

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**  
**Пояснювальна записка**

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Застосування методу двобічних наближень до розв'язання

задачі Діріхле для нелінійного рівняння

з бігармонічним оператором

(тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи ПМм-22-1

Савченко А.В.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність

113 Прикладна математика

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма

Прикладна математика

(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Сидоров М.В.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2024 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ \_\_\_\_\_

(підпис)

“06” листопада 2023 р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Савченку Антону Віталійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування методу двобічних наближень до розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором

затверджена наказом по університету від 2 листопада 2023 р. № 1276 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 січня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи задача Діріхле для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором, що є математичною моделлю актюатора

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі \_\_\_\_\_

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій \_\_\_\_\_

1. Актуальність теми роботи \_\_\_\_\_

2. Постановка задачі \_\_\_\_\_

3. Аналіз предметної області \_\_\_\_\_

4. Метод чисельного аналізу \_\_\_\_\_

5. Результати обчислювального експерименту \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	6 – 12 листопада 2023 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	13 – 26 листопада 2023 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	27 листопада – 10 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	11 грудня – 24 грудня 2023 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	25 грудня 2023 р. – 9 січня 2024 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2024 р.	виконано

Дата видачі завдання 6 листопада 2023 р.

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ проф. Сидоров М.В.  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 67 с., 4 табл., 10 рис., 1 дод., 29 джерел.

АКТЮАТОР, БІГАРМОНІЧНИЙ ОПЕРАТОР, ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ, ІЗОТОННИЙ ОПЕРТОР, ІНВАРІАНТНИЙ КОНУСНИЙ ВІДРІЗОК, КРАЙОВА ЗАДАЧА, КРУГЛА ПЛАСТИНА, МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНА СИСТЕМА, МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ, ПРОГИН, РІВНЯННЯ ГАММЕРШТЕЙНА, ФУНКЦІЯ ГРІНА.

Об'єкт дослідження – явище прогину пластини круглої форми під дією електростатичної сили та гідростатичного тиску і відповідний процес роботи актюатора.

Мета роботи – дослідження методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна задачі Діріхле для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором, що виникає при моделюванні роботи актюатора.

Методи дослідження – метод двобічних наближень знаходження додатного розв'язку задачі Діріхле для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором, який використовує теорію нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах.

Кваліфікаційна робота присвячена застосуванню методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна для знаходження додатного розв'язку задачі Діріхле для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором, що описує процес прогину круглої пластини під дією електростатичної сили та гідростатичного тиску. Цей процес моделює роботу основного механізму мікроелектромеханічних систем – актюатора. Проведено аналіз предметної області та існуючих математичних моделей. Вихідна крайова задача зведена до нелінійного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке було досліджено методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах. Побудовано ітераційний процес знаходження додатного розв'язку

задачі та отримано умови його двобічної збіжності. Для конкретних значень параметрів моделі проведено низку обчислювальних експериментів.

Новизна роботи полягає у тому, що до математичного моделювання актюатора метод двобічних наближень було застосовано вперше. Результати, отримані у роботі, свідчать про успішність застосування розробленого алгоритму до моделювання розглядуваного процесу.

Оскільки в кваліфікаційній роботі було розглянуто моделювання актюатора, який складається з круглих пластин, то отримані результати можуть бути використані при проєктування та дослідженні поведінки ультразвукових перетворювачів, датчиків тиску, мініатюрних насосів і детекторів газу тощо.

## ABSTRACT

Introductory note: 67 pages, 4 tables, 10 figures, 1 appendix, 29 sources.

ACTUATOR, BOUNDARY VALUE PROBLEM, BIHARMONIC OPERATOR, CIRCULAR PLATE, DEFLECTION, DIRICHLET PROBLEM, GREEN'S FUNCTION, HAMMERSTEIN'S EQUATION, INVARIANT CONE SEGMENT, ISOTONIC OPERATOR, METHOD OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS, MICROELECTROMECHANICAL SYSTEM.

Object of research – the process of deflection of a circular plate under the action of hydrostatic force and static pressure and the corresponding process of actuator operation.

Purpose of work – research using the method of two-sided approximations based on the application of the Green's function for the Dirichlet problem to a nonlinear equation with a biharmonic operator arising in the modeling of actuator operation.

Methods of research – the method of two-sided approximations for finding a positive solution of the Dirichlet problem for a nonlinear equation with a biharmonic operator, using the theory of nonlinear operators in semi-ordered Banach spaces.

The qualification work is dedicated to the application of the method of two-sided approximations based on the use of the Green's function to find a positive solution of the Dirichlet problem for a nonlinear equation with a biharmonic operator, describing the deflection process of a circular plate under the influence of electrostatic force and hydrostatic pressure. This process models the operation of the main mechanism of microelectromechanical systems – the actuator. An analysis of the subject area and existing mathematical models has been conducted. The original boundary value problem is reduced to a nonlinear Hammerstein integral equation, which has been investigated using methods of the theory of nonlinear operators in semi-ordered Banach spaces. An iterative process for finding a positive solution to the problem has

been constructed, and conditions for its two-sided convergence have been obtained. Computational experiments were conducted for specific parameter values of the model.

The novelty of the work lies in the fact that the method of two-sided approximations was applied to the mathematical modeling of the actuator for the first time. The results obtained in the study demonstrate the successful application of the developed algorithm to model the considered process.

Since the qualification work considered the modeling of an actuator consisting of circular plates, the obtained results can be used in the design and study of the behavior of ultrasonic transducers, pressure sensors, miniature pumps, gas detectors, and similar devices.

## ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів .....	10
Вступ .....	11
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження .....	14
1.1 Основні відомості про мікроелектромеханічні системи .....	14
1.2 Рівняння з бігармонічним оператором як математичні моделі мікроелектромеханічних систем .....	17
1.3 Методи чисельного аналізу мікроелектромеханічних систем .....	20
1.4 Змістовна та формальна постановка задачі .....	21
1.5 Постановка задач дослідження .....	24
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання .....	25
2.1 Основні відомості з теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих банахових просторах .....	25
2.2 Метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором .....	35
2.3 Застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до математичного моделювання актюатора .....	40
Висновки за розділом 2 .....	44
3 Програмна реалізація .....	45
3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 11.1 .....	45
3.2 Алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання актюатора ..	45
3.3 Опис програми .....	46
Висновки за розділом 3 .....	47
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз .....	48
4.1 Обчислювальний експеримент для кругової області з врахуванням гідростатичного тиску .....	48

4.2 Обчислювальний експеримент для кругової області без врахування гідростатичного тиску .....	53
Висновки за розділом 4 .....	58
Висновки .....	59
Перелік джерел посилання .....	61
Додаток А Лістинг програми .....	64

**ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ**

МЕМС – мікроелектромеханічна система;

НЕМС – наноелектромеханічна система.

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Бурхливий розвиток науки та техніки протягом останніх 50-ти років призвів до значних змін у розробці та використанні більшості існуючих технічних засобів. Одним з факторів такого розвитку стала можливість мініатюризації електронних пристроїв, що в свою чергу викликало необхідність у дослідженні мініатюрних електричних систем, які згодом будуть названі мікроелектромеханічними системи (MEMS).

Спектр застосувань подібних пристроїв найрізноманітніший і з кожним роком збільшується: побутова електроніка (охоронні системи, мобільні телефони, комп'ютерна техніка), автомобілебудування (системи пасивного та активного захисту пасажирів), медичне устаткування, військова і авіаційна техніка тощо [5, 8, 10, 12].

Складність при проєктуванні та дослідженні роботи MEMS полягає в тому, що, по-перше, макрофізичні закони не можуть коректно описати поведінку мікрооб'єктів, і, по-друге, складові компоненти таких систем дуже чутливі й постає необхідність у проведенні великої кількості експериментів. Саме тому ефективним методом дослідження таких систем є математичне моделювання, перевагами якого є: зменшення витрат на дослідження, прискорення розробки, можливість аналізу різних умов і параметрів, прогнозування робочої характеристики, аналіз структурної надійності тощо.

Математичне моделювання MEMS приводить до необхідності дослідження задач математичної фізики. Зокрема, розглядаючи актюатор, який є основним елементом MEMS, необхідно аналізувати процес прогину пластини під дією електростатичної сили та гідростатичного тиску. Математичною моделлю даного процесу є нелінійне рівняння з бігармонічним оператором [15, 16, 22, 25, 26]:

$$D\Delta^2 w(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2}{2[d - w(\mathbf{x})]^2} + P,$$

де  $w(\mathbf{x})$  – величина прогину пластини;

$D$  – жорсткість на прогин;

$\epsilon_0$  – електрична стала;

$\epsilon$  – діелектрична проникність середовища;

$V$  – прикладена напруга;

$d$  – відстань між пластинами;

$P$  – рівномірний гідростатичний тиск.

Дослідження задач даного класу аналітичними методами у більшості випадків неможливе, а тому виникає необхідність використовувати чисельні методи.

Для розв'язання цієї задачі можуть бути використані метод скінченних різниць (метод сіток), метод лінеаризації Ньютон-Канторовича, варіаційні методи, метод двобічних наближень. Останній дає змогу не лише провести дослідження існування та єдиності розв'язків операторного рівняння, а й фактично їх знайти. Варто також відзначити, що даний метод має зручну апостеріорну оцінку наближеного розв'язку. Отже, тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

**Мета і завдання кваліфікаційної роботи.** Метою кваліфікаційної роботи є дослідження методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна задачі Діріхле для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором, що моделює роботу актюатора.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану предметної області;
- ознайомитися з чисельними методами розв'язання крайових задач для нелінійних задач математичної фізики;
- розробити алгоритм дослідження процесу функціонування актюатора методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна;
- програмно реалізувати розроблений алгоритм у системі комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica 11;
- провести обчислювальні експерименти та проаналізувати їх результати.

*Об'єктом дослідження є явище прогину пластини круглої форми під дією електростатичної сили та гідростатичного тиску і відповідний процес роботи актюатора.*

*Предметом дослідження є крайова задача, що моделює процес роботи актюатора, та метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна для її розв'язання.*

**Публікації.** Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на 27-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 10 – 12 травня 2023 р.) [7] та на II Міжнародній науково-практичній конференції англійською мовою «Навчання і викладання: після війни та під час миру» (м. Харків, 10 листопада 2023 р.) [29].

