

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

В. С. Блудов

Харьков

В литературе по линейному программированию [1—7] хорошо известна очень простая по своей формулировке задача: по сети дорог, связывающей m городов, найти путь, который имел бы наименьшую длину и связывал все города, проходя через каждый точно по одному разу. Эта задача носит название задач коммивояжера или бродячего торговца. Практическое приложение ее достаточно велико: она применяется для нахождения оптимальных транспортных маршрутов [3], в календарном планировании [4], сетевом планировании [1] и т.д. Но, несмотря на простоту формулировки, решение этой задачи существующими методами [1, 4—7] требует выполнения большого объема вычислений, так как почти все известные методы предполагают значительный перебор возможных путей. Наличие перебора значений пути является существенным недостатком методов [1, 4—7], который сильно затрудняет решение задач большого объема.

В данной статье рассматривается метод решения задачи коммивояжера, свободный от перечисленных недостатков и позволяющий всегда находить строго оптимальное решение. Этот метод является дальнейшим развитием метода, предложенного автором для решения задачи выбора оптимальной системы различных представителей [8].

Задача коммивояжера имеет следующую математическую формулировку. Предположим, что дана квадратная матрица

$$A = \|a_{ij}\|, \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

порядка m , элементами которой служат вещественные числа a_{ij} . Задача состоит в определении такой последовательности из m элементов матрицы A

$$\omega = (a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{m-1} i_m} a_{i_m i_1}), \quad (1)$$

у которой индексы элементов образуют циклическую перестановку с длиной цикла, равной m ,

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{m-1} & i_m \\ i_2 & i_3 & \dots & i_m & i_1 \end{pmatrix} = (i_1 i_2 \dots i_m) \quad (2)$$

и сумма значений элементов, входящих в ω ,

$$\varphi = \sum_{s=1}^m a_{i_s i_{s+1}}, \quad s+1 \pmod{m} \quad (3)$$

должна принимать либо минимальную, либо максимальную величину в зависимости от конкретной интерпретации данной задачи.

Метод решения, излагаемый в данной работе для сформулированной задачи, основан на принципе оптимальности конечных числовых последовательностей, который аналогичен принципу оптимальности Р. Бел-

лмана [9], и на результате теоремы о значениях специальной функции элементов матрицы A , формулировка и доказательство которых дано ниже.

Предположим, что дано конечное множество Ω числовых последовательностей длины m

$$\Omega = \{(a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_m j_m}) = \omega\}.$$

Все элементы каждой последовательности должны удовлетворять условиям, которые ограничивают возможные перестановки элементов внутри последовательности. Например, для задачи коммивояжера это условие (2). В качестве критерия оптимальности используется функция

$$\varphi = \varphi(a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_m j_m}).$$

Эту функцию назовем функцией цели. Последовательность будет оптимальной только в том случае, когда функция цели равна либо минимуму, либо максимуму, в зависимости от конкретной постановки задачи.

Множество Ω может иметь одну минимальную и одну максимальную последовательности или несколько таких последовательностей. В любом из этих случаев выделение оптимальной последовательности дает решение поставленной задачи.

Предположим, что последовательность

$$\omega_{\text{opt}} = (a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_m j_m})$$

является оптимальной. Выделим из этой последовательности элемент $a_{i_k j_k}$ и построим подмножество $\Omega_{i_k j_k}$ всех тех и только тех последовательностей, которые содержат выделенный элемент $a_{i_k j_k}$. Исключим из всех последовательностей подмножества $\Omega_{i_k j_k}$ элемент $a_{i_k j_k}$, что даст в результате подмножество последовательностей вида

$$\Omega_{i_k j_k}^- = \{(a_{i_1 j_1} \dots a_{i_{k-1} j_{k-1}} a_{i_{k+1} j_{k+1}} \dots a_{i_m j_m})\}.$$

Каждая полученная таким образом последовательность представляет собой остаток соответствующей последовательности множества $\Omega_{i_k j_k}$.

