рівень зарплат є рівноважним. Виграш кожної фірми дорівнює нулю. Нехай одна з двох фірм запропонувала зарплату $w' > \mu(e)\theta_H + (1 - \mu(e))\theta_L$. Тоді в момент часу $t = 3$ працівник прийме пропозицію цієї фірми, а її очікуваний виграш складе

$$u' = \mu(e)\theta_H + (1 - \mu(e))\theta_L - w' < 0.$$

Якщо ж фірма пропонує $w' < \mu(e)\theta_H + (1 - \mu(e))\theta_L$, то працівник не стане приймати її пропозицію, тож виграш цієї фірми буде дорівнювати нулю.

Далі покажемо, що рівноваг з іншими зарплатами не існує. У рівновазі ми не можемо мати $w_1 \le w_2$ при $w_2 > \mu(e)\theta_H + (1-\mu(e))\theta_L$, оскільки фірма 2 отримає від'ємний виграш (вона завжди може забезпечити собі нульовий виграш, обравши w_2 згідно з (2.16)). Отже, без втрати загальності ми маємо

$$w_1 \le w_2 \le \mu(e)\theta_H + (1-\mu(e))\theta_L.$$

Але якщо $w_1 < w_2$, то фірма 2 може збільшити свій виграш, запропонувавши зарплату $(w_1 + w_2)/2$. Також неможливо, щоб

$$w_1 = w_2 < \mu(e)\theta_H + (1-\mu(e))\theta_L,$$

у такому випадку фірма 1 може збільшити виграш, запропонувавши, наприклад, зарплату $w_1' = 0{,}1w_2 + 0{,}9(\mu(e)\theta_H + (1-\mu(e))\theta_L)$.

Розглянемо спочатку розподільну рівновагу, в якій $e_H \ne e_L$. Оскільки віра $\mu(e)$ повинна знаходитися згідно з правилом Баєса, ми повинні мати $\mu(e_H) = 1$ і $\mu(e_L) = 0$. Це дозволяє нам встановити істинність першої частини наступного твердження.

Твердження 2.1. У розподільній рівновазі ми маємо наступні чисті стратегії:

а) $w_L = w(e_L) = \theta_L$ і $w_H = w(e_H) = \theta_H$;

б) $e_L = 0$.

Друга частина твердження випливає з того, що якщо $e_L > 0$, то при будь-якому $\mu(0)$ працівник може збільшити свій виграш, взявши $e_L' = 0$:

$$u(w(e_L), e_L, \theta_L) = \theta_L - c(e_L, \theta_L) < \mu(0)\theta_H + (1-\mu(0))\theta_L - c(0, \theta_L), \qquad (2.17)$$

оскільки c спадає по e.

Чому дорівнює рівень освіти продуктивного працівника e_H? Він повинен відповідати двом умовам. По-перше, він не повинен бути занадто низьким, інакше низькопродуктивний працівник також захоче обрати рівень освіти e_H для того, щоб отримати зарплату θ_H, тобто має виконуватися наступна нерівність:

$$\theta_L - c(0,\theta_L) \geq \theta_H - c(e_H,\theta_L). \tag{2.18}$$

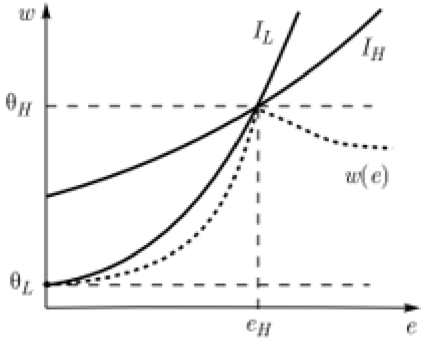
По-друге, e_H не повинен бути занадто високим, інакше високопродуктивний працівник дасть перевагу рівню освіти $e_L = 0$ і зарплаті θ_L. Це означає, що ми повинні мати

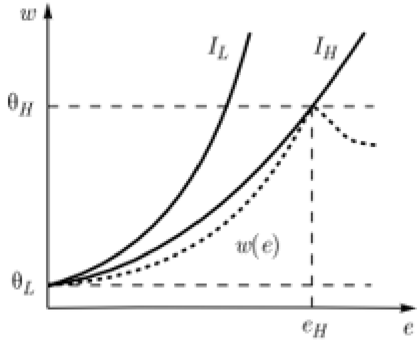
$$\theta_H - c(e_H,\theta_H) \geq \theta_L - c(0,\theta_H). \tag{2.19}$$

Для того щоб визначити рівновагу, нам залишилося обрати функцію віри $\mu(e)$. За правилом Байєса ми повинні мати $\mu(e_L) = 0$, $\mu(e_H) = 1$. Нам залишилося визначити, як повинна виглядати функція $\mu(e)$ для $e \neq 0$, $e \neq 1$, тобто поза траєкторією гри. Для того щоб $e_L = 0$ і e_H були рівноважними стратегіями, нам необхідно, щоб вони максимізували функції виграшів працівника з продуктивністю θ_L і θ_H за умови, що фірми встановлюють зарплату згідно з (2.16), тобто для всіх $e \geq 0$ значення $\mu(e)$ повинно задовольняти умовам

$$\begin{aligned} \mu(e)\theta_H + (1-\mu(e))\theta_L - c(e,\theta_L) &\leq \theta_L - c(0,\theta_L), \\ \mu(e)\theta_H + (1-\mu(e))\theta_L - c(e,\theta_H) &\leq \theta_H - c(e_H,\theta_H). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Графічно весь діапазон можливих рішень нашої задачі представлений на рис. 2.6.





а) Найменший можливий e_H б) Найбільший можливий e_H

Рисунок 2.6 – Розподільні рівноваги в сигнальній грі на ринку праці

На рис. 2.6 (а) нерівність (2.18) виконується зі знаком рівності. На рис. 2.6 (б) зі знаком рівності виконується нерівність (2.19). В обох випадках нас влаштовує будь-яка віра $\mu(e)$, така, що графік функції $w(e)$ цілком лежить нижче кривих байдужості I_H та I_L. У змішаній рівновазі працівники обох типів виберуть один і той самий рівень освіти e^*. Заробітна плата в рівновазі буде дорівнювати

$$w^* = w(e^*) = p\theta_H + (1-p)\theta_L, \tag{2.21}$$

де p – частка високопродуктивних працівників.

Зауважимо, що при знаходженні розподільної рівноваги величина p нами не використовувалася: якщо e_H задовольняв умови (2.18), (2.19), то для будь-якого $p \in (0,1)$ існувала функція віри, яка давала нам розподільну рівновагу (наприклад, якщо $\mu(e) = 0$ при $e < e_H$ і $\mu = 1$ при $e \geq e_H$).

Яким умовам повинен задовольняти рівень освіти e^*? Необхідно, щоб низькопродуктивний працівник погодився б на зарплату w^* і рівень освіти e^* за можливості отримати будь-який інший рівень освіти e і рівноважну зарплату (2.16), що відповідає цьому e.