# 1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 1.1 Основні відомості про мікроелектромеханічні системи

Мікроелектромеханічна система (МЕМС) – це сукупність взаємопов’язаних об’ємних структур мікронних розмірів (механічних, зазвичай рухомих, і електричних) в єдиній конструктивній реалізації [11].

В основі роботи МЕМС лежать електромеханічні, електрохімічні, електронно-оптичні, фотохімічні процеси. Межами зміни лінійних розмірів МЕМС вважають діапазон 1 мкм – 1 мм [22].

Основоположною подією у розробці МЕМС стала лекція американського вченого Річарда Фейнмана на тему «Внизу багато місця», яку він виголосив у 1959 році на зборах Американського фізичного товариства. Науковець передбачив більшу частину наступних чотирьох десятиліть досліджень МЕМС: «Це приголомшливо малий світ. У 2000 році, коли вони озирнуться на наш вік, то будуть здивовані, чому лише у 60-ті роки хтось почав серйозно рухатись в цьому напрямку» [27].

На сьогодні МЕМС знайшли своє застосування у багатьох галузях науки та техніки. Це можуть бути гідравлічні та пневмоклапани, скальпелі та пінцети для роботи з об’єктами мікронних розмірів, мікромотори, мікронасоси, мікротурбіни, мікророботи, мікродатчики та виконавчі пристрої тощо. Нові технології дозволяють впровадити МЕМС у такі системи, як прилади збирання енергії і мікроелементи живлення [11]. У автомобілебудуванні широко використовують мікроакселерометри та мікрогіроскопи, які вмонтовані у систему пасивної безпеки автомобіля для визначення моменту викиду повітряної подушки [2].

За конструктивним виконанням розрізняють два типи мікросистем на основі МЕМС [11]:

– інтегральна (монолітна) мікросистема, мікропристрої та елементи якої нероздільно виконані та з’єднані в об’ємі або на поверхні кристала;

– гібридна мікросистеми, яка містить компоненти, виконані з використанням різних матеріалів і технологій та потім з'єднані між собою на єдиній конструктивній основі.

Мікроелектромеханічні системи складається з наступних функціональних модулів [2]:

а) виконавчий механізм (актюатор) – мікрорушій для приведення у рух необхідних механізмів;

б) сенсор – пристрій, що реагує на зміну певної фізичної величини і перетворює її до відповідного вигляду;

в) керований механізм – завершальна ланка ланцюга керування, що виконує певну дію (це може бути мікродзеркало, мікроклапани, мембранні мікропомпи тощо);

г) пристрої передавання енергії – для передавання енергії (руху, електричного струму, тиску рідин тощо);

д) пристрої керування (електричні чи механічні) – для приведення у дію відповідних актюаторів, часто з урахуванням інформації від сенсорів та відповідно до закладених принципів побудови МЕМС.

Основним елементом МЕМС є актюатор. Його функція полягає у тому, щоб, використовуючи фізичні закони, перетворювати один вид енергії на інший. Часто застосовуються електростатичні, термоелектричні, п'єзоелектричні, осмотичні, гідравлічні, пневматичні, електромагнітні та інші типи актюаторів [2]. У роботі буде розглянуто найпоширеніший актюатор – електростатичний, що заснований на перетворенні електростатичної сили на механічну за рахунок притягування між електродами з різними зарядами.

Залежно від виду рухомого елемента мікромеханічних систем розрізняють їх конструктивні варіанти (рис. 1.1): об'ємні (а); пластинчасті (б) стрижневі (в).

Об'ємні елементи, зазвичай, є об'єктами високої жорсткості, які мають зосереджену масу.

Стрижневі елементи – це елементи, довжина яких істотно перевищує характерні розміри поперечного перерізу (товщину та ширину). Стрижні, які працюють на вигин, називаються балками.

Пластинчасті елементи – це елементи, товщина яких значно менша за довжину та ширину.

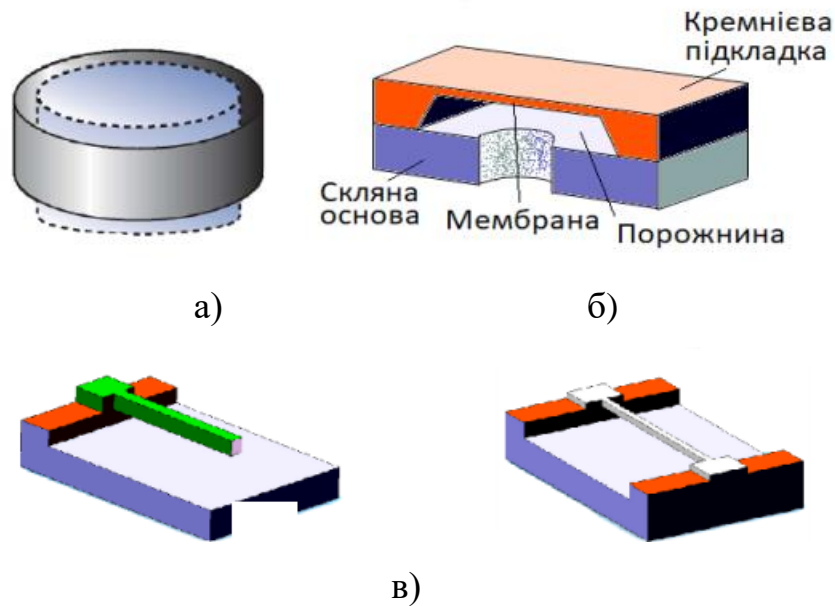


Рисунок 1.1 – Конструктивні варіанти МЕМС

Технології виготовлення мікроперетворювачів охоплюють мікроелектронні напівпровідникові технології та технології мікрообробки, які дають можливість реалізовувати різні види мікросистем. До них відносять мікрообробку поверхні, структури, мікрообробку методом електроерозії, а також технології типу LIGA та інші спеціальні технології [1].

У технологіях виготовлення мікросистем використовують дві основні групи матеріалів [11].

Перша група – це конструкційні (композиційні) матеріали. Спочатку основним конструкційним матеріалом для виготовлення МЕМС був монокристалічний кремній та його похідні (полікристалічний кремній, пористий кремній, діоксид кремнію тощо), але з часом стали використовуватися й інші матеріали. Прикладами можуть бути: скло, кераміка, деякі види пластику, вольфрам, нікель, мідь, золото, алмазоподібний вуглець тощо.

Друга група – активні або «інтелектуальні» матеріали. Вони виконують у МЕМС функції джерел руху, механізмів передачі руху, сенсорних середовищ і

середовищ активації, геометричної і об'ємної пам'яті. До матеріалів цієї групи належать: різні сплави титану і нікелю, пермалой, оксид цинку, кварц, п'єзокераміка, напівпровідникові сполуки.

## 1.2 Рівняння з бігармонічним оператором як математичні моделі мікроелектромеханічних систем

Оскільки актюатор є основною компонентною більшої MEMS, то постає необхідність у побудові й аналізі математичних моделей, які описують його функціонування. Отже, розглянемо актюатор, який складається з двох пластин. Верхня пластина закріплена на межі, а на деякій відстані паралельно їй закріплена нижня пластина. Під дією прикладної напруги верхня пластина відхиляється до фіксованої нижньої пластини.

Електричний потенціал системи  $E_W(w)$  визначається формулою

$$E_W(w) = - \int_{\Omega} \frac{C \cdot V^2}{d - w(\mathbf{x})} d\mathbf{x},$$

де  $C$  – коефіцієнт, що характеризує діелектричну проникність середовища;

$V$  – прикладена напруга;

$d$  – відстань між пластинами;

$w$  – величина прогину пластини;

$\Omega$  – обмежена область у  $\mathbb{R}^2$ .

Потенціальна енергія деформації розтягу дорівнює

$$E_S(w) = \int_{\Omega} \frac{T}{2} |\nabla w|^2 d\mathbf{x},$$

де  $T$  – коефіцієнт напруги розтягування.

Потенціальна енергія деформації прогину має вигляд

$$E_B(w) = \int_{\Omega} \frac{D}{2} |\Delta w|^2 d\mathbf{x},$$

де  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – жорсткість на прогин;

$E$  – модуль пружності Юнга;

$\nu$  – коефіцієнт Пуассона;

$h$  – товщина пластини.

Тоді повна потенціальна енергія системи дорівнює [20]

$$E = E_W(w) + E_S(w) + E_B(w) = \int_{\Omega} \left( -\frac{C \cdot V^2}{d - w(\mathbf{x})} + \frac{T}{2} |\nabla w|^2 + \frac{D}{2} |\Delta w|^2 \right) d\mathbf{x}.$$

Знаходячи для отриманого функціоналу його рівняння Ейлера-Остроградського, отримуємо

$$T \nabla w(\mathbf{x}) - D \Delta^2 w(\mathbf{x}) = \frac{C \cdot V^2}{[d - w(\mathbf{x})]^2}. \quad (1.1)$$

Крім рівняння (1.1) також використовуються й інші моделі. Розглянемо деякі з них.

Наприклад, авторами у [18] запропоновано еталонну математичну модель актюатора. Система складається з двох пластин, одна з яких закріплена на межі та під дією напруги відхиляється від свого стаціонарного положення  $w=0$  до нерухокої пластини, розташованої на висоті  $w=1$ . Тоді для прогину верхньої пластини отримуємо рівняння вигляду:

$$\alpha \Delta^2 w = \left( \beta \int_{\Omega} |\nabla w|^2 d\mathbf{x} + \gamma \right) \Delta w + \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-w)^2 \left( 1 + \chi \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{x}}{(1-w)^2} \right)}, \quad (1.2)$$

де  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \geq 0$  – коефіцієнти, що характеризують відповідно товщину, процеси розтягу, залежність зміни ємності, прикладену напругу;

$f(\mathbf{x})$  – функція, що моделює діелектричні властивості.

Якщо у моделі актюатора замість пластини розглядати мембрану, то було отримано наступну математичну модель [4, 21]

$$-\Delta w = \lambda \frac{f(\mathbf{x})}{(1-w)^2}. \quad (1.3)$$

Нехтуючи ефектами розтягу та враховуючи товщину пластини, у роботі [18] запропоновано розглянути для моделювання прогину пластини наступне рівняння:

$$\Delta^2 w = \lambda \frac{f(\mathbf{x})}{(1-w)^2}. \quad (1.4)$$

У роботах [15, 16, 22, 25 26] розглядають математичну модель МЕМС, яка є розвиненням та модифікацією моделі (1.4)

$$D \Delta^2 w(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2}{2[d - w(\mathbf{x})]^2} + P, \quad (1.5)$$

де  $\varepsilon_0$  – електрична стала;

$\varepsilon$  – діелектрична проникність середовища;

$P$  – рівномірний гідростатичний тиск, джерелом якого є, наприклад, повітря або рідина.

