

**МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ПОШУКУ
АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ
З МОНОТОННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ**

Пархоменко В.Г.

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна

e-mail: vladyslav.parkhomenko1@nure.ua

The problem of constructing two-sided approximations to a unique axial-symmetric positive solution of the first boundary-value problem for an equation $-\Delta u = f(u)$ in the radius R circle is considered. The efficiency of the method is confirmed by computational experiments for $f(u) = \frac{1}{2}\sqrt{u+1}$.

При математичному моделюванні процесів, що протікають у нелінійних середовищах, виникає необхідність аналізу нелінійної крайової задачі вигляду:

$$-\Delta u = f(u) \text{ у } \Omega, \quad (1)$$

$$u > 0 \text{ у } \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

де Ω – вимірна за Жорданом область в \mathbb{R}^2 , $f(u)$ неперервна і додатна для всіх $u > 0$ функція.

Якщо Ω є кругом радіуса R у \mathbb{R}^2 , то можна поставити задачу знаходження розв'язку задачі (1) – (3), який є радіально-симетричним, тобто розв'язку, який залежить лише від $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Це приводить до наступної задачі для визначення $u = u(\rho)$:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = f(u), \quad 0 < \rho < R, \quad (4)$$

$$u(\rho) > 0, \quad 0 < \rho < R, \quad (5)$$

$$|u(0)| < +\infty, \quad u(R) = 0. \quad (6)$$

Задача (4) – (6) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна:

$$\int_0^R K(\rho, s) f(u(s)) ds, \quad (7)$$

де

$$K(\rho, s) = \begin{cases} s \ln \frac{R}{s}, & 0 \leq \rho \leq s, \\ s \ln \frac{R}{\rho}, & s < \rho \leq R. \end{cases}$$

Рівняння (7) розглядається як нелінійне операторне рівняння у банаховому просторі $C[0, R]$, напівупорядкованому конусом K_+ невід'ємних на

$[0, R]$ неперервних функцій [1, 2]. Неперервний і додатний на $[0, R]$ розв'язок рівняння (7) прийемо за узагальнений розв'язок крайової задачі (4) – (6).

Доведено, що оператор

$$(Tu) = \int_0^R K(\rho, s) f(u(s)) ds$$

має наступні властивості:

а) є додатним оператором;

б) є u_0 -додатним оператором, де

$$u_0 = \frac{1}{4}(R^2 - \rho^2);$$

в) є монотонним оператором, якщо функція $f(u)$ монотонна за u ;

г) є угнутим і навіть u_0 -угнутим оператором, де $u_0 = \frac{1}{4}(R^2 - \rho^2)$, якщо $f(\tau u) > \tau f(u)$ для будь-якого додатного числа u для всіх $\tau \in (0, 1)$.

Для монотонного оператора T умовами $Tv_0 \geq v_0$, $Tw_0 \leq w_0$ виділимо інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ і сформуємо два ітераційні процеси:

$$v^{(n+1)}(\rho) = \int_0^R K(\rho, s) f(v^{(n)}(s)) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$w^{(n+1)}(\rho) = \int_0^R K(\rho, s) f(w^{(n)}(s)) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\rho) = v_0(\rho), \quad w^{(0)}(\rho) = w_0(\rho).$$

Кінці інваріантного конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ можна шукати у вигляді $v_0(\rho) = \alpha u_0(\rho)$, $w_0(\rho) = \beta u_0(\rho)$, $0 < \alpha < \beta$, або (якщо $f(0) > 0$) – у вигляді $v_0(\rho) = 0$, $w_0(\rho) = \beta u_0(\rho)$, $\beta > 0$.

