УДК 621.396

*В.А. ДОРОШЕНКО*, канд. физ.-мат. наук,
*Н.П. КЛИМОВА*, канд. техн. наук

# АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СИММЕТРИЧНЫМ БИКОНУСОМ С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ

Рассматривается задача о возбуждении сосредоточенным источником неограниченной симметричной биконической поверхности с периодически прорезанными вдоль образующих щелями. Исследование такой модельной задачи вызвано тем, что в последнее время значительно возрос интерес к изучению рассеивающих свойств конусов и биконусов, используемых в качестве элементов современных радиотехнических систем, радиолокационных отражателей и диапазонных антенн [1,2].

Наличие неоднородностей, например щелей, на поверхности дает возможность управлять такими характеристиками как диаграмма направленности и поляризация излучения. В работах других авторов рассматривались неоднородности в виде поперечных щелей [2], анизотропно проводящие конусы и биконусы в приближении радиальной и спиральной проводимости [1]. Однако учет только лишь радиальной проводимости не может охарактеризовать влияние радиальных щелей (их угловых размеров и количества), прорезанных вдоль образующих биконуса, на основные свойства рассеяния и излучения таких структур. Биконическая поверхность в настоящей работе имеет продольные щели и в общей постановке задачи нет ограничений на их число и угловые размеры. Решение электродинамических задач для изотропных биконических структур уже сопряжено с определенными математическими трудностями. Наличие же продольных щелей усложняет решение соответствующей граничной задачи, для чего и требуется создание и разработка новых методов.

Для теоретического исследования данной задачи привлекается математический аппарат, основанный на применении интегрального преобразования Конторовича - Лебедева и метода задачи Римана - Гильберта [3], что позволяет получить как аналитическое решение, так и численный алгоритм для изучения и расчета практически важных электродинамических характеристик.

В сферической системе координат r, θ, φ биконическая поверхность определяется уравнениями $\theta = \gamma$ и $\theta = \pi - \gamma$ . Вдоль образующих биконуса периодически и симметрично прорезаны продольные щели. Через d обозначим угловую ширину щелей, N - число щелей у каждого из конусов, $\ell = 2\pi / N$ - период структуры. В качестве источника берется электрический радиальный диполь с радиусом-вектором $\vec{r}_0$ и единичным моментом. Источник находится внутри и на оси конуса $\theta = \pi - \gamma$ . Поле диполя меняется во времени по гармоническому закону $\exp(i\omega t)$ .

В случае возбуждения электрическим радиальным диполем компоненты электромагнитного поля выражаются через электрический потенциал Дебая, который удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца вне биконуса и источника, граничному условию Дирихле, принципу предельного поглощения и условию ограниченности энергии. Потенциал Дебая $U_p(r, \theta, \varphi)$, соответствующий рассеянному биконусом полю, представим в виде интеграла Конторовича - Лебедева:

$$U_p = \int\limits_0^{+\infty} \frac{H^{(2)}_{i\tau}(kr)}{\sqrt{r}} a_0(\tau, k) V_{0\tau}(\theta, \varphi) d\tau, \qquad (1)$$

$$V_{0\tau} = \begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n P^{nN}_{-1/2+i\tau}(\cos\theta) e^{inN\varphi}, \quad 0 < \theta < \gamma, \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} [\beta_n P^{nN}_{-1/2+i\tau}(\cos\theta) + \xi_n P^{nN}_{-1/2+i\tau}(-\cos\theta)] e^{inN\varphi}, \\ \qquad\qquad , \gamma < \theta < \pi - \gamma, \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \eta_n P^{nN}_{-1/2+i\tau}(-\cos\theta) e^{inN\varphi}, \quad \pi - \gamma < \theta < \pi, \end{cases}$$

где $a_0(\tau, k)$ — известный коэффициент, k — волновое число, $P H^{(2)}_{i\tau}(kr)$) — присоединенная функция Лежандра первого рода, $H^{(2)}_{i\tau}(kr)$ — функция Ханкеля второго рода. Требование выполнимости граничного условия на конических секторах и условия непрерывности поля в щелях приводит к следующим связным функциональным соотношениям относительно неизвестных коэффициентов $\alpha_n$ и $\eta_n$, так как $\beta_n$ и $\xi_n$ выражаются через последние:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n P^{nN}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos\gamma)e^{inN\varphi} = 1, \tag{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \eta_n P^{nN}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos\gamma)e^{inN\varphi} = \frac{P^{nN}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos\gamma)}{P^{nN}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos\gamma)}, \tag{3}$$