Рівняння (1.1) – (1.5) є найбільш уживаними під час математичного моделювання роботи актюатора як основного елемента МЕМС.

Розглядувана система породжує природні крайові умови, якими необхідно доповнити відповідні рівняння. Оскільки верхня пластина закріплена на межі  $\partial\Omega$ , то на ній маємо нульовий вертикальний прогин та нахил [24]. Таким чином, мають місце наступні крайові умови:

$$w|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.6)$$

де  $\mathbf{n}$  – зовнішня до межі  $\partial\Omega$  нормаль.

Крайові умови вигляду (1.6) для рівнянь четвертого порядку називають крайовими умовами Діріхле.

Важливим аспектом для належної роботи МЕМС є так званий ефект втягування «pull-in instability». Дія електричної напруги на МЕМС приводить до виникнення електростатичної сили з подальшим відхиленням рухомих компонентів у нове положення рівноваги. Якщо електростатична сила долає певну верхню межу, то прогин верхньої пластини стає настільки великим, що призводить до нестабільного функціонування системи. Значення напруги, при якій відбувається ефект втягування, називають напругою втягування «pull-in voltage» [22].

### 1.3 Методи чисельного аналізу мікроелектромеханічних систем

Оскільки, при дослідженні МЕМС отримуємо нелінійну крайову задачу, то до її розв'язання можна застосовувати відповідні методи математичної фізики, наприклад, метод скінченних різниць (метод сіток), метод лінеаризації Ньютон-Канторовича, метод двобічних наближень та інші.

Основою методу скінченних різниць є дискретизація розглядуваної області та заміна диференціального оператора еквівалентним йому різницеvim.

Результатом проведення цих процедур є система нелінійних алгебраїчних рівнянь. Для знаходження її розв'язку знову ж таки постає необхідність у застосуванні відповідних чисельних методів. У результаті застосування методу сіток отримується каркас наближеного розв'язку, який у подальшому необхідно інтерполювати, щоб отримати розв'язок у вигляді неперервної функції. До недоліків даного методу можна віднести складність апроксимації крайової задачі та розв'язання отриманої системи алгебраїчних рівнянь, відсутність зручної оцінки похибки.

Метод лінеаризації Ньютона-Канторовича базується на заміні нелінійної крайової задачі послідовністю лінійних крайових задач. Для розв'язання отриманих задач також можуть бути застосовані чисельні методи: варіаційні та проєкційні, метод скінченних різниць, метод скінченних елементів тощо. Недоліком даного методу є те, що він є залежним від вибору початкового наближення і, як і метод сіток, не має зручної оцінки похибки.

Метод двобічних наближень полягає у побудові двох послідовностей функцій, які зверху та знизу наближують точний розв'язок крайової задачі. За допомогою методу функцій Гріна розглядувана нелінійна задача замінюється на еквівалентне інтегральне рівняння Гаммерштейна, яке в свою чергу потребує дослідження методами нелінійного функціонального аналізу у напівупорядкованих банахових просторах. До переваг методу перш за все можна віднести зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

#### 1.4 Формальна та змістовна постановка задачі

Розглянемо актюатор (рис. 1.2), який складається з двох тонких, однорідних та ізотропних пластин круглої форми.

Верхня гнучка пластина має радіус  $R$ , товщину  $h$  і закріплена на межі. На неї діє рівномірний гідростатичний тиск  $P$ , джерелом якого є, наприклад, повітря або рідина. Нижня пластина закріплена паралельно на відстані  $d$ .

Вважаємо, що простір між верхньою та нижньою пластинами заповнено повітрям або вакуумом з діелектричною проникністю  $\epsilon$ .

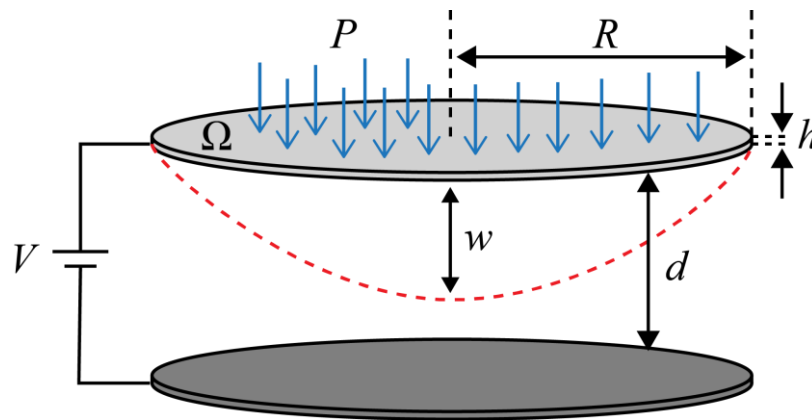


Рисунок 1.2 – Актюатор МЕМС

Під дією електростатичної сили та гідростатичного тиску верхня пластина відхиляється до фіксованої нижньої пластини і рівняння для прогину  $w$  має вигляд [26]:

$$D\Delta^2 w = F_e + P, \quad (1.7)$$

де  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – жорсткість на прогин;

$E$  – модуль пружності Юнга;

$\nu$  – коефіцієнт Пуассона;

$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}$  – бігармонічний оператор;

$F_e = \frac{\epsilon_0 \epsilon V^2}{2(d-w)^2}$  – електростатична сила;

$\epsilon_0$  – електрична стала;

$\epsilon$  – діелектрична проникність середовища;

$V$  – прикладена напруга між пластинами;

$P$  – рівномірний гідростатичний тиск.

Враховуючи крайові умови (1.6), отримуємо наступну крайову задачу, що моделює прогин круглої закріпленої на межі пластини під дією електростатичної сили та гідравлічного тиску

$$\Delta^2 w(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2}{2D[d - w(\mathbf{x})]^2} + \frac{P}{D}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.8)$$

$$w|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.9)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ;

$\Omega$  – круг радіуса  $R$  з центром у початку координат;

$\mathbf{n}$  – зовнішня до межі  $\partial\Omega$  нормаль.

У (1.8), (1.9) перейдемо до безрозмірних величин:

$$u = \frac{w}{d}, \quad x = \frac{x_1}{R}, \quad y = \frac{x_2}{R}.$$

Після заміни отримуємо наступну крайову задачу

$$\Delta^2 u = \frac{\lambda}{(1-u)^2} + \mu, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.10)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.11)$$

де

$$\lambda = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2 R^4}{2Dd^3}, \quad (1.12)$$

$$\mu = \frac{PR^4}{Dd}. \quad (1.13)$$

Модель (1.10), (1.11) використовується при дослідженні поведінки ультразвукових перетворювачів [15], датчиків тиску [13], мініатюрних насосів [28] і детекторів газу [19].

### 1.5 Постановка задач дослідження

Розглянувши основні математичні моделі актюатора МЕМС та методи їх чисельного аналізу, можемо зробити висновок про перспективність використання методу двобічних наближень до моделювання розглядуваного процесу.

Таким чином, метою кваліфікаційної роботи є аналіз методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна нелінійної задачі Діріхле з бігармонічним оператором, що моделює роботу актюатора.

Досягнення поставленої мети реалізуємо виконанням наступних задач:

- провести огляд основних понять теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах та питань розв’язності нелінійних рівнянь з ізотонним оператором;
- застосувати метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв’язання нелінійної задачі Діріхле з бігармонічним оператором (1.10), (1.11);
- провести алгоритмізацію поставленої задачі відповідно до обраного чисельного методу;
- програмно реалізувати розроблений алгоритм у системі комп’ютерної алгебри Wolfram Mathematica 11;
- провести обчислювальні експерименти та проаналізувати їх результати.

## 2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

### 2.1 Основні відомості з теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих банахових просторах

На теорії нелінійних рівнянь у напівупорядкованих банахових просторах базується застосування методу двобічних наближень. Також вона широко застосовується в диференціальних та інтегральних рівняннях, теорії управління, нелінійних коливаннях тощо.

При дослідженні нелінійних рівнянь у напівупорядкованих банахових просторах спиратимемося на роботи Красносельського М. А [23], Опойцева В. І. і Хуродзе Т. А [6], Сидорова М. В. [9], Шувар Б. А. та інших [3].

Розглянемо дійсний банахів простір  $\mathcal{U}$ . Нехай  $\theta$  – нульовий елемент простору  $\mathcal{U}$ .

Відрізком  $[u, w]$ , що з'єднує точки  $u$  і  $w$  банахового простору  $\mathcal{U}$ , називається множина елементів вигляду  $tu + (1-t)w$  при  $0 \leq t \leq 1$ .

Променем, який проходить через точку  $u \in \mathcal{U}$  ( $u \neq \theta$ ) називається сукупність точок з  $\mathcal{U}$  вигляду  $tu$ , де  $t \geq 0$ .

Множина  $M$  – підмножина банахового простору  $\mathcal{U}$  – називається опуклою, якщо разом з кожними двома точками вона повністю містить і відрізок, що їх з'єднує.

Замкнена опукла множина  $\mathcal{K}$  – підмножина банахового простору  $\mathcal{U}$  – називається конусом, якщо разом з кожною точкою  $u$  вона містить промінь, що проходить через  $u$ , та якщо з того, що  $u$ ,  $-u \in \mathcal{K}$  випливає, що  $u = \theta$ .

Наприклад, у банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$  неперервних у замкненій обмеженій області  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$  конусом є множина невід'ємних функцій

$$\mathcal{K}_+ = \{u(\mathbf{x}) \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}.$$

Одним з ефективних інструментів при вивченні лінійних і нелінійних відображень у банахових просторах є поняття напівупорядкованості.