Ми повинні мати

$$w^* - c(e^*, \theta_L) \geq \mu(e)\theta_H + (1 - \mu(e))\theta_L - c(e, \theta_L) \qquad (2.22)$$

для всіх e.

Аналогічна умова

$$w^* - c(e^*, \theta_H) \geq \mu(e)\theta_H + (1 - \mu(e))\theta_L - c(e, \theta_H) \qquad (2.23)$$

повинна виконуватися для продуктивного працівника.

Мінімальний можливий рівень освіти у змішаній рівновазі – нульовий. Дійсно, візьмемо, наприклад, таку функцію віри:

$$\mu(e) = p, \qquad (2.24)$$

тобто коли рівень освіти не дає роботодавцю жодної інформації щодо якості працівника.

При такій вірі працівники обох типів виберуть $e_L = e_H = 0$. Таким чином, $\mu(0)$ буде відповідати правилу Байєса.

Який максимально можливий рівень освіти у змішаній рівновазі? Припустимо, що $\mu(e) = 0$ при $e < e^*$. Тоді умова (2.22) буде виконуватися, якщо

$$w^* - c(e^*, \theta_L) \geq \theta_L - c(0, \theta_L). \qquad (2.25)$$

На рис. 2.7 показано змішаній рівновагу для $e = \overline{e}$ – максимально можливого рівня освіти у змішаній рівновазі.

При більшому значенні e змішана рівновага неможлива, оскільки низькопродуктивний працівник дасть перевагу вибору рівня освіти $e_L = 0$ при заробітній платі θ_L.

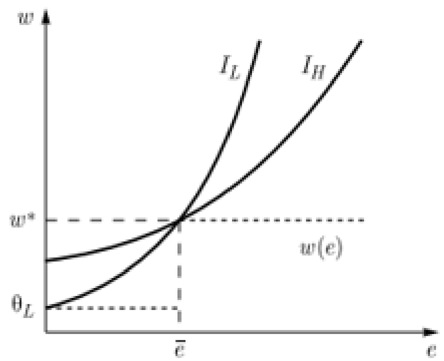


Рисунок 2.7 – Змішана рівновага з максимальним $e = \bar{e}$

Висновки за розділом 2

У другому розділі обґрунтовано вибір математичного інструментарію дослідження, зокрема доведено необхідність застосування концепції досконалої БР для розв’язання ігор з неповною інформацією, що дозволяє формалізувати механізм прийняття рішень через послідовне оновлення вірувань гравців та визначення оптимальних стратегій у сигнальних моделях.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп’ютерної алгебри Mathematica 12.0

Для програмної реалізації завдань у кваліфікаційній роботі було обрано систему комп’ютерної алгебри Wolfram Mathematica 12.0.

Це інтегроване програмне середовище є одним із найпотужніших сучасних засобів для виконання складних математичних обчислень, моделювання, аналізу даних та візуалізації результатів.

Система базується на мові програмування надвисокого рівня Wolfram Language, яка підтримує багатопарадигмальне програмування, поєднуючи функціональний, процедурний та об’єктно-орієнтований підходи.

На відміну від багатьох інших математичних пакетів, орієнтованих переважно на чисельні методи (наприклад, MATLAB), Mathematica дозволяє проводити перетворення над аналітичними виразами. Це важливо для знаходження розв’язків ігор у загальному вигляді, спрощення систем рівнянь та нерівностей, що виникають при пошуку БР.

Версія 12.0 містить оптимізовані алгоритми для розв’язання систем лінійних та нелінійних рівнянь (функції Solve, NSolve, Reduce), що необхідно для визначення змішаних стратегій та перевірки умов сумісності вірувань гравців.Так як ігри часто задаються у НФ за допомогою платіжних матриць, вбудовані функції лінійної алгебри дозволяють ефективно виконувати операції над ними, знаходити власні числа та вектори.

Середовище дозволяє поєднувати в одному документі виконуваний програмний код, форматований текст, формули та графіки. Це дає змогу оформлювати результати моделювання у вигляді структурованого звіту безпосередньо в процесі дослідження.

Засоби графічного відображення (функції Plot, Plot3D, RegionPlot) дозволяють наочно представити області рішень, залежності виграшів від параметрів моделі та структуру рівноважних станів.

3.2 Алгоритм розв’язання задачі математичного моделювання сигнальної гри «фірма – інвестор»

На вхід алгоритму подаються екзогенні змінні, що описують ринкові умови та характеристики проєкту. За умовою задачі, у нас є два типи фірм:

– L – поточна прибутковість «поганої» фірми;

– H – поточна прибутковість «хорошої» фірми ($H > L$).

Інвестиційний проєкт складається з обсягу необхідних інвестицій (I) та прибутку від реалізації нового проєкту (R).

На ринку присутня безризикова (альтернативна) ставка дохідності інвестора (r) та апріорна ймовірність (p) того, що фірма належить до типу L (інформаційна асиметрія).

Фірма погодиться віддати частку s свого капіталу лише тоді, коли прибуток з інвестицією (за вирахуванням частки інвестора) буде не меншим, ніж прибуток без інвестиції:

$$(1-s)(\pi+R)\geq\pi, \tag{3.1}$$

де $\pi\in\{L,H\}$.

Звідси виводимо максимально допустиму частку для кожного типу фірми:

– для типу L: $s_{max}^{H}=\dfrac{R}{H+R}$;

– для типу H: $s_{max}^{L}=\dfrac{R}{L+R}$.

Оскільки $H>L$, то $s_{max}^{H}<s_{max}^{L}$. Тобто «хороша» фірма менш схильна віддавати велику частку, ніж «погана».

Інвестор погодиться на угоду, якщо його очікуваний дохід покриває інвестиції з урахуванням альтернативної вартості грошей:

$$s\cdot\mathbb{E}[\text{Вартість фірми}]\geq I(1+r). \tag{3.2}$$

Вводимо змінну $q \in [0,1]$ – апостеріорна віра (belief) інвестора в те, що фірма є типу L (низькоприбуткова). Тоді очікувана вартість фірми для інвестора дорівнює:

$$V(q) = q(L+R) + (1-q)(H+R). \tag{3.3}$$

Мінімальна частка $s(q)$, яку вимагатиме інвестор при рівні довіри q, визначається рівнянням беззбитковості:

$$s(q) = \frac{I(1+r)}{qL + (1-q)H + R}. \tag{3.4}$$

Це і буде графік функції, яку ми реалізуємо у коді Wolfram Mathematica.

Алгоритм перевіряє два типи байєсових рівноваг: об'єднуючу (pooling) та розділяючу (separating).

В об'єднуючій рівновазі обидва типи фірм пропонують однакову частку s^*, і інвестор не оновлює свої очікування ($q = p$).