Принцип оптимальности формулируется следующим образом.

Если последовательность ω_{opt} оптимальна в Ω , то ее часть, оставшаяся после исключения элемента $a_{i_k j_k}$, будет оптимальной в подмножестве $\Omega_{i_k j_k}^-$ для всех $k = 1, 2, \dots, m$.

Этот принцип можно легко доказать такими рассуждениями. Предположим, что множество Ω содержит точно одну последовательность с минимальным и одну с максимальным значением функции цели. Выделение элемента $a_{i_k j_k}$, принадлежащего к оптимальной последовательности, разбивает множество Ω на два подмножества — $\Omega_{i_k j_k}$ и $\Omega_{i_k j_k}^-$, из которых

только первое будет содержать оптимальную последовательность. Легко заметить, что оптимальная в Ω последовательность будет оптимальной и в $\Omega_{i_k j_k}$. Исключение общего для всех последовательностей подмножества $\Omega_{i_k j_k}$ элемента $a_{i_k j_k}$ не может изменить распределение остатков этих последовательностей по значениям функции цели. Следовательно, для оптимальной в $\Omega_{i_k j_k}$ последовательности исключение $a_{i_k j_k}$ не приводит к нарушению оптимальности ее остатка в $\Omega_{i_k j_k}$. Учитывая, что только $\Omega_{i_k j_k}$ содержит оптимальную последовательность, то только $\Omega_{i_k j_k}$ будет содержать остаток оптимальной последовательности и, в свою очередь,

только этот остаток будет оптимален в $\Omega_{ik/k}^-$, что и доказывает сформулированный принцип оптимальности. Аналогично строится доказательство и для случая, когда Ω содержит несколько оптимальных последовательностей.

Принцип оптимальности дает возможность построить алгоритм решения задачи коммивояжера в случае, когда есть критерий принадлежности некоторого элемента a_{ij} матрицы A оптимальной последовательности ω_{opt} . Такой критерий дает теорема о значениях специальной функции L_{ij} элементов матрицы A .

Построим следующую функцию:

$$L_{ij} = u_i + v_j - (m - 1)a_{ij}, \quad (4)$$

где

$$u_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (5)$$

$$v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}, \quad j \neq i, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

и дадим следующие определения.

Если последовательность (1) удовлетворяет условию (2) и для нее значение функции цели (3) минимально, то такую последовательность назовем минимальной.

Если последовательность (1) удовлетворяет условию (2) и для нее значение функции цели (3) максимально, то такую последовательность назовем максимальной.

Теорема. Функция (4) достигает своего наибольшего значения по крайней мере для одного из тех и только тех элементов, которые принадлежат минимальной последовательности. Для всех остальных элементов матрицы A наибольшее значение функции (4) недостижимо.

Функция (4) достигает своего наименьшего значения по крайней мере для одного из тех и только тех элементов, которые принадлежат максимальной последовательности. Для всех остальных элементов матрицы A наименьшее значение функции (4) недостижимо.

Доказательство. Пусть

$$\omega_{\min} = (a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_m i_1}) -$$

минимальная последовательность. Представим каждый элемент, входящий в $\omega_{\min}$, в виде суммы двух чисел

$$a_{i_s i_{s+1}} = a_{i_s} + h, \quad i_s \neq i_{s+1}, \quad i_s, i_{s+1} = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

где h — некоторое фиксированное число. Следовательно, соотношение (7) дает однозначное определение чисел a_{i_s} . Для всех остальных элементов a_{ij} запишем следующее разложение:

$$a_{ij} = a_i + \beta_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

где числа a_i определяются по соотношению (7). Очевидно, что для элементов, входящих в $\omega_{\min}$, справедливо равенство

$$\beta_{i_s i_{s+1}} = h, \quad i_s \neq i_{s+1}, \quad i_s, i_{s+1} = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