Простір  $\mathcal{U}$  називається напівупорядкованим, якщо для деяких пар елементів  $u, w \in \mathcal{U}$  визначено бінарне відношення  $\leq$  таке, що:

- а) із  $u \leq w$  випливає, що  $\alpha u \leq \alpha w$  при  $\alpha \geq 0$  і  $\alpha w \leq \alpha u$  при  $\alpha < 0$ ;
- б) із  $u \leq w$  і  $u \geq w$  випливає, що  $u = w$ ;
- в) із  $u_1 \leq w_1$  і  $u_2 \leq w_2$  випливає, що  $u_1 + u_2 \leq w_1 + w_2$ ;
- г) із  $u \leq w$  і  $w \leq v$  випливає, що  $u \leq v$ .

Будь-який конус  $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$  дозволяє визначити у просторі  $\mathcal{U}$  напівупорядкованість наступним чином: для  $u, w \in \mathcal{U}$   $u \leq w$ , якщо  $u - w \in \mathcal{K}$ . Варто відзначити, що із замкненості конуса  $\mathcal{K}$  випливає можливість переходу до границі в нерівностях: якщо  $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ ,  $\|w_n - w\| \rightarrow 0$ , коли  $n \rightarrow \infty$ , та  $u_n \leq w_n$  при всіх  $n = 1, 2, \dots$ , то  $u \leq w$ .

У просторі  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  напівупорядкованість за допомогою конуса  $\mathcal{K}_+$  означає, що

$$u \leq w := u(\mathbf{x}) \leq w(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Надалі домовимося, що ситуацію  $u \geq w$ ,  $u \neq w$  позначатимемо  $u > w$ .

Елемент  $u \in \mathcal{K}$  називається додатним, тобто  $u \geq \theta$ .

Конусним відрізком у напівупорядкованому конусом просторі  $\mathcal{U}$  називається множина вигляду

$$\langle v, w \rangle := \{u \in \mathcal{U} : v \leq u \leq w\},$$

тобто  $u \in \langle v, w \rangle := (u - v \in \mathcal{K} \wedge w - u \in \mathcal{K})$ .

У напівупорядкованих банахових просторах конус  $\mathcal{K}$  називається тілесним, якщо він містить внутрішні точки. Наприклад, конус  $\mathcal{K}_+$  в просторі

$C(\bar{\Omega})$  є тілесним. Внутрішніми точками цього конуса є функції  $u(\mathbf{x})$  з додатним мінімумом:  $\min_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u(\mathbf{x}) > 0$ .

Одним із різновидів конусів у напівупорядкованих банахових просторах є нормальний конус, який визначається наступним чином: якщо існує таке число  $N(\mathcal{K})$ , що з  $\theta \leq u \leq w$  випливає

$$\|u\| \leq N(\mathcal{K}) \|w\|,$$

то конус  $\mathcal{K}$  – нормальний.

Число  $N(\mathcal{K})$  називається константою нормальності конуса  $\mathcal{K}$ . При  $N(\mathcal{K}) = 1$  отримуємо гострий конус і казатимемо, що норма є монотонною.

Також має місце твердження: конус  $\mathcal{K}$  є нормальним тоді і тільки тоді, коли існує  $\delta > 0$  таке, що

$$\|l_1 + l_2\| \geq \delta$$

для будь-яких  $l_1, l_2 \in \mathcal{K}$  таких, що  $\|l_1\| = \|l_2\| = 1$ .

Конус  $\mathcal{K}_+$  у просторі  $C(\bar{\Omega})$  є нормальним і навіть гострим.

Нехай  $u_0$  – деякий фіксований елемент конуса  $\mathcal{K}$  ( $u_0 \neq \theta$ ). Елемент  $w \in \mathcal{U}$  називається  $u_0$ -вимірним, якщо існує таке число  $\gamma > 0$ , що

$$-\gamma u_0 \leq w \leq \gamma u_0.$$

Множина  $u_0$ -вимірних елементів  $w \in \mathcal{U}$  позначається через  $\mathcal{E}_{u_0}$ . Для всіх  $w \in \mathcal{E}_{u_0}$  можна вести норму

$$\|w\|_{u_0} = \min\{\gamma : -\gamma u_0 \leq w \leq \gamma u_0\},$$

що має назву  $u_0$ -норми.

Якщо конус  $\mathcal{K}$  є нормальним, то зі збіжності за  $u_0$ -нормою випливає збіжність за нормою простору  $\mathcal{U}$ .

При дослідженні оператора  $T$ , який діє в банаховому просторі  $\mathcal{U}$ , ефективно застосовувати апарат теорії напівупорядкованості простору  $\mathcal{U}$  деяким конусом  $\mathcal{K}$ . Це можливо у тих випадках, коли  $T$  має деякі властивості, пов'язані з напівупорядкованістю. Розглянемо основні типи операторів, які знадобляться в подальшому.

Оператор  $T: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  називається цілком неперервним, якщо він є неперервним і кожну обмежену множину перетворює в компакту.

Оператор  $T: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  називається додатнім, якщо він залишає інваріантним (перетворює в себе) конус  $\mathcal{K}$ :

$$\text{якщо } u \in \mathcal{K}, \text{ то } T(u) \in \mathcal{K}.$$

Важливим підкласом додатних операторів є  $u_0$ -додатні оператори. Зафіксуємо деякий ненульовий елемент  $u_0 \in \mathcal{K}$ . Позначимо через  $K(u_0)$  множину таких елементів  $u \in \mathcal{K}$ , для яких можна вказати  $\alpha = \alpha(u) > 0$  і  $\beta = \beta(u) > 0$  такі, що

$$\alpha u_0 \leq u \leq \beta u_0.$$

Тоді, якщо додатній оператор  $T$  переводить ненульовий елемент конуса  $\mathcal{K}$  в  $K(u_0)$ , то він називається  $u_0$ -додатнім.

Для  $u_0$ -додатного оператора для будь-якого ненульового  $u \in \mathcal{K}$  знайдуться такі  $\alpha = \alpha(u) > 0$  і  $\beta = \beta(u) > 0$ , що

$$\alpha u_0 \leq T(u) \leq \beta u_0.$$

Важливими властивостями операторів, що діють в напівупорядкованому просторі, є властивості монотонності. Можна виділити три типи операторів: монотонний, антимонотонний та гетеротонний.

Монотонним (ізотонним) оператором називається оператор  $T$ , що діє в  $\mathcal{U}$ , якщо з  $u, w \in \mathcal{U}$ ,  $u \geq w$  випливає  $T(u) \geq T(w)$ .

Антимонотонним (антитонним) оператором називається оператор  $T$ , що діє в  $\mathcal{U}$ , якщо з  $u, w \in \mathcal{U}$ ,  $u \geq w$  випливає  $T(u) \leq T(w)$ .

Гетеротонним оператором називається такий оператор  $T$ , що діє в  $\mathcal{U}$ , якщо він допускає діагональне подання  $T(u) \equiv \hat{T}(u, u)$ , причому супровідний оператор  $\hat{T}: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  такий, що  $\hat{T}(v, w)$  монотонно зростає за  $v$  та спадає за  $w$ , тобто:

а) із  $v_1, v_2 \in \mathcal{U}$ ,  $v_1 \geq v_2$  випливає  $\hat{T}(v_1, w) \geq \hat{T}(v_2, w)$ ;

б) із  $w_1, w_2 \in \mathcal{U}$ ,  $w_1 \geq w_2$  випливає  $\hat{T}(v, w_1) \leq \hat{T}(v, w_2)$ .

Легко зрозуміти, що вибір супровідного оператора  $\hat{T}(u, w)$  завжди є неоднозначним. Наприклад, якщо  $\hat{T}(u, w)$  – супровідний оператор для  $T$ , то оператор  $\hat{T}(u, w) + u - w$  також буде супровідним для  $T$ . В той же час, при розв'язанні конкретних задач ця свобода вибору дає можливість отримати певну вигоду, але, варто зазначити, що коли мова йде про гетеротонний оператор  $T$ , завжди мають на увазі, що супровідний оператор  $\hat{T}$  вказано конкретно (зафіксовано).

Очевидно, що монотонний та антимонотонний оператори є окремими випадками гетеротонного, оскільки для першого за супровідний оператор можна вказати  $\hat{T}(u, w) \equiv T(v)$ , а для другого –  $\hat{T}(u, w) \equiv T(w)$ .

Оператори, що діють у просторі з конусом, мають важливу властивість, яка пов'язана з характером росту (зміни) значення оператора по відношенню до тих чи інших класів приросту аргументу.

Увігнутиим називається оператор  $T: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ , якщо він є  $u_0$ -додатним і для будь-яких  $u \in \mathcal{K}(u_0)$  і  $\tau \in (0, 1)$

$$T(\tau u) \geq \tau T(u)$$

причому рівність неможлива.

Отже, для увігнутого оператора  $T$  існує такий ненульовий елемент  $u_0 \in \mathcal{K}$ , що виконуються наступні умови:

а) для будь-якого  $u \in \mathcal{K}$  мають місце нерівності

$$\alpha u_0 \leq T(u) \leq \beta u_0,$$

де  $\alpha = \alpha(u) > 0$ ,  $\beta = \beta(u) > 0$ ;

б) для кожного такого  $u \in \mathcal{K}$ , що  $\alpha_1 u_0 \leq u \leq \beta_1 u_0$  ( $\alpha_1 = \alpha_1(u) > 0$ ,  $\beta_1 = \beta_1(u) > 0$ ), виконуються нерівності

$$T(\tau u) \geq \tau T(u), \quad T(\tau u) \neq \tau T(u),$$

де  $\tau \in (0, 1)$ .

Можна довести наступні твердження:

а) якщо оператор  $T$  є увігнутим, то оператор  $cT$ , де  $c$  – довільне додатне число, також буде увігнутим;

б) якщо оператор  $T$  є увігнутим і монотонним, то цю властивість матимуть і оператори  $T^2, T^3, \dots$ ;

в) якщо оператори  $T_1$  і  $T_2$  є увігнуті з однією і тією ж функцією  $u_0$ , то з тією ж функцією  $u_0$  буде увігнутим і оператор  $T_1 + T_2$ .

Увігнутий оператор  $T$  називається  $u_0$ -увігнутим, якщо він є  $u_0$ -додатним та для будь-яких  $u \in K(u_0)$  і  $\tau \in (0, 1)$  знайдеться таке  $\eta = \eta(u, \tau) > 0$ , що

$$T(\tau u) \geq \tau(1 + \eta)T(u).$$

Можна довести наступні твердження:

а) якщо оператор  $T \in u_0$ -увігнутим, то оператор  $cT$ , де  $c$  – довільне додатне число, також буде  $u_0$ -увігнутим;

б) якщо оператор  $T_1 \in u_0$ -увігнутим, а оператор  $T_2 \in u_0$ -увігнутим з тією ж функцією  $u_0$ , то оператор  $T_1 + T_2$  буде  $u_0$ -увігнутий.