Обчислюємо вимогу інвестора при апріорній ймовірності p за наступною формулою:

$$s_{req} = s(p) = \frac{I(1+r)}{pL + (1-p)H + R}. \tag{3.5}$$

Щоб рівновага існувала, «хороша» фірма повинна погодитися на цю частку. Перевіряємо наступну умову:

$$s_{req} \le s_{max}^{H} \quad \Rightarrow \quad \frac{I(1+r)}{pL + (1-p)H + R} \le \frac{R}{H+R}: \tag{3.6}$$

– якщо істина, то існує об'єднуюча рівновага, обидві фірми пропонують $s^* = s_{req}$ (або будь-яке s в інтервалі $[s_{req}, s_{max}^H]$), угода укладається;

– якщо хибність, то об'єднуюча рівновага неможлива (ринок «сиплеться» для H-типу).

Переходимо до пошуку розділяючої рівноваги.

Якщо умова (3.5), (3.6) не виконується, «хороша» фірма (H) виходить з ринку, оскільки інвестор вимагає занадто високу частку (через ризик натрапити на L).

Оскільки H-тип не інвестує, інвестор розуміє, що якщо йому пропонують угоду, це точно L-тип. Тобто $q = 1$ (віра інвестора).

Розрахуємо частки для L-типу. Підставляємо $q = 1$ у формулу інвестора і отримаємо:

$$s_{sep} = s(1) = \frac{I(1+r)}{L+R}. \tag{3.7}$$

Після цього, перевіримо допустимості для L-типу. Перевіряємо, чи вигідна ця угода самій L-фірмі:

$$s_{sep} \le s_{max}^L \quad \Rightarrow \quad \frac{I(1+r)}{L+R} \le \frac{R}{L+R}. \tag{3.8}$$

Спрощуємо це до вигляду $I(1+r) \le R$ (інвестиція має бути окупною для L-типу):

– якщо істина, то існує розділяюча рівновага, фірма L отримує інвестиції за ціною s_{sep}, фірма H відмовляється від інвестицій.

– якщо хибність, то ринок колапсує повністю (Market Breakdown), тобто жодна фірма не отримує фінансування.

Робимо графічну інтерпретацію та вихідні данні.

Алгоритм будує на одній координатній площині (q, s).

1. Криву байдужості інвестора: функція $s(q)$ (від $q = 0$ до $q = 1$).

2. Обмеження фірми H : горизонтальна лінія $y = s_{max}^{H}$.

3. Обмеження фірми L : горизонтальна лінія $y = s_{max}^{L}$.

4. Точку поточного стану ринку: точка на кривій інвестора з абсцисою $q = p$.

Після реалізації цієї функції, ми можемо проаналізувати отримані результати та зробити наступні висновки:

– якщо точка $(p, s(p))$ лежить нижче лінії s_{max}^{H}, то ми отримали об'єднуючу рівновагу (всі отримують кошти);

– якщо точка $(p, s(p))$ лежить вище лінії s_{max}^{H}, але точка $(1, s(1))$ лежить нижче лінії s_{max}^{L}, то ми отримали розділяючу рівновагу (тільки L отримує кошти);

– в іншому випадку інвестицій немає.

Результатом роботи алгоритму є визначення, чи відбудеться інвестування, за якою ціною (частка s) та які типи фірм візьмуть у ньому участь, залежно від довіри інвестора p.

3.3 Опис програми

Програма написана мовою Wolfram Language і складається з трьох логічних блоків: очищення пам'яті, визначення основної розрахункової функції та виклик цієї функції з конкретними параметрами.

Код починається з команди ClearAll["GlobalA`*"], ця команда повністю очищує контекст GlobalA. Вона видаляє всі раніше створені змінні, визначення функцій та збережені дані. Команда гарантує, що при повторному запуску програми старі значення (наприклад, попередні значення L чи p) не вплинуть на нові розрахунки.

Основне ядро програми – showplot, ця функція об'єднує математичну модель та графічну побудову:

showplot[L, H, p, II, R, r] := Module[{}, ...].

Функція приймає масив даних та зберігає числові змінні параметрів.

Module[{...}] використовується для створення локальних змінних. Це означає, що ці змінні існують тільки всередині цієї функції і зникають після завершення розрахунків, не засмічуючи пам'ять.

У коді прописані формули умови раціональності фірм:

– (II(1 + r)) / (H + R) максимальна частка, яку може віддати "хороша" фірма;

– (II(1 + r)) / (L + R) максимальна частка для "поганої" фірми.

Ці значення використовуються для малювання горизонтальних ліній-обмежень.

Це рівняння кривої байдужості інвестора задається наступним чином:

(II * (1 + r)) / (q * L + (1 - q) * H + R).

Змінна q тут є символьною змінною (аргументом для майбутнього графіка), що позначає віру інвестора.

Результатом роботи функції є об'єкт Show, який накладає один на одного декілька графіків.

1. Plot будує криву (вимоги інвестора) у діапазоні q від 0 до 1.

2. Line малює нескінченну горизонтальну лінію обмеження хорошої фірми. Її візуалізовано як пунктирна лінія (Dashed).

3. Line малює лінію обмеження поганої фірми.

4. Point ставить точку при $q = 1$. Це точка потенційної розділяючої рівноваги (якщо ринок "схлопнеться" до одних лише L-фірм).

Встановлює межі графіка від 0 до 1 для обох осей (ймовірність і частка), за що відповідає функція PlotRange та іменуємо ці осі як віра інвестора q та частка капіталу s за допомогою функції AxesLabel.

В кінці коду відбувається виклик написаної функції з конкретними числами, воно має наступний вигляд:

showplot[{1,4,1,3,0.8,0.2}],
showplot[{1,2,2,3,0.3,0.3}],
showplot[{1,2,2,3,0.9,0.3}].

Програмна реалізація виконана у вигляді функціонального скрипта. Основна процедура showplot інкапсулює логіку моделі, виконуючи аналітичний розрахунок умов участі для обох типів фірм та інвестора. Візуалізація результатів здійснюється шляхом комбінування графіків функцій та геометричних примітивів (ліній, точок) через метод Show. Програма дозволяє отримати точний графічний розв'язок задачі для будь-якого набору вхідних параметрів.

Висновки за розділом 3

У третьому розділі за допомогою середовища Wolfram Mathematica здійснено програмну реалізацію та візуалізацію ігрової моделі «фірма – інвестор», що дало змогу автоматизувати аналіз впливу параметрів на стратегії учасників та графічно визначити умови переходу від об’єднуючої до розділяючої рівноваги в залежності від рівня інформаційної асиметрії на ринку.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Обчислювальний експеримент для сигнальної гри «фірма – інвестор», коли об’єднувальна рівновага при високій ймовірності L-типу

Згадаємо постановку нашої задачі.