где $\dfrac{\pi d}{\ell} < |N\varphi| \le \pi$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G^{nN}_{\tau}\left[\alpha_n P^{nN}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos\gamma) - \eta_n P^{nN}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos\gamma)\right]e^{inN\varphi} = 0, \tag{4}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G^{nN}_{\tau}[\alpha_n P^{nN}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos\gamma) - \eta_n P^{nN}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos\gamma)]e^{inN\varphi} = 0, \tag{5}$$

где $|N\varphi| < \dfrac{\pi d}{\ell}$,

$$G^{nN}_{\tau} = \frac{P^{nN}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos\gamma)}{P^{nN}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos\gamma) - P^{nN}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos\gamma)} \frac{N\cdot|n|}{(1-\varepsilon^{+}_{n})},$$

$$\frac{1}{N\cdot|n|}(1-\varepsilon_n^{\pm}) = \frac{\pi(-1)^{nN}}{\operatorname{ch}\pi\tau}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\tau-nN)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\tau+nN)}P^{nN}_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma)\times$$
$$\times\left[P^{nN}_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma)\pm P^{nN}_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma)\right] \tag{6}$$

В выражении (6) для определения $\varepsilon_n^{\pm}$, $\varepsilon_n^{+}$ соответствует знак "+" в квадратных скобках правой части, а $\varepsilon_n^{-}$ - знак "–", $\Gamma(Z)$ - гамма-функция.

После сложения и вычитания соотношений (2), (3) (те же операции производим и с (4), (5)) и введения новых обозначений

$$(\alpha_n+\eta_n)P^{nN}_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma) = \frac{(-1)^n}{N|n|}(1-\varepsilon_n^{+})X_n^{+},$$

$$(\alpha_n-\eta_n)P^{nN}_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma) = \frac{(-1)^n}{N|n|}(1-\varepsilon_n^{-})X_n^{-},$$

$$\psi = N\varphi-\frac{|\varphi|}{\varphi}\pi,$$

удается развязать соотношение (2) — (5) и получить две независимые системы функциональных уравнений относительно искомых коэффициентов $X_n^{+}$ и $X_n^{-}$.

Использование метода задачи Римана - Гильберта для дуги единичной окружности позволяет свести решение этих функциональных уравнений, а тем самым и электродинамическую задачу, к решению двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений фредгольмовского типа относительно коэффициентов [3]. Характерной особенностью этих систем является независимость матричных элементов от волнового числа, что существенно упрощает алгоритм нахождения поля в дальней зоне и вблизи центра биконической поверхности, а также в приближенни , когда источник находится практически в центре биконуса. Эти системы уравнений имеют вид

$$X_0^{\pm}\left[-\frac{1}{N}\ln\frac{1-u}{2}+A_\tau^{\pm}\right]=1\pm\frac{P_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma)}+ \\ +\frac{1}{2N}\sum_{S\neq 0}X_S^{\pm}\frac{1}{|S|}\varepsilon_S^{\pm}\left[P_S(u)+P_{S-1}(u)\right], \tag{7}$$

$$X_n^{\pm}=\sum_{S=-\infty}^{+\infty}\frac{|S|}{S}\varepsilon_S^{\pm}V_{n-1}^{S-1}(u)X_S^{\pm}+X_0^{\pm}P_n(u),\ n\neq 0, \tag{8}$$

$$A_\tau^{\pm}=\frac{1}{N|n|}(1-\varepsilon_n^{\pm})\Big|_{n=0},\qquad P_n(u)\ \text{— полиномы Лежандра.}$$

Решения бесконечных систем (7), (8) при произвольных параметрах задачи могут быть получены методом редукции, а в некоторых предельных случаях биконической поверхности, в частности в случае "полупрозрачного" биконуса ($N\to\infty$, $(\ell-d)/\ell\ll 1$), также и методом последовательных приближений. На базе последнего и строится аналитическое решение электродинамической задачи в этих предельных случаях.