Розглянемо рівняння

$$u = T(u), \quad (2.1)$$

де  $T$  – ізотонний оператор, що діє в банаховому просторі  $\mathcal{U}$ , напівупорядкованому конусом  $\mathcal{K}$ .

Наведемо умови, за яких це рівняння матиме в конусі  $\mathcal{K}$  принаймні один ненульовий розв'язок  $u^*$ , тобто розглянемо питання існування нерухомої точки цього оператора.

Конусний відрізок  $\langle v, w \rangle$  називається інваріантним для ізотонного оператора  $T$ , якщо виконуються нерівності

$$T(v) \geq v, \quad T(w) \leq w.$$

Зауважимо також, що інваріантність конусного відрізка  $\langle v, w \rangle$  означає, що  $T(\langle v, w \rangle) \subset \langle v, w \rangle$ .

Варто зазначити, що введення у множині пар елементів  $(v, w)$  норми  $\|(v, w)\|_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} = \|v\| + \|w\|$  робить  $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$  банаховим простором і дозволяє говорити про неперервність і повну неперервність відображення  $T: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ .

При доведенні існування нерухомої точки оператора важливим є принцип Шаудера: якщо цілком неперервний оператор  $T$  перетворює обмежену опуклу та замкнену множину  $M$  в себе, то на  $M$  оператор  $T$  має хоча б одну нерухому точку  $u^*$ .

Таким чином, має місце наступне твердження [23].

Теорема 2.1. Нехай конусний відрізок  $\langle v, w \rangle$  є інваріантним для ізотонного оператора  $T$ , що діє в банаховому просторі  $\mathcal{U}$ , який напівупорядкований конусом  $\mathcal{K}$ . Якщо конус  $\mathcal{K}$  є нормальним, а оператор  $T$  є цілком неперервним, то у оператора  $T$  існує хоча б одна нерухома точка  $u^*$  на  $\langle v, w \rangle$ .

Доведення теореми 2.1 безпосередньо випливає з принципу Шаудера.

Зауважимо, що теорема 2.1 не гарантує єдиності розв'язку рівняння (2.1).

Розглянемо ізотонний оператор  $T$  на інваріантному конусному відрізку  $\langle v_0, w_0 \rangle$ . Для відшукання нерухомої точки оператора  $T$  скористаємося ітераційним процесом

$$\begin{aligned} v^{(k+1)} &= T(v^{(k)}), \quad w^{(k+1)} = T(w^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ v^{(0)} &= v_0, \quad w^{(0)} = w_0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Через інваріантність конусного відрізка  $\langle v_0, w_0 \rangle$  отримаємо

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= T(v^{(0)}) \geq v^{(0)}, \\ w^{(1)} &= T(w^{(0)}) \leq w^{(0)}. \end{aligned}$$

Застосовуючи далі до цієї нерівності ізотонний оператор  $T$ , отримуємо

$$\begin{aligned} v^{(2)} &= T(v^{(1)}) = T(T(v^{(0)})) \geq v^{(0)}, \\ w^{(2)} &= T(w^{(1)}) = T(T(w^{(0)})) \leq w^{(0)}. \end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес індуктивно, приходимо до ланцюжка нерівностей

$$\dots \geq T(v^{(k)}) \geq \dots \geq T(v^{(0)}) \geq v^{(0)}, \quad (2.3)$$

$$\dots \leq T(w^{(k)}) \leq \dots \leq T(w^{(0)}) \leq w^{(0)}. \quad (2.4)$$

Якщо послідовність (2.3) збігається і оператор  $T$  є неперервним, то можна перейти до границі і зробити таким чином висновок про існування нерухомої точки  $v^*$  оператора  $T$ . Аналогічні висновки можна зробити і для послідовності (2.4). Відмінність полягає лише в тому, що, загалом кажучи, вона може збігатися до іншої нерухомої точки  $w^*$  оператора  $T$ .

Очевидно, що для будь-якої нерухомої точки  $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$  оператора  $T$  матиме місце нерівність

$$v^* \leq u^* \leq w^*. \quad (2.5)$$

Якщо ж наперед відомо, що нерухома точка  $u^* \in \langle v, w \rangle$  є єдиною, то обидві послідовності  $\{T^k(v)\}$  і  $\{T^k(w)\}$  збігатимуться до однієї і тієї ж границі  $u^*$ .

Нехай встановлено, що ізотонний оператор  $T$  на інваріантному конусному відрізку  $\langle v_0, w_0 \rangle$  має єдину нерухому точку. Тоді, об'єднавши нерівності (2.3) – (2.5), отримуємо ланцюжок нерівностей вигляду

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0. \quad (2.6)$$

Отже, отримано дві послідовності  $\{v^{(k)}\}$ ,  $\{w^{(k)}\}$ , які знизу та зверху наближають шуканий розв'язок  $u^*$ . Нерівності (2.6) як раз і характеризують ітераційний процес (2.2) як метод двобічних наближень.

Особливістю відшукування наближеного розв'язку рівняння (2.1) з ізотонним оператором  $T$  є те, що ітераційні процеси (2.2) є незалежними, тому

обчислювальну реалізацію можна проводити, використовуючи розпаралелювання обчислень.

Якщо за наближений розв'язок рівняння (2.1) на  $k$ -й ітерації брати

$$u^{(k)} = \frac{v^{(k)} + w^{(k)}}{2},$$

то, оскільки  $v^{(k)} \leq u^{(k)} \leq w^{(k)}$  і  $v^{(k)} \leq u^* \leq w^{(k)}$ , матиме місце оцінка

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \|w^{(k)} - v^{(k)}\|.$$

Звідси випливає, що ітерації потрібно проводити до виконання нерівності

$$\|w^{(k)} - v^{(k)}\| \leq 2\varepsilon,$$

і тоді з точністю  $\varepsilon$  можна покласти, що  $u^* \approx u^{(k)}$ .

Розглянемо тепер умови, що гарантують (разом з умовами теореми 2.1) існування та єдиність додатного розв'язку рівняння (2.1), а також двобічну збіжність до нього послідовних наближень (2.2).

Єдиність розв'язку рівняння (2.1) гарантує така умова: на інваріантному конусному відрізку  $\langle v_0, w_0 \rangle$  система рівнянь

$$T(v) = v, T(w) = w \tag{2.7}$$

не має розв'язків таких, що  $v \neq w$ .

У загальному випадку перевірка виконаності цієї умови є досить складною задачею, тому її можна замінити слабшою.

Теорема 2.2. Нехай виконано припущення теореми 2.1. Крім того, нехай оператор  $T$  є неперервним і для нього має місце співвідношення: для всіх  $u > \theta$  і  $v, v + u \in \langle v_0, w_0 \rangle$

$$T(v+u) \geq T(v)+u.$$

Тоді ітераційний процес (2.2), що починається з  $v^{(0)} = v_0$ ,  $w^{(0)} = w_0$ , двобічно збігається до єдиної нерухомої точки  $u^*$  оператора  $T$ .

Теорема 2.3. Нехай виконано припущення теореми 2.1. Крім того, існує таке  $\gamma \in (0, 1)$ , що для всіх на  $v, w \in \langle v_0, w_0 \rangle$  справджується умова

$$\|T(v) - T(w)\| \leq \gamma \|v - w\|.$$

Тоді ітераційний процес (2.2), який починається зі значень  $v^{(0)} = v_0$ ,  $w^{(0)} = w_0$ , двобічно збігається до єдиної нерухомої точки  $u^*$  оператора  $T$ .

Теорема 2.4. Нехай виконано припущення теореми 2.1. Крім того, нехай оператор  $T$  є  $u_0$ -увігнутим та для нього побудовано інваріантний конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle \subset K(u_0)$ . Тоді оператор  $T$  має єдину нерухому точку  $u^* \in K(u_0)$ , до якої збігається ітераційний процес (2.1), який починається зі значення  $v^{(0)} = v_0$ ,  $w^{(0)} = w_0$ .

## 2.2 Метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором

Розглянемо крайову задачу

$$\Delta^2 u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.8)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.9)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.10)$$

Вважатимемо, що функція  $f(\mathbf{x}, u)$  є нелінійною, неперервною і додатною при  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ .

Нехай  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна задачі (2.8) – (2.10). Тоді задача (2.8) – (2.10) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (2.11)$$

Рівняння (2.11) розглядатимемо у банаховому просторі  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  функцій, неперервних у  $\bar{\Omega}$ . Норма у  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  вводиться за правилом

$$\|u\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|.$$

Виділимо у  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  конус

$$\mathcal{K}_+ = \{u(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$$

невід’ємних функцій. Конус  $\mathcal{K}_+$  у  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  є нормальним (і навіть гострим). Напівупорядкованість у просторі  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  за допомогою конуса  $\mathcal{K}_+$  вводиться наступним чином:

$$\text{для } u, v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \quad u \leq v, \text{ якщо } v - u \in \mathcal{K}_+,$$

тобто

$$u \leq v, \text{ якщо } u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Якщо існує класичний розв’язок задачі (2.8) – (2.10), тобто така функція  $u^* \in \mathcal{C}^4(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ , яка задовольняє рівняння (2.8) і умови (2.9), (2.10), то ця

функція також задовольняє й інтегральне рівняння (2.11). Якщо ж класичного розв'язку не існує, то на підставі інтегрального рівняння (2.11) введемо поняття узагальненого розв'язку задачі (2.8) – (2.10). Отже, узагальненим розв'язком крайової задачі (2.8) – (2.10) називатимемо функцію  $u^* \in \mathcal{K}_+$ , яка є розв'язком інтегрального рівняння (2.11).

Пов'яжемо з рівнянням (2.11) нелінійний інтегральний оператор, що діє у  $C(\bar{\Omega})$  за правилом

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (2.12)$$

Враховуючи (2.12) рівняння (2.11) матиме вигляд

$$u = T(u). \quad (2.13)$$

Рівняння (2.13) розглядатимемо у банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$ , напівупорядкованому конусом  $\mathcal{K}_+$ .

Властивості оператора  $T$  можемо об'єднати у наступне твердження.