У задачі розглядається взаємодія фірми та інвестора в умовах інформаційної асиметрії. Фірма має проєкт, для запуску якого потрібні інвестиції обсягом I. Реалізація проєкту приносить додатковий дохід R, який ділиться між фірмою та інвестором залежно від запропонованої частки s.

Фірма може бути двох типів.

1. L-тип – низька прибутковість L.

2. H-тип – висока прибутковість H, де $H > L$.

Справжній тип фірми є їй відомою приватною інформацією. Інвестор її не знає, а лише вірить, що фірма є L-типу з ймовірністю p і H-типу – з ймовірністю $1-p$.

Розглянемо перший сценарій обчислювального експерименту, у якому на ринку висока ймовірність того, що фірма є низькоприбутковою (L-типу), але, попри це, зберігається об’єднувальна рівновага.

Задаємо конкретні значення параметрів моделі:

$$L = 1, H = 4, I = 1, R = 3, r = 0.2, p = 0.8,$$

де L та H – поточні прибутки «поганої» та «хорошої» фірми відповідно;

I – обсяг необхідних інвестицій;

R – додатковий виграш від реалізації проєкту;

r – альтернативна норма прибутку інвестора;

p – апріорна ймовірність того, що фірма є L-типу.

Привабливість проєкту для фірми задається нерівністю (4.1), яка гарантує, що додатковий виграш від реалізації проєкту достатній для покриття витрат на інвестиції з урахуванням альтернативної вартості грошей інвестора. У нашому випадку:

$$R \geq I(1+r), \tag{4.1}$$

$$I(1+r) = 1 \cdot (1+0.2) = 1.2,$$

$$R = 3,$$

$$R \geq I(1+r) \Leftrightarrow 3 \geq 1.2.$$

Проєкт є загалом привабливим як для L - типу, так і для H -типу фірми.

Далі використаємо умову індивідуальної раціональності фірми (4.2). Фірма типу $\theta \in \{L, H\}$ погодиться віддати частку s лише тоді, коли її прибуток з інвестицією не менший за прибуток без інвестиції

$$(\theta + R)(1-s) \geq \theta. \tag{4.2}$$

Звідси отримуємо максимально допустиму частку для кожного типу:

$$s_{\theta}^{\max} = \frac{R}{\theta + R}.$$

Для обраних параметрів:

$$s_L^{\max} = \frac{R}{L+R} = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4} = 0.75,$$

$$s_H^{\max} = \frac{R}{H+R} = \frac{3}{4+3} = \frac{3}{7} \approx 0.4286.$$

Оскільки $H > L$, то $s_H^{\max} < s_L^{\max}$, тобто «хороша» фірма менш схильна віддавати велику частку капіталу.

Очікувана вартість фірми для інвестора за рівня переконання q (ймовірність, що фірма є L-типу) дорівнює:

$$EV(q) = q(L+R) + (1-q)(H+R) = qL + (1-q)H + R\,.$$

Мінімальна частка $s(q)$, яку вимагатиме інвестор при вірі q, визначається рівнянням беззбитковості:

$$s(q)\cdot EV(q) = I(1+r) \Rightarrow s(q) = \frac{I(1+r)}{qL+(1-q)H+R}\,. \tag{4.3}$$

Підставляючи наші значення, отримуємо:

$$I(1+r) = 1.2\,,$$
$$qL + (1-q)H + R = q\cdot 1 + (1-q)\cdot 4 + 3.$$

При апріорній вірі інвестора $q = p = 0.8$:

$$qL + (1-q)H + R = 0.8\cdot 1 + 0.2\cdot 4 + 3 = 0.8 + 0.8 + 3 = 4.6\,,$$
$$s(p) = \frac{1.2}{4.6} \approx 0.2609\,.$$

Отже, навіть за досить високої ймовірності L-типу ($p = 0.8$) інвестор, щоб покрити свої витрати з урахуванням альтернативної ставки r, вимагає приблизно 26.1% частки в капіталі фірми.

Частка, яку вимагає інвестор при апріорній вірі p, не повинна перевищувати максимально допустиму частку для H-типу:

$$s(p) \le s_H^{\max}\,. \tag{4.4}$$

У нашому прикладі:

$$s(p) \approx 0.2609,$$

$$s_H^{\max} \approx 0.4286,$$

$$0.2609 \le 0.4286.$$

Отже умова (4.4) виконується, і «хороша» фірма погоджується на ту ж частку, яку інвестор вимагає при вірі $p = 0.8$. Це означає, що обидва типи фірм можуть пропонувати одну й ту саму частку $s(p)$, а інвестор не має підстав змінювати своє переконання – виникає об'єднувальна рівновага.

Якщо виконується сильніша умова

$$\frac{I(1+r)}{L+R} \le \frac{R}{H+R},$$

то об'єднувальна рівновага існує для будь-якого значення $p \in [0,1]$.

Перевіримо її для обраних параметрів:

$$\frac{I(1+r)}{L+R} = \frac{1.2}{1+3} = \frac{1.2}{4} = 0.3,$$

$$\frac{R}{H+R} = \frac{3}{4+3} = \frac{3}{7} \approx 0.4286.$$

Оскільки

$$0.3 \le 0.4286,$$

маємо саме той випадок, що не руйнується навіть при зростанні недовіри інвестора. Отже, наш набір параметрів демонструє ситуацію, коли висока ймовірність L-типу ($(p = 0.8)$) все ще сумісна з об'єднуючою рівновагою.

У програмній реалізації (функція showplot) ці параметри задаються як вхідний вектор $\{L, H, I, R, p, r\} = \{1, 4, 1, 3, 0.8, 0.2\}$ (рис. 4.1). Функція будує: криву вимог інвестора $s(q)$, горизонтальні лінії, що відповідають граничним значенням для L-типу та H-типу, а також точку, що відображає поточний стан ринку при $q = p$.

Якщо точка $(p, s(p))$ лежить нижче обмеження H-типу, отримуємо об'єднувальну рівновагу. Якщо вона лежить вище обмеження H-типу, але нижче обмеження L-типу – виникає розділяюча рівновага. В іншому випадку інвестицій немає (рис. 4.1).