Докажем, что справедливо следующее вспомогательное неравенство:

$$3h < \beta_{i_1 i_2} + \beta_{i_2 i_3} + \beta_{i_3 i_4}. \quad (10)$$

Для доказательства этого неравенства используем свойство числовых последовательностей (1), удовлетворяющих условию (2), — наиболее

близкие из них отличаются друг от друга не менее чем тремя элементами. Действительно, рассмотрим произвольный цикл $(i_1 i_2 i_3 i_4 \dots i_m)$ и наиболее «близкий» к нему цикл $(i_1 i_3 i_2 i_4 \dots i_m)$, полученный из первого перестановкой двух индексов. Эти два цикла дают следующие последовательности:

$$\omega(a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} a_{i_3 i_4} a_{i_4 i_5} \dots a_{i_m i_1}),$$

$$\omega' = (a_{i_1 i_3} a_{i_3 i_2} a_{i_2 i_4} a_{i_4 i_5} \dots a_{i_m i_1}),$$

которые отличаются друг от друга тремя элементами.

Теперь предположим, что первая последовательность является минимальной, т.е. ее функция цели

$$\varphi_{\min} = \sum_{i=1}^m \alpha_i + m h. \quad (11)$$

Вторая отличается от минимальной только тремя элементами и ее функция цели

$$\varphi' = \sum_{i=1}^m \alpha_i + (m-3)h + \beta_{i_1 i_3} + \beta_{i_2 i_4} + \beta_{i_3 i_2}. \quad (12)$$

Всегда выполняется неравенство

$$\varphi_{\min} < \varphi',$$

поэтому, используя выражения (11) и (12), получим неравенство (10).

Теперь вычислим сумму значений функции (4) для элементов минимальной последовательности $\omega_{\min}$

$$\sum_{s=1}^m L_{i_s i_{s+1}} = \sum_{s=1}^m u_{i_s} + \sum_{s=1}^m v_{i_{s+1}} - (m-1) \sum_{s=1}^m a_{i_s i_{s+1}}. \quad (13)$$

Учитывая, что для матрицы A всегда выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{j=1}^n v_j = \omega, \quad (14)$$

получим значение суммы (13) в следующем виде:

$$\sum_{s=1}^m L_{i_s i_{s+1}} = 2\omega - (m-1) \sum_{i=1}^m \alpha_i - m(m-1)h. \quad (15)$$

Теперь вычислим аналогичную сумму для последовательности, которая отличается от оптимальной только тремя элементами:

$$\sum_{s=1}^m L_{i_s i_{s+1}} = 2\omega - (m-1) \sum_{i=1}^m \alpha_i -$$

$$- (m-1)[(m-3)h + \beta_{i_1 i_3} + \beta_{i_2 i_4} + \beta_{i_3 i_2}]. \quad (16)$$

Разность сумм (15) и (16) равна

$$L_{i_1 i_2} + L_{i_2 i_3} + L_{i_3 i_4} - L_{i_1 i_3} - L_{i_2 i_4} - L_{i_3 i_2} =$$

$$= (m-1)(\beta_{i_1 i_3} + \beta_{i_2 i_4} + \beta_{i_3 i_2} - 3h). \quad (17)$$

В силу неравенства (10) правая часть выражения (17) положительна, следовательно,

$$L_{i_1 i_2} + L_{i_2 i_3} + L_{i_3 i_4} - L_{i_1 i_3} - L_{i_2 i_4} - L_{i_3 i_2} > 0. \quad (18)$$