Лема 2.1. Оператор  $T$  вигляду (2.12), де  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна задачі (2.8) – (2.10), що розглядається у просторі  $C(\bar{\Omega})$ , напівупорядкованому конусом  $\mathcal{K}_+$ , має такі властивості:

- а) є ізотонним оператором, якщо функція  $f(\mathbf{x}, u)$  монотонно зростає за  $u$  для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ;
- б) є непевним і навіть цілком неперервним;
- в) є додатним оператором;
- г) є  $u_0$ -додатним оператором, де функція  $u_0(\mathbf{x})$  визначається рівністю

$$u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (2.14)$$

якщо для функції Гріна має місце оцінка

$$\varphi(\mathbf{s})u_0(\mathbf{x}) \leq G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \leq \psi(\mathbf{s})u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{s} \in \bar{\Omega}, \quad (2.15)$$

де  $\varphi(\mathbf{s})$ ,  $\psi(\mathbf{s})$  – невід’ємні, неперервні у  $\bar{\Omega}$  функції;

д) є увігнутим і навіть  $u_0$ -увігнутим, якщо для будь-якого  $u$  та при будь-якому  $\tau \in (0,1)$  виконується нерівність

$$f(\mathbf{x}, \tau v) > \tau f(\mathbf{x}, v). \quad (2.16)$$

У конусі  $\mathcal{K}_+$  виділимо інваріантний конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle v^0, w^0 \rangle$  умовами, які набувають вигляду

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \geq v^0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (2.17)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \leq w^0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (2.18)$$

Зазначимо, що саме інваріантний конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  є апріорною оцінкою невідомого розв’язку  $u^*$ , а тому процес його побудови є важливим етапом. Можна навести деякі рекомендації [9]:

а) якщо  $f(\mathbf{x}, 0) > 0$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ , то кінці інваріантного конусного відрізка  $\langle v_0, w_0 \rangle$  можна шукати у вигляді  $v_0 = 0$ ,  $w_0 = \beta$ ;

б) якщо  $f(\mathbf{x}, 0) = 0$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  або  $f(\mathbf{x}, u)$  є невизначеною при  $u = 0$ , то кінці інваріантного конусного відрізка  $\langle v_0, w_0 \rangle$  слід шукати у вигляді  $v_0(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x})$ ,  $w_0(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x})$ , де  $0 < \alpha < \beta$ , а функція  $u_0(\mathbf{x})$  визначається рівністю (2.13).

Ітераційний процес сформуємо за схемою (2.2):

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.19)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.20)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}). \quad (2.21)$$

За наближений розв'язок крайової задачі (2.8) – (2.10) на  $k$ -й ітерації приймаємо функцію

$$u^{(k)} = \frac{w^{(k)} + v^{(k)}}{2}.$$

В такому випадку отримуємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})).$$

Звідси випливає, що ітераційний процес потрібно проводити до виконання нерівності

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\delta$$

і тоді з точністю  $\delta$  можна вважати, що  $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$ .

З огляду на функцію  $f(\mathbf{x}, u)$  та функцію Гріна  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  необхідно, використовуючи теореми 2.2 – 2.4, зробити висновок про єдиність розв'язку рівняння (2.13).

### 2.3 Застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до математичного моделювання актюатора

Розглянемо задачу Діріхле для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором, яка описує процес прогину круглої пластини під дією електростатичної сили та гідростатичного тиску, що моделює роботу актюатора. Таким чином, отримуємо наступну крайову задачу

$$\Delta^2 u = \frac{\lambda}{(1-u)^2} + \mu, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.22)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.23)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.24)$$

де  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  – круг одиничного радіуса з центром у початку координат;

$$\lambda = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2 R^4}{2Dd^3};$$

$$\mu = \frac{PR^4}{Dd};$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{ – жорсткість на прогин;}$$

$E$  – модуль пружності Юнга;

$\nu$  – коефіцієнт Пуассона;

$\varepsilon_0$  – електрична стала;

$\varepsilon$  – діелектрична проникність середовища;

$P$  – рівномірний гідростатичний тиск;

$h$  – товщина пластини;

$d$  – відстань між пластинами;

$R$  – радіус пластини;

$V$  – прикладена напруга.

Для задачі (2.22) – (2.24) функція Гріна  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  має вигляд [17]

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{x} - \mathbf{s}|^2 \int_1^{\frac{|\mathbf{x}|\mathbf{s} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}} \frac{v^2 - 1}{v} dv, \quad (2.25)$$

де  $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ .

Зазначимо, що  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq 0$ , якщо  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \bar{\Omega}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$  [17].

Таким чином, задача (2.22) – (2.24) буде еквівалентною інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \frac{\lambda}{(1 - u(\mathbf{s}))^2} + \mu \right] ds. \quad (2.26)$$

З рівнянням (2.26) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор, що діє у  $C(\bar{\Omega})$  за правилом

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \frac{\lambda}{(1 - u(\mathbf{s}))^2} + \mu \right] ds. \quad (2.27)$$

Враховуючи останнє співвідношення, рівняння (2.26) матиме вигляд  $u = T(u)$ . Розглядатимемо його у банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$  функцій, неперервних у  $\bar{\Omega}$ . У просторі  $C(\bar{\Omega})$  виділимо конус  $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$  невід'ємних функцій.

Очевидно, що оператор  $T$  є додатним.

Функція  $f(\mathbf{x}, u) = \frac{\lambda}{(1 - u)^2} + \mu$  є неперервною і додатною при  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,

$0 < u < 1$  і монотонно зростає за  $u$ , а отже, інтегральний оператор (2.27) буде ізотонним.

Враховуючи лему 2.1, оператор  $T$  вигляду (2.27) буде додатним та, навіть,  $u_0$ -додатним оператором.

Для оператора  $T$  побудуємо інваріантний конусний відрізок.

Оскільки  $f(0) = \lambda + \mu > 0$ , то шукатимемо його у вигляді  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$ , де  $0 < \beta < 1$ . Тоді умови (2.17), (2.18), які виділяють інваріантний конусний відрізок набувають вигляду

$$(\lambda + \mu) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \geq 0, \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

$$\left[ \frac{\lambda}{(1-\beta)^2} + \mu \right] \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \beta, \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Оскільки функція Гріна  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  вигляду (2.25) є невід'ємною, то перша нерівність завжди виконуватиметься, а другу можемо записати у вигляді

$$\frac{\lambda M}{(1-\beta)^2} + \mu M \leq \beta, \quad (2.28)$$

де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$ .

З нерівності (2.28) випливає, що

$$\lambda \leq \frac{4(1-\mu M)^3}{27M}.$$

Для швидшої збіжності ітерацій величина

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) = \beta$$

має бути якомога меншою, тому за  $\beta$  слід обрати найменший корінь рівняння

$$\lambda M = (1-\beta)^2(\beta - \mu M). \quad (2.29)$$

Ітераційний процес сформулюємо за схемою

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \frac{\lambda}{(1-v^{(k)}(\mathbf{s}))^2} + \mu \right] d\mathbf{s}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (2.30)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \frac{\lambda}{(1-w^{(k)}(\mathbf{s}))^2} + \mu \right] d\mathbf{s}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (2.31)$$

$$v^0(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}) = 0, \quad w^0(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}) = \beta. \quad (2.32)$$

Перевіримо, за яких умов ітераційний процес (2.30) – (2.32) двобічно збігається до єдиного додатного розв'язку задачі (2.22) – (2.24).

При  $0 < v, w < \beta$ , має місце нерівність

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}, w) - f(\mathbf{x}, v)| &= \left| \frac{\lambda}{(1-w(\mathbf{x}))^2} + \mu - \frac{\lambda}{(1-v(\mathbf{x}))^2} - \mu \right| = \left| \frac{(2v - v^2 - 2w + w^2)\lambda}{(1-w)^2(1-v)^2} \right| = \\ &= \left| \frac{(-2(w-v) + (w-v)(w+v))\lambda}{(1-w)^2(1-v)^2} \right| = \lambda \left| \frac{w+v-2}{(1-w)^2(1-v)^2} \right| |w-v| \leq L|w-v|, \end{aligned}$$

де  $L = \frac{2\lambda}{(1-\beta)^3}$ .

Тоді

$$\begin{aligned} \|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| &= \|T(w^{(k)}) - \hat{T}(v^{(k)})\| = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} [T(w^{(k)})(\mathbf{x}) - T(v^{(k)})(\mathbf{x})] = \\ &= \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [f(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s})) - f(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}))] d\mathbf{s} \leq \\ &\leq LM \max_{\mathbf{x} \in \Omega} [w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})] = LM \|w^{(k)} - v^{(k)}\|. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq (LM)^{k+1} \|w^{(0)} - v^{(0)}\|.$$

Тоді рівність  $v^* = w^*$  матиме місце, якщо  $\gamma = LM < 1$ . Таким чином, можемо сформулювати наступне твердження.

Теорема 2.5. Якщо рівняння (2.29) має розв'язок  $\beta \in (0; 1)$  і  $\frac{2\lambda M}{(1-\beta)^3} < 1$ , то крайова задача (2.22) – (2.24) має єдиний додатний розв'язок  $u^*(\mathbf{x})$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес (2.30) – (2.32).

## Висновки за розділом 2

У другому розділі було наведено основні відомості з теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих банахових просторах, що є підґрунтям для застосування методу двобічних наближень. Розглянуто застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором у загальному випадку, детально наведено умови існування та єдиності розв'язку нелінійних рівнянь з ізотонним оператором.

Розглядуваний метод застосовано до розв'язання крайової задачі, яка описує процес прогину круглої пластини під дією електростатичної сили та гідростатичного тиску, що є математичною моделлю актюатора. Побудовано та досліджено еквівалентне інтегральне рівняння Гаммерштейна, розглянуто процес побудови інваріантного конусного відрізка, сформовано ітераційний процес методу двобічних наближень та наведено умови його збіжності до єдиного додатного розв'язку крайової задачі.

## 3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

### 3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 11.1

Використання математичних пакетів, таких як Mathematica, Mathcad, MATLAB, Maple та інших, визначає важливий аспект продуктивності науковців та фахівців у різних сферах. Ці інструменти, із схожим інтерфейсом, дозволяють здійснювати різноманітні математичні обчислення – від загальних до спеціалізованих, а також наділені потужними засобами для візуалізації результатів.