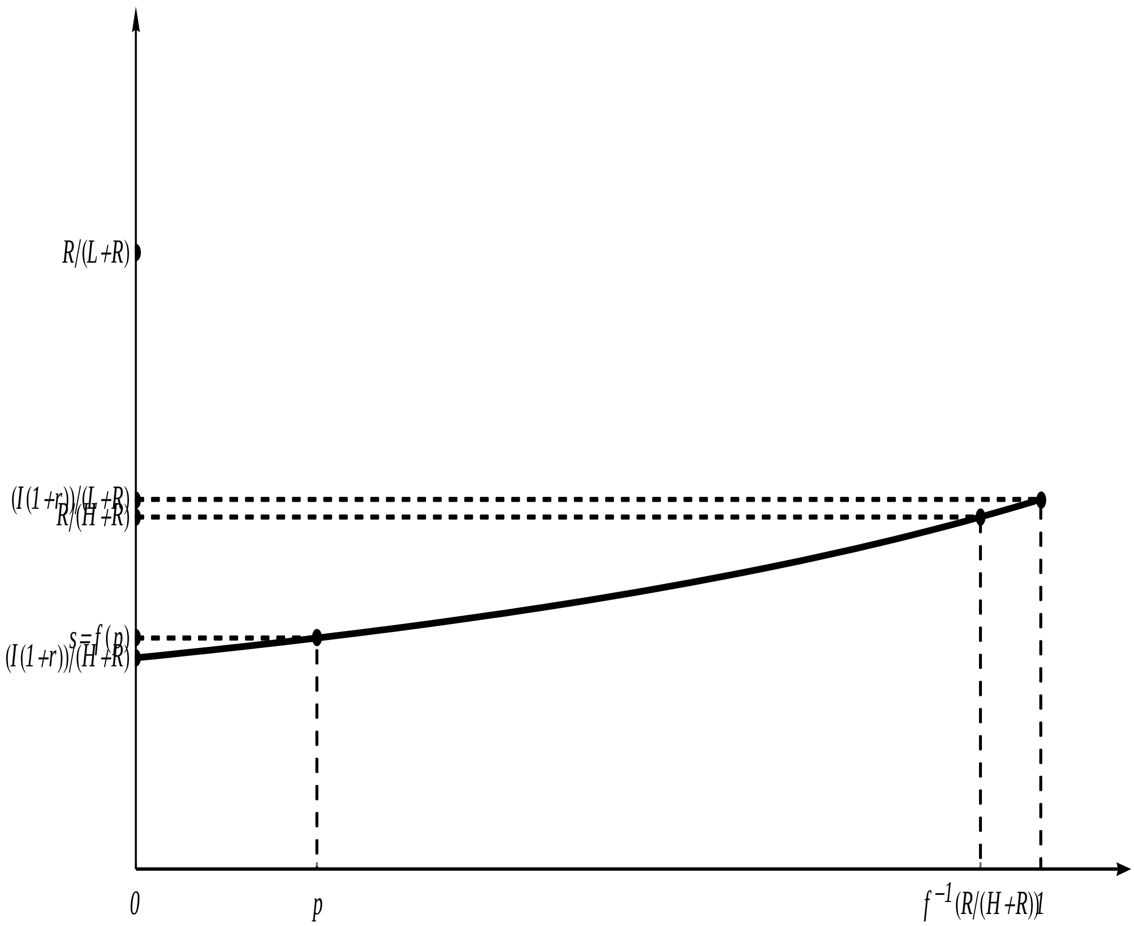


Рисунок 4.1 – Об'єднувальна рівновага при високій ймовірності L-типу

У нашому прикладі точка $(0.8; 0.2609)$ знаходиться нижче горизонталі, що відповідає $s_H^{\max}$, тому класифікуємо цей випадок як об'єднувальну рівновагу.

За обраних параметрів обидва типи фірм пропонують інвестору одну й ту саму частку

$$s^* = s(p) \approx 0.2609.$$

Інвестор приймає цю пропозицію, оскільки при вірі $p = 0.8$ очікувана вартість його частки дорівнює витратам $I(1+r)$, тобто інвестор перебуває «на нулі» в очікуваному сенсі.

Фірми при цьому отримують додатковий виграш порівняно з ситуацією без інвестицій:

– для L-типу: $\pi_L^{інв} = (L+R)(1-s^*) \approx 4 \cdot 0.7391 \approx 2.96 > L = 1$;

– для H-типу: $\pi_H^{інв} = (H+R)(1-s^*) \approx 7 \cdot 0.7391 \approx 5.17 > H = 4$.

Отже, при високій ймовірності того, що фірма є низькоприбутковою, ринок все ще функціонує в режимі об’єднувальної рівноваги, інвестор не розрізняє типи фірм і пропонує однакові умови, а інвестиції отримують і L-тип, і H-тип.

4.2 Обчислювальний експеримент для сигнальної гри «фірма – інвестор», коли об’єднувальна рівновага при малій ймовірності L-типу

Розглянемо другий сценарій обчислювального експерименту. Об’єднувальна рівновага існує не для всіх значень ймовірності L-типу, а лише за достатньо малого рівня недовіри інвестора. Якщо $\dfrac{I(1+r)}{L+R} > \dfrac{R}{H+R}$, але переконання інвестора про L-тип є достатньо малим, то рівновага все ще об’єднувальна.

Задаємо параметри:

$$L = 1, H = 2, I = 2, R = 3, r = 0.3, p = 0.3.$$

Спершу перевіримо, що проєкт загалом є вигідним. Привабливість задається нерівністю

$$R \geq I(1+r).$$

У нашому випадку:

$$I(1+r) = 2 \cdot (1+0.3) = 2.6,$$
$$R = 3,$$
$$3 \geq 2.6,$$

тобто інвестиція загалом є виграшною як для L-типу, так і для H-типу.

Фірма типу θ погодиться на частку s, якщо її прибуток з інвестицією не менший за θ:

$$(\theta + R)(1-s) \geq \theta.$$

Звідси:

$$s_\theta^{\max} = \frac{R}{\theta + R}.$$

Тоді для наших параметрів:

$$s_L^{\max} = \frac{R}{L+R} = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4} = 0.75,$$
$$s_H^{\max} = \frac{R}{H+R} = \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

Фірма H -типу має суворіше обмеження:

$$s_H^{\max} < s_L^{\max} .$$

Тобто H -тип менш схильний віддавати велику частку власності, бо його бізнес і без того більш прибутковий.

Очікувана вартість фірми з точки зору інвестора при вірі q (ймовірність L -типу) має вигляд

$$EV(q) = q(L + R) + (1 - q)(H + R) .$$

Мінімальна частка, яку інвестор вимагатиме при цій вірі, дорівнює:

$$s(q) = \frac{I(1+r)}{q(L+R) + (1-q)(H+R)} .$$

Тепер виконується протилежна до попереднього прикладу нерівність

$$\frac{I(1+r)}{L+R} > \frac{R}{H+R} .$$

При великих переконаннях p об’єднувальна рівновага руйнується, але при малих – може зберігатись.

Порахуємо обидві частини:

$$\frac{I(1+r)}{L+R} = \frac{2.6}{1+3} = \frac{2.6}{4} = 0.65 ,$$

$$\frac{R}{H+R} = \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5} = 0.6 .$$

Отже,

$$0.65 > 0.6.$$

За достатньо великої недовіри H-тип уже не зможе брати участь у об’єднуючій рівновазі. Але нам потрібен приклад, коли при малій ймовірності L-типу вона ще існує – саме для цього ми беремо $p = 0.3$.