Числа, входящие в полученные неравенства, всегда можно упорядочить, поэтому не нарушая общности, запишем следующие неравенства:

$$L_{i_1 i_2} \geq L_{i_2 i_3} \geq L_{i_3 i_4}; \quad (19)$$

$$L_{i_1 i_3} \geq L_{i_2 i_4} \geq L_{i_3 i_2}. \quad (20)$$

С другой стороны, неравенство (18) всегда можно представить в виде одной из трех систем неравенств:

$$\begin{aligned} L_{i_1 i_2} - L'_{i_1 i_2} > 0; \quad L_{i_1 i_2} - L'_{i_1 i_2} > 0; \quad L_{i_1 i_2} - L'_{i_1 i_2} > 0; \\ L_{i_2 i_3} - L'_{i_2 i_3} > 0; \quad L_{i_2 i_3} - L'_{i_2 i_3} > 0; \quad L_{i_2 i_3} - L'_{i_2 i_3} < 0; \\ L_{i_3 i_4} - L'_{i_3 i_4} > 0; \quad L_{i_3 i_4} - L'_{i_3 i_4} < 0; \quad L_{i_3 i_4} - L'_{i_3 i_4} < 0. \end{aligned}$$

Решая их совместно с выражениями (19) и (20), получим соотношение

$$L_{i_1 i_2} \geq L_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (21)$$

которое показывает, что всегда имеется такой элемент $a_{i_1 i_2}$, принадлежащий $\omega_{\min}$, для которого функция L_{ij} принимает наибольшее значение. Теорема доказана. Аналогичным образом доказывается и вторая часть теоремы.

Принцип оптимальности для конечных числовых последовательностей и теорема о значениях функции (4) дают необходимые и достаточные условия для формулирования алгоритма решения задачи коммивояжера. Алгоритм решения этой задачи строится следующим образом.

Первый шаг. Используя результат теоремы о функции (4), на первом шаге определяем элемент матрицы A , входящий в минимальную (максимальную) последовательность. Для этого вычислим значения L_{ij} по формуле (4) и построим матрицу $\|L_{ij}\|$ (при вычислении на ЭЦВМ нет необходимости строить эту матрицу, так как более экономно последовательно сравнивать значения функции (4) по мере их вычисления).

В полученной матрице $\|L_{ij}\|$ определяем наибольшее (наименьшее) значение $L_{i_1 j_1}$ и соответствующий ему элемент $a_{i_1 j_1}$. Полученный элемент входит в минимальную (максимальную) последовательность. Следовательно, ни один из элементов, кроме $a_{i_1 j_1}$, стоящих в i_1 строке и в j_1 столбце, не могут входить в минимальную (максимальную) последовательность, так как по условию задачи из каждой строки и столбца можно выбрать только один элемент. Определение $a_{i_1 j_1}$ завершает первый шаг алгоритма.

Второй шаг. В начале второго шага строится матрица $A_{i_1 j_1}$ порядка $m - 1$, которая определяет подмножество $\omega_{i_1 j_1}^-$.

При построении $A_{i_1 j_1}$ в исходной матрице A вычеркивается i_1 строка, j_1 столбец и элемент $a_{i_1 j_1}$, если не исключить из матрицы $A_{i_1 j_1}$ элемент $a_{i_1 i_1}$, то возможно образование последовательности, в которой возникнет частичный цикл $(a_{i_1 j_1}, a_{i_1 i_1})$, что приведет к нарушению условия (2).

Матрица $A_{i_1 j_1}$ является исходной матрицей второго шага. Для элементов этой матрицы вычисляем значения L_{ij} по формуле (4), при условии, что ее порядок на единицу меньше порядка матрицы A . Строим матрицу $\|L_{ij}\|_{m-1}$ и определяем наибольшее (наименьшее) значение L_{ij} и соответствующий ему элемент. На этом заканчивается второй шаг алгоритма.

Последующие шаги строятся точно так же, как и второй шаг, до того момента, пока не будет получена матрица второго порядка. В матрице второго порядка имеется только два элемента и оба эти элемента входят в минимальную (максимальную) последовательность. Следовательно, описанный алгоритм всегда содержит конечное число шагов и это число равно $m - 2$.

Для иллюстрации приведенного алгоритма в Приложении дан пример решения задачи коммивояжера [7], в этой работе для данного примера получено минимальное значение, равное 63.