Однією з визнаних систем комп'ютерної алгебри є Wolfram Mathematica, створена у 1988 році компанією Wolfram Research. На сьогодні ця фірма є одним з провідних гравців у сфері програмного забезпечення для обчислень, веб-технологій та хмарних обчислень, а також активно впроваджує інновації в області наукових та технічних розробок [14].

До сильних сторін Wolfram Mathematica можна віднести зручний інтерфейс, велику кількість вбудованих функцій, доступ до довідникового матеріалу, потужні інструменти для символічних та чисельних обчислень, можливість виконання паралельних обчислень, широкі можливості візуалізації, що допомагають ефективно подавати результати чисельних обчислень.

### 3.2 Алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання актюатора

Алгоритм розв'язання крайової задачі, яка описує процес прогину круглої пластини, що моделює роботу актюатора методом двобічних наближень полягає у виконанні наступних кроків:

- а) задати значення параметрів  $h$ ,  $d$ ,  $R$ ,  $E$ ,  $\nu$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $P$ ,  $V$  та точність  $\delta > 0$ ;
- б) перевести задані значення у Міжнародну систему одиниць СІ;

в) за формулою (2.29) знайти значення  $\beta$ , а отже, побудувати для оператора  $T$  інваріантний конусний відрізок;

г) перевірити виконання умови збіжності відповідно до теореми 2.5;

д) побудувати еквівалентне інтегральне рівняння з ізотонним оператором  $T$ ;

е) побудувати послідовність верхніх  $\{w^{(k)}\}$  та нижніх  $\{v^{(k)}\}$  наближень за ітераційною схемою (2.30) – (2.32);

є) якщо  $\|w^{(k)} - v^{(k)}\| < 2\delta$ , то записати наближений розв'язок задачі

$$u^{(k)} = \frac{w^{(k)} + v^{(k)}}{2},$$

при цьому  $\|u^* - u^{(k)}\| < \delta$ , тобто з точністю  $\delta$  можна вважати, що  $u^* \approx u^{(k)}$ .

### 3.3 Опис програми

Блок «Definitions» – у ньому визначаються вхідні дані задачі: значення параметрів  $h, d, R, E, v, \varepsilon_0, \varepsilon, P, V$  переведені у міжнародну систему СІ, крок сітки чисельного інтегрування, а також точність обчислень.

Блок «Green's function» – у ньому визначається функція Гріна, відповідно до формули (2.25), її подання у полярній системі координат та обчислення значення  $M = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} G(x,s) ds$ .

Блок «Vetha calculations» – у ньому розв'язується рівняння (2.29) для знаходження значення  $\beta$  для побудови кінців інваріантного конусного відрізка.

Блок «Convergence» – у ньому перевіряється виконання умов збіжності ітераційного процесу, тобто виконання умови теореми 2.5.

Блок «Iteration method» – у ньому реалізовано ітераційний процес методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна. При знаходженні

каркасу наближеного розв'язку застосовується чисельне інтегрування, а для отримання наближень  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  у вигляді неперервних функцій – апарат інтерполяції.

Лістинг програми наведено у додатку А.

### Висновки за розділом 3

У третьому розділі розглянуто можливості системи комп'ютерної алгебри Mathematica 11.1, проведено алгоритмізацію процесу розв'язання крайової задачі, що є математичною моделлю актюатора методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Наведено опис програмної реалізації.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

### 4.1 Обчислювальний експеримент для кругової області з врахуванням гідростатичного тиску

Обчислювальний експеримент проведено для крайової задачі

$$\Delta^2 u = \frac{\lambda}{(1-u)^2} + \mu, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.1)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.3)$$

де  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  – круг одиничного радіуса с центром у початку координат;

$$\lambda = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2 R^4}{2Dd^3};$$

$$\mu = \frac{PR^4}{Dd};$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{ – жорсткість на прогин;}$$

$E$  – модуль пружності Юнга;

$\nu$  – коефіцієнт Пуассона;

$\varepsilon_0$  – електрична стала;

$\varepsilon$  – діелектрична проникність середовища;

$V$  – прикладена напруга;

$P$  – рівномірний гідростатичний тиск;

$h$  – товщина пластини;

$d$  – відстань між пластинами;

$R$  – радіус пластини.

Задача (4.1) – (4.3) описує процес прогину круглої пластини під дією електростатичної сили та гідростатичного тиску, який моделює роботу актюатора.

Задаємо значення параметрів

$$h = 20 \text{ мкм}, d = 1 \text{ мкм}, R = 250 \text{ мкм}, E = 169 \text{ ГПа}, \nu = 0,3, \\ \varepsilon_0 = 8,8541878 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}, \varepsilon = 1,005, P = 200 \text{ кПа}, V = 200 \text{ В}. \quad (4.4)$$

Знаходимо, що

$$\lambda = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2 R^4}{2 D d^3} = 5,61501,$$

Для функції Гріна (2.25) маємо, що  $M = 0,0156249$ . Інваріантний конусний відрізок шукаємо у вигляді  $\langle 0, \beta \rangle$ , де  $\beta$  – визначається з рівності (2.29). Обчисливши отримуємо, що  $\beta = 0,257909$ .

Тоді  $\frac{2\lambda M}{(1-\beta)^3} = 0,4294... < 1$ , а отже, виконана умова збіжності ітераційного процесу відповідно до теореми 2.5.

Задаємо точність  $\delta = 10^{-4}$ . Проводимо ітераційний процес (2.30) – (2.32). Процес зійшовся із заданою точністю за п'ять ітерацій. На рисунку 4.1 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = \overline{0, 5}$ , у перерізі  $x_2 = 0$ . На рисунку 4.2 наведено графік ліній рівня наближеного розв'язку  $u^{(5)}(\mathbf{x})$ , а на рисунку 4.3 – поверхні наближеного розв'язку.

У таблиці 4.1 наведено значення оцінки похибки  $\delta_k$ ,  $k = \overline{0, 5}$  на кожній ітерації.

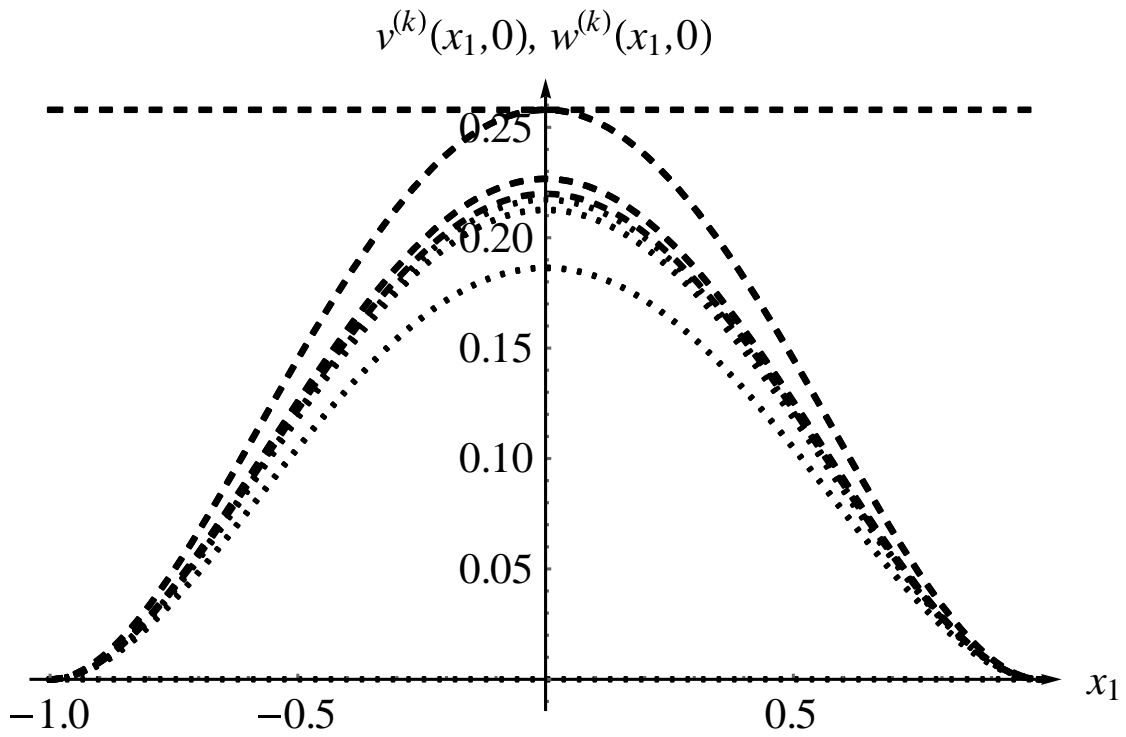


Рисунок 4.1 – Графік верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = \overline{0, 5}$ , у перерізі  $x_2 = 0$