Припустимо, що інвестор керується апріорною вірою $q = p = 0.3$. Підставляємо в $s(q)$:

$$q(L+R)+(1-q)(H+R) = 0.3\cdot(1+3)+0.7\cdot(2+3) =$$
$$= 0.3\cdot 4 + 0.7\cdot 5 = 1.2 + 3.5 = 4.7,$$
$$s(p) = \frac{I(1+r)}{4.7} = \frac{2.6}{4.7} \approx 0.553.$$

Порівняємо це значення з обмеженнями фірм:

– для H-типу: $s(p) \approx 0.553 < s_H^{\max} = 0.6$;

– для L-типу: $s(p) \approx 0.553 < s_L^{\max} = 0.75$.

Тобто обидва типи можуть без збитків запропонувати інвестору частку $s(p)$. Умови (4.1) для L-типу і H-типу виконуються, а умова (4.4) для об’єднувальної рівноваги:

$$s(p) \le s_H^{\max}$$

у нашому випадку істинна.

Отже, при малій ймовірності $p = 0.3$ існує об’єднувальна рівновага: обидва типи фірм подають однаковий сигнал (одну й ту ж частку власності), а інвестор не розрізняє їх тип.

Межа, де об’єднувальна рівновага перестає існувати, визначається з рівняння $s(p_c) = s_H^{\max}$.

Розв’язуючи його для загального випадку, можна отримати вираз для критичного значення віри:

$$p_c = \frac{(H+R)(R-I(1+r))}{R(H-L)}.$$

Для наших параметрів:

$$p_c = \frac{(2+3)(3-2.6)}{3(2-1)} = \frac{5 \cdot 0.4}{3} = \frac{2}{3} \approx 0.667.$$

Таким чином:

– якщо $p < p_c \approx 0.667$, то $s(p) \le s_H^{\max}$ і об’єднувальна рівновага існує;

– якщо $p > p_c$, умова (4.4) порушується, і об’єднувальна рівновага руйнується.

Наш обраний сценарій з $p = 0.3$ лежить «далеко ліворуч» від критичної межі:

$$0.3 < \frac{2}{3},$$

то інвестор ще не настільки недовірливий, щоб «вигнати» H -тип із ринку капіталу.

За об’єднувальної рівноваги обидва типи фірми пропонують інвестору одну й ту саму частку

$$s^* = s(p) \approx 0.553.$$

Тоді очікувані виграші фірм:

– для L-типу: $\pi_L^{інв} = (L+R)(1-s^*) \approx 4\cdot(1-0.553) \approx 1.79 > 1 = L$;

– для H-типу: $\pi_H^{інв} = (H+R)(1-s^*) \approx 5\cdot(1-0.553) \approx 2.23 > 2 = H$.

Отже, і L-типу, і H-типу вигідно залучати інвестора на умовах об'єднуючої рівноваги, обидва отримують більший прибуток, ніж без інвестицій. Інвестор, зі свого боку, обирає частку, яка саме забезпечує виконання його умови беззбитковості при поточній вірі $p = 0.3$.

На графіку (рис. 4.2) це відповідає ситуації, коли:

– крива вимог інвестора $s(q)$ при $q = p$ проходить нижче горизонталі $s_H^{\max}$;

– точка $(p, s(p))$ лежить у зоні об'єднуючої рівноваги.

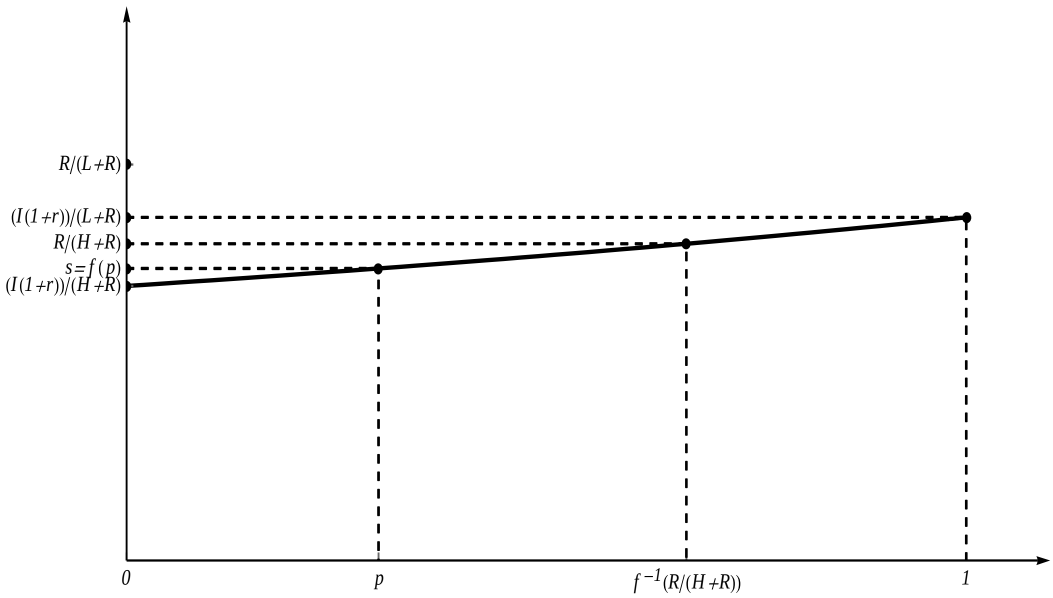


Рисунок 4.2 – Об'єднувальна рівновага при малій ймовірності L-типу

Параметри проєкту такі, що загалом «тиснуть» на ринок, але при достатньо малій недовірі інвестора ($p < p_c$) система все ще перебуває в об'єднувальній рівновазі, а фінансування отримують і низькоприбуткові, і високоприбуткові фірми.

4.3 Обчислювальний експеримент для сигнальної гри «фірма – інвестор», коли розділяюча рівновага

У цьому підпункті розглянемо той самий фінансовий сценарій, але з набагато більшою ймовірністю L-типу. Саме зміна переконань інвестора p за незмінних параметрів L, H, I, R, r призводить до переходу від об'єднувальної рівноваги до розділяючої.

Задаємо параметри:

$$L = 1, H = 2, I = 2, R = 3, r = 0.9, p = 0.3.$$

Перевіримо, що проєкт загалом виграшний:

$$I(1+r) = 2 \cdot (1+0.3) = 2.6,$$
$$R = 3,$$
$$3 \geq 2.6.$$

тобто для обох типів фірм інвестиція потенційно вигідна.

Максимальні частки, які кожен тип може віддати (з умови $(\theta + R)(1-s) \geq \theta$), не змінюються (бо ті самі L, H, R):

$$s_L^{\max} = \frac{R}{L+R} = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4} = 0.75,$$
$$s_H^{\max} = \frac{R}{H+R} = \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5} = 0.6,$$

тобто структура бізнесу не змінилась, змінився лише рівень недовіри (ймовірність L-типу).

