

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ РОТЕ ТА ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО АНАЛІЗУ ПРОЦЕСІВ САМОЗАЙМАННЯ У КРУЗІ

Калініченко А. С.

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М. В.  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
61166, Харків, просп. Науки, 14, каф. прикладної математики,  
тел. (068) 155-63-80, email: anatolii.kalinichenko@nure.ua

This work is devoted to the use of the Rothe's method in combination with the method of two-sided approximations based on the use of the Green's function to solve the 2D initial-boundary value problem for the semilinear equation of thermal conductivity in circular domain. The power of the internal heat source is approximated by exponential dependence.

Розглянемо початково-крайову задачу:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = A\Delta\theta + Be^{\theta}, \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, t_0], \quad (1)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, t_0], \quad (2)$$

$$\theta(\mathbf{x}, 0) = 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (3)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ на } \partial\Omega, t \in [0, t_0], \quad (4)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $A > 0$ ,  $B > 0$  – параметри,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\Omega$  – круг радіуса 1 з центром у початку координат,  $t_0$  – час моделювання. Задача (1)–(4) виникає при дослідженні процесів самозаймання для функції зміни температури, і тоді параметри  $A$  та  $B$  задають фізико-хімічні властивості процесу з припущенням про їх сталість. Останній доданок в правій частині (1) позначає тепло, що виділяється при окисненні насипу (вугілля або зерна), перерізом якого є  $\Omega$ , та отриманий апроксимацією з закону Арреніуса [2].

Для функції температури  $T(\mathbf{x}, t)$  він матиме вигляд  $B_1 e^{-\frac{E_a}{R(T+273)}}$ , де  $B_1 > 0$ ,  $E_a$  – енергія активації,  $R$  – універсальна газова стала.

Введемо на  $[0, t_0]$  сітку з кроком  $\tau$   $t_j = j\tau$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ,  $m\tau = t_0$  та позначимо  $\Theta_j = \Theta_j(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}, t_j)$ . Згідно з методом Роте розв'язок задачі (1) – (4) шукатимемо вздовж прямих  $t = \text{const}$ . Для цього на кожній прямій  $t = t_j$  апроксимуємо похідну за часом відношенням скінченних різниць, що дозволяє перейти до послідовності крайових задач:  $\Theta_0(\mathbf{x}) = 0$ ,

$$-\Delta\Theta_j + \frac{1}{A\tau}\Theta_j = \frac{1}{A\tau}\Theta_{j-1} + \frac{B}{A}e^{\Theta_j}, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5)$$

$$\Theta_j(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6)$$

$$\Theta_j(\mathbf{x}) = 0 \text{ на } \partial\Omega, j = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Застосуємо послідовно до кожної задачі метод двобічних наближень. Для круга радіуса 1 функція Гріна крайової задачі (5) – (7) має вигляд:

$$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(r\mu_{nm})J_n(\rho\mu_{nm})\cos(n(\varphi - \psi))}{(1 + \delta_{n0})[J'_n(\mu_{nm})]^2(\mu_{nm}^2 + \kappa^2)},$$

де  $J_n(\mu)$  – функція Бесселя,  $\mu_{nm}$  –  $m$ -й додатний корінь  $J_n(\mu) = 0$ ,

$$\delta_{n0} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n = 1, 2, \dots, \end{cases}, \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{A\tau}},$$

декартові координати точок  $\mathbf{x}$  і  $\mathbf{s}$  пов'язані з полярними як  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ ,  $s_1 = \rho \cos \psi$ ,  $s_2 = \rho \sin \psi$ .

Вважатимемо надалі  $j$  фіксованим. Оскільки при знаходженні функції  $\Theta_j$  функція  $\Theta_{j-1}$  уже відома то крайова задача (5) – (7) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна:

$$\Theta_j(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left( \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) + \frac{B}{A} e^{\Theta_j(\mathbf{s})} \right) ds,$$

яке далі розглянемо у банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$  функцій, неперервних у  $\bar{\Omega}$ , з конусом невід'ємних функцій  $\mathcal{K}_+ = \{\theta \in C(\bar{\Omega}) : \theta(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$ .

На  $j$ -му часовому шарі інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді  $\langle 0, \beta_j \rangle$ , де число  $\beta_j > 0$  визначається з нерівності:

$$\frac{1}{A\tau} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) ds + \frac{B}{A} e^{\beta} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \beta \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Отже, ітераційний процес методу двобічних наближень матиме вигляд:

$$v^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{A\tau} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) ds + \frac{B}{A} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{v^{(k-1)}(\mathbf{s})} ds, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$w^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{A\tau} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) ds + \frac{B}{A} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{w^{(k-1)}(\mathbf{s})} ds, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_j.$$

За наближений розв'язок вихідної задачі (1) – (4) на  $j$ -му часовому шарі на  $k$ -й ітерації з заданою точністю  $\varepsilon > 0$  приймаємо функцію

$$\Theta_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}$$

при виконанні умови  $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \left( w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}) \right) < 2\varepsilon$ .

Список використаних джерел:

1. Сидоров М. В. (2018). Метод Роте у комбінації з методом двобічних наближень розв'язання початково-крайових задач для напівлінійного рівняння теплопровідності. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*, 1, 108–127.

2. Франк-Каменецкий, Д. А. (2008). *Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике*. Издательский Дом «Интеллект».