Для сокращения вычислений в примере была применена следующая форма записи функции 4:

$$\tilde{L}_{ij} = \frac{10}{m-1} (u_i + v_j) - 10a_{ij}.$$

Все результаты вычислений приведены в Приложении.

ВЫВОДЫ

1. Для реализации на ЭЦВМ алгоритма требуется минимальный объем оперативной памяти, так как в процессе вычисления оптимальной последовательности необходимо хранить только значения элементов исходной матрицы A и только одно значение функции (4).

2. Алгоритм имеет небольшое число операций, меньшее, чем в любом из известных [1—7] итерационных методов решения задачи коммивояжера.

3. Алгоритм позволяет решать задачи достаточно большого размера. Так, решена задача с матрицей размера 80×80 (6320 чисел) на ЭЦВМ «МИНСК-22». Время решения ее около 12 мин. Для размещения исходной матрицы, программы и промежуточных значений величин использовалась только оперативная память.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Первый шаг.

По наибольшему значению $L_{56} = 374$ выбран элемент (5, 6)

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & - & 27 & 43 & 16 & 30 & 26 \\ 2 & 7 & - & 16 & 1 & 30 & 25 \\ 3 & 20 & 13 & - & 35 & 5 & 0 \\ 4 & 21 & 16 & 25 & - & 18 & 18 \\ 5 & 12 & 46 & 27 & 48 & - & 5 \\ 6 & 23 & 5 & 5 & 9 & 5 & - \end{array}$$

Второй шаг.

По наибольшему значению $L_{35} = 341$ выбран элемент (3, 5).

$$A_{56} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & - & 27 & 43 & 16 & 30 \\ 2 & 7 & - & 16 & 1 & 30 \\ 3 & 20 & 13 & - & 35 & 5 \\ 4 & 21 & 16 & 25 & - & 18 \\ 6 & 23 & 5 & 5 & 9 & - \end{array}$$

Третий шаг

По наибольшему значению $L_{62} = 233$ выбран элемент (6, 2).

$$A_{56, 35} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & - & 27 & 43 & 16 \\ 2 & 7 & - & 16 & 1 \\ 4 & 21 & 16 & 25 & - \\ 6 & 23 & 5 & - & 9 \end{array}$$

Четвертый шаг.

Выбраны элементы (1, 4), (2, 1), (4, 3).

$$A_{56, 35, 62} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & 4 \\ \hline 1 & - & 43 & 16 \\ 2 & 7 & - & 1 \\ 4 & 21 & 25 & - \end{array}$$

Получена минимальная последовательность (1.4) (4.3) (3.5) (5.6) (6.2) (2.1), длина которой равна $16+25+5+5+5+7=63$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Гольштейн, Д. Г. Юдин. Новые направления в линейном программировании. Изд-во «Советское радио», 1966.
2. С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. Линейное и выпуклое программирование. Изд-во «Наука», 1962.
3. Е. П. Нестеров. Транспортные задачи линейного программирования. Транспортно-железнодорожный издательство, 1962.
4. В. В. Шкурба, Т. П. Подчасова, А. Н. Пшичук, Л. П. Тур. Задачи календарного планирования и методы их решения. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1966.
5. М. Хелд, Р. М. Карп. Применение динамического программирования к задачам упорядочения. Кибернетический сборник, вып. 9. Изд-во «Мир», 1964.
6. Р. Беллман. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере. Кибернетический сборник, вып. 9. Изд-во «Мир», 1964.
7. J. Little, K. Murty, D. Sweeney and C. Karel. An algorithm for the travelling salesman problem. Operations Research, vol. 11, № 6, 1963.
8. В. С. Блудов. Определение оптимальной системы общих представителей разбиений конечного множества. Сб. «Приборы и системы автоматизации», вып. 9. Изд-во ХГУ, Харьков, 1968.
9. Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. Изд-во иностр. лит-ры, 1962.