В случае "полупрозрачного" биконуса, когда существует

$$Q=\lim_{\substack{N\to\infty\\ d/\ell\to 1}}\left[-\frac{1}{N}\ln\left(\frac{\ell-d}{\ell}\right)\right], \tag{9}$$

потенциал Дебая определяется выражением

$$U_p = \frac{\pi^2}{r_0} Q \int_0^{+\infty} \frac{\tau \operatorname{th} \pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau} e^{\pi\tau} \cdot \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \cdot \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r_0}} \times$$

$$\times \frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma) P_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma)}{(A_\tau^+ + Q)(A_\tau^- + Q)} P_{-1/2+i\tau}(\cos\theta) d\tau +$$

$$+ \frac{\pi^3}{2r_0} \int_0^{+\infty} \frac{\tau \operatorname{th} \pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau} e^{\pi\tau} \cdot \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \cdot \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr_0)}{\sqrt{r_0}} \times \tag{10}$$

$$\times \frac{[P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma)]^2 \left\{ [P_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma)]^2 - [P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma)]^2 \right\}}{(A_\tau^+ + Q)(A_\tau^- + Q)} \times$$

$$\times P_{-1/2+i\tau}(\cos\theta) d\tau,$$

которое справедливо для $0 < \theta < \gamma$. Аналогичные представления имеют место и при $\gamma < \theta < \pi - \gamma$, $\pi - \gamma < \theta < \pi$.

На биконической поверхности в таком случае выполняются усредненные граничные условия

$$E_r \Big|_{\substack{\theta=\gamma+0 \\ \theta=\pi-\gamma+0}} = E_r \Big|_{\substack{\theta=\gamma-0 \\ \theta=\pi-\gamma-0}}, \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right)(rj) = -\frac{2ik}{\omega Q \sin\gamma} E_r \Big|_{\theta=\gamma},$$

где $j = H_\varphi \Big|_{\substack{\theta=\gamma+0 \\ \theta=\pi-\gamma+0}} - H_\varphi \Big|_{\substack{\theta=\gamma-0 \\ \theta=\pi-\gamma-0}}$, $\omega = \sqrt{\mu / \varepsilon}$,

$\varepsilon, \mu$ — электрическая и магнитная проницаемость среды, в которую погружен биконус.

Анализ решения (10) показывает, что спектр граничной задачи Дирихле для “полупрозрачного” биконуса характеризуется корнями уравнений

$$\frac{\pi}{\cos\pi\mu} P_{-\frac{1}{2}+\mu}(\cos\gamma)\left[P_{-\frac{1}{2}+\mu}(-\cos\gamma) + P_{-\frac{1}{2}+\mu}(\cos\gamma)\right] + Q = 0,$$

$$\frac{\pi}{\cos\pi\mu} P_{-\frac{1}{2}+\mu}(\cos\gamma)\left[P_{-\frac{1}{2}+\mu}(-\cos\gamma) - P_{-\frac{1}{2}+\mu}(\cos\gamma)\right] + Q = 0,$$

наименьший из которых определяет поведение поля вблизи центра структуры.

Таким образом, в результате проведенных исследований получено решение электродинамической задачи в предельном случае "полупрозрачного" биконуса, представляющего собой модель биконического отражателя. Алгоритм решения может быть использован и при решении задач с более сложной формой рассеивающей поверхности, а также и для нестационарных задач электродинамики.

**Список литературы:** 1. *Гошин Г.Г.* Граничные задачи электродинамики в конических областях. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1987. 127 с. 2. *Колодій Б.І., Куриляк Д.Б.* Осесиметричні задачі дифракції електромагнітних хвиль на конічних поверхнях. Київ: Наук. думка, 1995. 167 с. 3. *Дорошенко В.А.* Возбуждение магнитным радиальным диполем конуса с продольными щелями // Радиотехника. 1992. Вып. 97. С. 54-61.

*Поступила в редколлегию 29.01.97*