Тепер подивімося, що вимагає інвестор при новій вірі $p = 0.9$.

Очікувана вартість фірми при вірі q (ймовірність L-типу):

$$EV(q) = q(L+R) + (1-q)(H+R) = q \cdot 4 + (1-q) \cdot 5.$$

Мінімальна частка, яку інвестор хоче при вірі q:

$$s(q) = \frac{I(1+r)}{q(L+R) + (1-q)(H+R)}.$$

Підставляємо $q = p = 0.9$:

$$q(L+R) + (1-q)(H+R) = 0.9 \cdot 4 + 0.1 \cdot 5 = 3.6 + 0.5 = 4.1,$$
$$s(p) = \frac{I(1+r)}{4.1} = \frac{2.6}{4.1} \approx 0.634.$$

Порівняємо з обмеженням H-типу:

$$s_H^{\max} = 0.6,$$
$$s(p) \approx 0.634 > 0.6.$$

Отже, при такій високій ймовірності L-типу умова об'єднувальної рівноваги

$$s(p) \le s_H^{\max}$$

не виконується.

Тому об'єднувальна рівновага неможлива: H-тип не стане брати участь у такій угоді, отже ситуація з «одним і тим самим сигналом від обох типів» не може бути стійкою.

Якщо інвестор спостерігає певну частку s_L, що відрізняється від «фонового» об'єднуючого рівня, він може інтерпретувати її як сигнал «переді мною L-тип». У рівновазі Байєса ми якраз і вимагаємо, щоб:

– при спостереженні s_L інвестор вірив, що перед ним L-тип з імовірністю 1;

– а L-тип мав стимул саме так сигналізувати.

У цьому разі його віра стає $q = 1$.

Тоді умова беззбитковості інвестора:

$$s_L \cdot (L + R) = I(1 + r) \Rightarrow s_L = \frac{I(1+r)}{L+R} = \frac{2.6}{1+3} = \frac{2.6}{4} = 0.65\,.$$

Тобто, якщо інвестор точно знає, що фірма – L-тип, він вимагає 65% частки, щоб компенсувати свої витрати.

Перевіримо, що L-тип взагалі може віддати стільки:

$$s_L^{\max} = 0.75 > s_L = 0.65,$$

тому обмеження L-фірми не порушується, така частка ще прийнятна для неї.

При частці $s_L = 0.65$ прибуток L-типу:

$$\pi_L^{інв} = (L + R)(1 - s_L) = 4 \cdot (1 - 0.65) = 4 \cdot 0.35 = 1.4\,.$$

Без інвестицій L-тип має прибуток

$$\pi_L^{без\,інв} = L = 1.$$

Оскільки

$$1.4 > 1.$$

L-тип зацікавлений інвестувати на умовах $s_L = 0.65$.

Це забезпечує умову індивідуальної раціональності L-типу в розділяючій рівновазі.

Щоб профіль стратегій був справді розділяючою рівновагою, потрібно, щоб H-тип не мав мотивації видавати себе за L-тип, тобто пропонувати ту ж частку $s_L = 0.65$.

Якщо H-тип зімітує L-тип і запропонує інвестору $s_L = 0.65$, його прибуток буде:

$$\pi_H^{інв\,при\,s_L} = (H + R)(1 - s_L) = 5 \cdot (1 - 0.65) = 5 \cdot 0.35 = 1.75.$$

Без інвестицій H-тип має:

$$\pi_H^{без\,інв} = H = 2.$$

Порівняння:

$$1.75 < 2.$$

Отже, H-типові невигідно інвестувати на умовах, які змушений пропонувати L-тип (65% частки).

Для нього краще відмовитися від інвестицій взагалі, зберігши базовий прибуток $H = 2$.

Це якраз і є умова стимулюючої сумісності для H-типу: «його найкраща відповідь – не наслідувати сигнал L-типу».

Таким чином:

– L-тип віддає 65%, отримує $1.4 > 1$, тобто інвестує;

– H-тип бачить, що при таких умовах отримує $1.75 < 2$, тобто не інвестує (рис. 4.3).

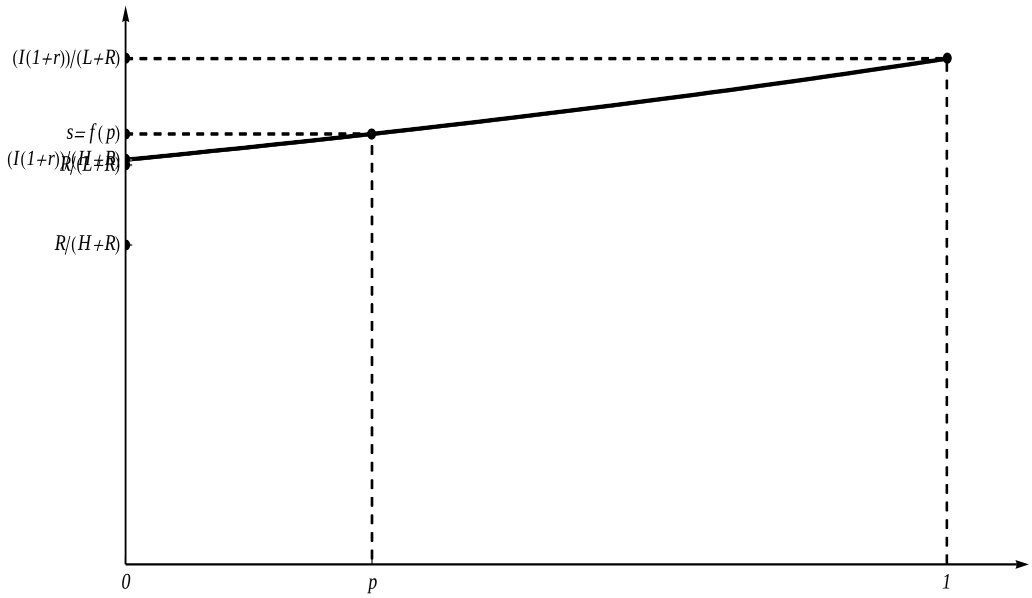


Рисунок 4.3 – Розділяюча рівновага

Висновки за розділом 4

Виходячи з цього, можна сказати, що об'єднувальна рівновага виникає, коли інвестор не може або не вважає за доцільне розрізняти типи фірм, і пропонує однакові умови для всіх.

У свою чергу, розділяюча рівновага виникає, коли інвестор скептично налаштований (висока ймовірність p, що фірма низькоприбуткова) і вимагає таких умов, які невигідні високоприбутковій фірмі.