Послідовність $\{v^{(n)}(\rho)\}$ не спадає за конусом K_+ , а послідовність $\{w^{(n)}(\rho)\}$ не зростає за конусом K_+ . Оскільки конус K_+ є нормальним, а оператор T є цілком неперервним, то обидві побудовані ітераційні послідовності збігаються у нормі простору $C[0, R]$ до єдиного додатного розв'язку u^* крайової задачі (4) – (6) і має місце ланцюг нерівностей:

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(n)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(n)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)}.$$

За наближений розв'язок крайової задачі (4) – (6) на n -й ітерації обираємо функцію

$$u^{(n)}(\rho) = \frac{1}{2}(v^{(n)}(\rho) + w^{(n)}(\rho)).$$

При цьому похибка наближення оцінюється нерівністю

$$\|u^{(n)} - u^*\|_{C[0, R]} \leq \frac{1}{2} \max_{\rho \in [0, R]} (w^{(n)}(\rho) - v^{(n)}(\rho)).$$

Обчислювальний експеримент було проведено для $f(u) = \frac{1}{2}\sqrt{u+1}$. З точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ ітераційний процес зійшовся за 3 кроки. На рис. 1 зображено графік поверхні наближеного розв'язку задачі (1) – (3).

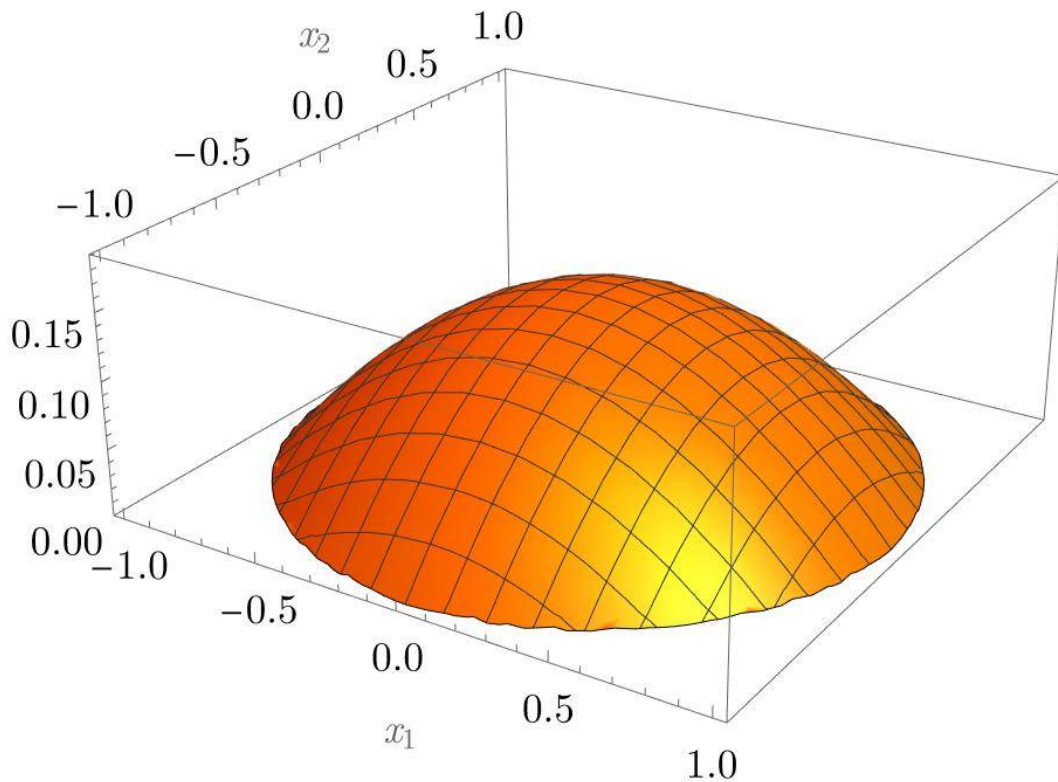


Рисунок 1 – Поверхня наближеного розв'язку крайової задачі

Список використаних джерел:

1. Matinfar M., Nemati K. A numerical extension on a convex nonlinear elliptic problem. *International Mathematical Forum*. 2008. V. 3, № 17. P. 811–816.
2. Пархоменко В.Г., Сидоров М.В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних радіально-симетричних розв'язків крайових задач з монотонними нелінійностями. *Радиоэлектроника и информатика*. 2019. № 3 (86). С. 16–23.