Результати показують існування критичного порогу довіри інвестора. Якщо ймовірність натрапити на низькоприбуткову фірму є нижчою за цей поріг, ринок функціонує в режимі об'єднувальної рівноваги, де фінансування отримують всі компанії. Однак, при зростанні недовіри (збільшенні p) система переходить у стан розділяючої рівноваги, що призводить до негативного відбору, тобто високоприбуткові фірми відмовляються від невигідних умов, і проєкт реалізується лише для менш ефективних підприємств. Це демонструє важливість механізмів сигналізування для подолання ринкової неефективності.

ВИСНОВКИ

Під час написання кваліфікаційної роботи було теоретично обґрунтовано та програмно реалізовано у середовищі Wolfram Mathematica динамічну модель сигнальної гри «Інвестор – Фірма», що дозволило експериментально встановити критичні межі недовіри, при яких ринок переходить від ефективної об'єднувальної до розділяючої рівноваги, а отримані результати завдяки використанню досконалої байєсової рівноваги повністю відповідають сучасному рівню розвитку теорії прийняття рішень та математичного моделювання економічних систем.

Практичним результатом дослідження стало розроблене у середовищі Wolfram Mathematica програмне забезпечення, яке дозволяє проводити чисельне моделювання сигнальної гри, автоматично розраховувати межі вигідних пропозицій для обох сторін та візуалізувати зони існування об'єднувальних і розділяючих рівноваг залежно від рівня довіри інвестора та вхідних фінансових параметрів проєкту.

За результатами проведеного обчислювального експерименту було визначено, що при низькому рівні недовіри система перебуває у стані об'єднувальної рівноваги, де фінансування отримують як високоприбуткові, так і низькоприбуткові фірми, проте перевищення порогового значення недовіри призводить до формування розділяючої рівноваги, наслідком якої є негативний відбір і витіснення високоприбуткових підприємств з ринку капіталу через завищені вимоги інвестора.

Ступінь впровадження результатів охоплює діяльність фінансових аналітиків для оцінки ризиків в умовах неповної інформаці, а доцільність продовження досліджень вбачається у подальшому ускладненні моделі шляхом введення конкуренції між декількома фірмами, врахування фактору безперервного часу та дослідження впливу вартості верифікації сигналів на стійкість ринкової рівноваги.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Backus D., Drifill J. Inflation and Reputation. *American Economic Review*. 1985. Vol. 75. No. 3. P. 530–538.

2. Holt C., Roth A. The Nash equilibrium: A perspective. *PNAS*. 2004. Vol. 101, No. 12. P. 3999–4002.

3. Kelly A. GAME THEORY AND DECISION MAKING. The art of being right. Cambridge University Press : England, 2023. 266 p.

4. Lambert N., Marple A., Shoham Y. On equilibria in games with imperfect recall. *Games and Economic Behavior*. 2019. Vol. 113. P. 164–185.

5. Slantchev B. Analytic Theory II: Repeated Games and Bargaining. University of California : San Diego, 2020. 42 p.

6. Cho I., Kreps D. Signaling Games and Stable Equilibria. *The Quarterly Journal of Economics*. 1987. Vol. 102, No. 2. P. 179–222.

7. Xiao Y. Calculation of Perfect Bayesian Equilibrium in a Signaling Game. *Higher Education Research*. 2023. Vol. 8, No. 4. P. 193–200.

8. Haan M., Hauck D. Games with possibly naive present-biased players. *Springer Nature*. 2023. Vol. 95. P. 173–203.

9. Landi M., Sacco P. Norms of Cooperation in a Game of Partnership. *Computational and Mathematical Organization Theory*. 2001. Vol. 7, No. 3. P. 233–266.

10. Kreps D., Wilson R. Sequential Equilibria. *Econometrica*. 1982. Vol. 50, No. 4. P. 863–894.

11. Slantchev B. Analytic Theory II: Dynamic Games with Incomplete Information. University of California : San Diego, 2020. 33p.

12. Dilmé F., Li F. Dynamic Signaling with Dropout Risk. *American Economic Journal: Microeconomics*. 2016. Vol. 8, No. 1. P. 57–82.

13. Crawford V., Sobel J. Strategic Information Transmission. *Econometrica*. 1982. Vol. 50, No. 6. P. 1431–1451.

14. Backus D., Drifill J. Inflation and Reputation. *American Economic Review*. 1985. Vol. 75, No. 3. P. 530–538.

15. Alesina A., Summers L. Central Bank Independence and Macroeconomic Performance: Some Comparative Evidence. *Journal of Money, Credit and Banking*. 1993. Vol. 25, No. 2. P. 151–162.

16. Jun Y., Zhao X., Bian Y. Optimal control under safety constraints and disturbances: a multi-step, off-policy adaptive dynamic programming approach. *Nonlinear Dynamics*. 2025. Vol. 113, No. 17. P. 22973–22999.

17. Parilina E., Zaccour G., Wrzaczek S. Dynamic Oligopolistic Competition with Uncertainty and Supply Disruption Effects. *International Game Theory Review*. 2024. Vol. 26, No. 2. 2440009 p.

18. Porretta A., Cardaliaguet P., Lasry J. Long time average of mean field games. *Networks and Heterogeneous Media*. 2012. Vol. 7, No. 2. P. 279–301.

19. Yeung D., Petrosjan L. Subgame Consistent Cooperative Solution of Dynamic Games with Random Horizon. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2011. Vol. 150, No. 1. P. 78–97.

20. Gryglewicz S., Kolb A. Dynamic signaling with stochastic stakes. *Theoretical Economics*. 2022. Vol. 17, No. 2. P. 539–559.

21. Tao Z., Li X., Liu X. Analysis of Signal Game for Supply Chain Finance (SCF) of MSEs and Banks Based on Incomplete Information Model. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2019. Vol. 1, No. 6. 6 p.

22. Helmut B. Fairness and competition in a bilateral matching market. University of Munich : Berlin, 2021. No. 287. 35 p.

23. Wu Y., Liu Y., Chen P. Finding Bayesian Nash equilibrium in DHR. *Security and Safety*. 2025. Vol. 4. 15 p.

24. Kochenderfer M., Wheeler T., Wray K. Algorithms for Decision Making. The Massachusetts Institute of Technology Press : Massachusetts, 2022. 700 p.

25. Fudenberg D., Levine D. The Theory of Learning in Games. The Massachusetts Institute of Technology Press : Massachusetts, 1998. 363 p.

26. Carmona R., Delarue F. Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications. Springer : France, 2018. Vol. 83. 712 p.

27. Shoham Y., Leyton-Brown K. MULTIAGENT SYSTEMS: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations. Cambridge Unuversity Press : England, 2009. 532 p.

28. Ramirez S., Bauso D. Dynamic Games with Strategic Complements and Large Number of Players. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2023. Vol. 197, No. 1. P. 1–21.

29. Lattimore T., Szepesvari C. Bandit Algorithms. Cambridge Unuversity Press : England, 2020. 597 p.

30. Панкратова Н. Д. Системний аналіз: теорія та застосування. Наукова Думка : Київ, 2018. 349 с.