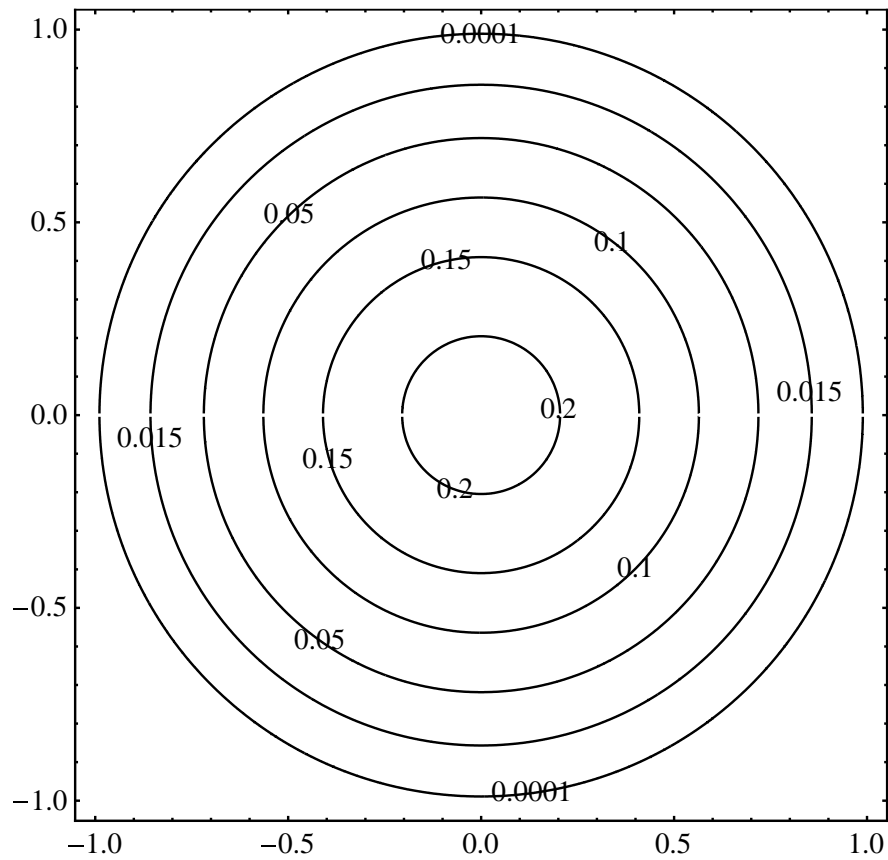


Рисунок 4.2 – Графік ліній рівня наближеного розв'язку  $u^{(5)}(\mathbf{x})$

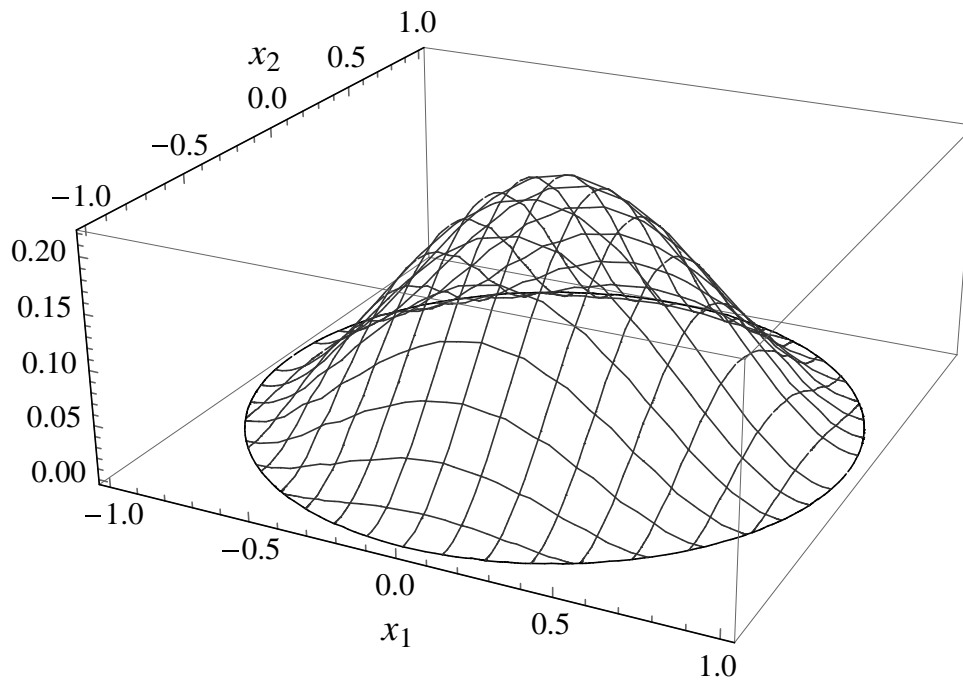


Рисунок 4.3 – Графік поверхні наближеного розв’язку  $u^{(5)}(\mathbf{x})$

Таблиця 4.1 – Значення оцінки похибки  $\delta_k$ ,  $k = \overline{0, 5}$ , на кожній ітерації

$k$	0	1	2	3	4	5
$\delta_k$	$0,13 \cdot 10^0$	$0,36 \cdot 10^{-1}$	$0,70 \cdot 10^{-2}$	$0,13 \cdot 10^{-2}$	$0,24 \cdot 10^{-3}$	$0,44 \cdot 10^{-4}$

Бачимо, що один знак після коми встановлюється за одну ітерацію.

Задача (4.1) – (4.3) з зазначеними у (4.4) параметрами була чисельно розв’язана у [15, 25].

У [25] було застосовано покрокову лінеаризацію рівняння (4.1), а потім метод скінченних різниць. Авторами було отримано значення максимального відхилення пластини –  $0,22639$  мкм.

У [15] авторами було запропоновано розглянути замість моделі (4.1) – (4.3) спрощену модель та застосувати до неї метод Гальоркіна. Провівши обчислювальний експеримент для параметрів моделі, які задані у (4.4), ними було отримано максимальне відхилення пластини, що дорівнює  $0,225$  мкм.

При застосуванні методу двобічних наближень нами отримано, що максимальне відхилення пластини становить  $0,21829$  мкм.

Бачимо, що отримане за допомогою методу двобічних наближень значення максимального відхилення пластини менше ніж отримані в [15, 25], але цілком узгоджується з ними. Це може вказувати на те, що застосовані авторами спрощення при розгляді моделі (4.1) – (4.3) призводять до більш грубих оцінок максимального відхилення пластини. При застосуванні методу двобічних наближень було отримано значення похибки наближеного розв’язку, яке дорівнює  $0,44 \cdot 10^{-4}$ , а тому з такою точністю можемо стверджувати, що максимальне відхилення пластини дорівнює 0,21829 мкм для параметрів (4.4).

Дослідимо залежність прогину пластини від гідростатичного тиску. У таблиці 4.2 наведено значення тиску  $P$ , кількість виконаних ітерацій  $N$ , оцінка похибки  $\delta$  та значення максимального відхилення пластини  $u_{\max}$ , а на рисунку 4.4 наведено графіки наближених розв’язків  $u^*(x_1, x_2)$  у перерізі  $x_2 = 0$ .

Таблиця 4.2 – Значення гідростатичного тиску, кількість виконаних ітерацій, оцінка похибки та значення максимального відхилення пластини

$P$ , кПа	$N$	$\delta$	$u_{\max}$ , мкм
100	4	$0,83 \cdot 10^{-4}$	0,15771
200	5	$0,44 \cdot 10^{-4}$	0,21829
300	6	$0,37 \cdot 10^{-4}$	0,27970
400	7	$0,54 \cdot 10^{-4}$	0,34558
500	8	$0,95 \cdot 10^{-4}$	0,41762

З таблиці 4.2 та рисунку 4.4 бачимо, що при збільшенні гідростатичного тиску відхилення пластини збільшується, що є природнім для розглядуваної моделі.

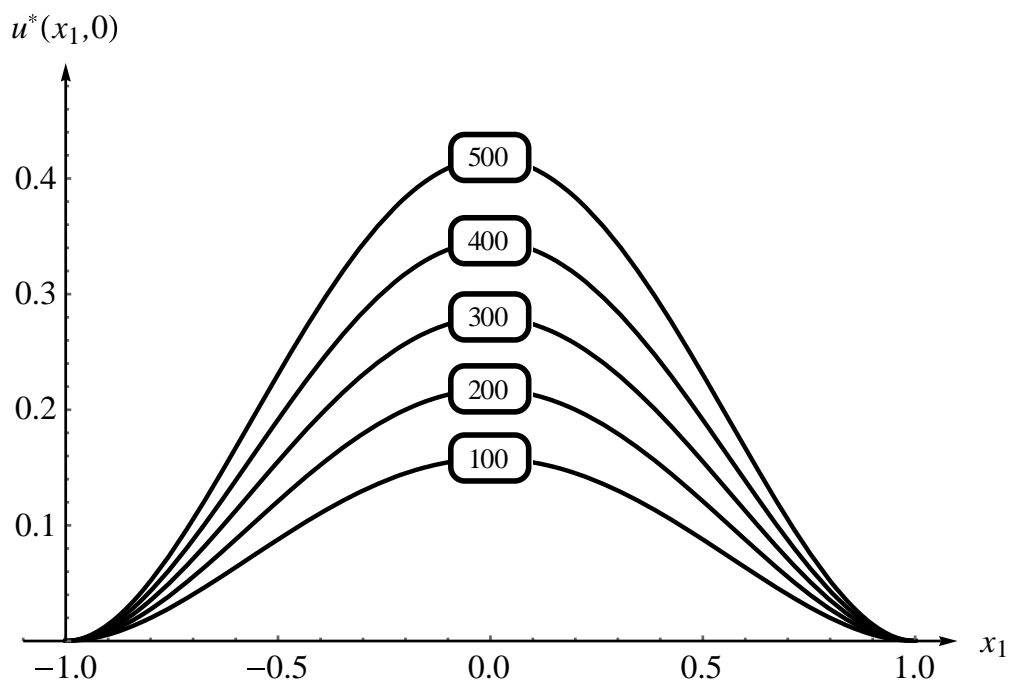


Рисунок 4.4 – Графіки наближених розв’язків  $u^*(x_1, x_2)$  у перерізі  $x_2 = 0$  для різних значень тиску

#### 4.2 Обчислювальний експеримент для кругової області без врахування гідростатичного тиску

Розглянемо модель (4.1) – (4.3). Припустимо, що на верхню пластину не діє гідростатичний тиск, тобто  $P = 0$ , а отже, і  $\mu = 0$ .

Задаємо значення параметрів

$$h = 1 \text{ мкм}, \quad d = 1 \text{ мкм}, \quad R = 40 \text{ мкм}, \quad E = 169 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0,3,$$

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{М}}, \quad \varepsilon = 1, \quad V = 90 \text{ В}. \quad (4.5)$$

Знаходимо, що

$$\lambda = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2 R^4}{2 D d^3} = 5,93158.$$

Інваріантний конусний відрізок шукаємо у вигляді  $\langle 0, \beta \rangle$ , де  $\beta$  – визначається з рівності (2.29). Обчисливши отримуємо, що  $\beta = 0,119561$ .

Тоді  $\frac{2\lambda M}{(1-\beta)^3} = 0,2715... < 1$ , а отже, виконана умова збіжності ітераційного процесу відповідно до теореми 2.5.

Задаємо точність  $\delta = 10^{-4}$ . Проводимо ітераційний процес (2.30) – (2.32). Процес зійшовся із заданою точністю за чотири ітерації. На рисунку 4.5 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = \overline{0, 4}$ , у перерізі  $x_2 = 0$ . На рисунку 4.6 наведено графік ліній рівня наближеного розв'язку  $u^{(4)}(\mathbf{x})$ , а на рисунку 4.7 – поверхні наближеного розв'язку.

У таблиці 4.3 наведено значення оцінки похибки  $\delta_k$ ,  $k = \overline{0, 4}$ , на кожній ітерації.

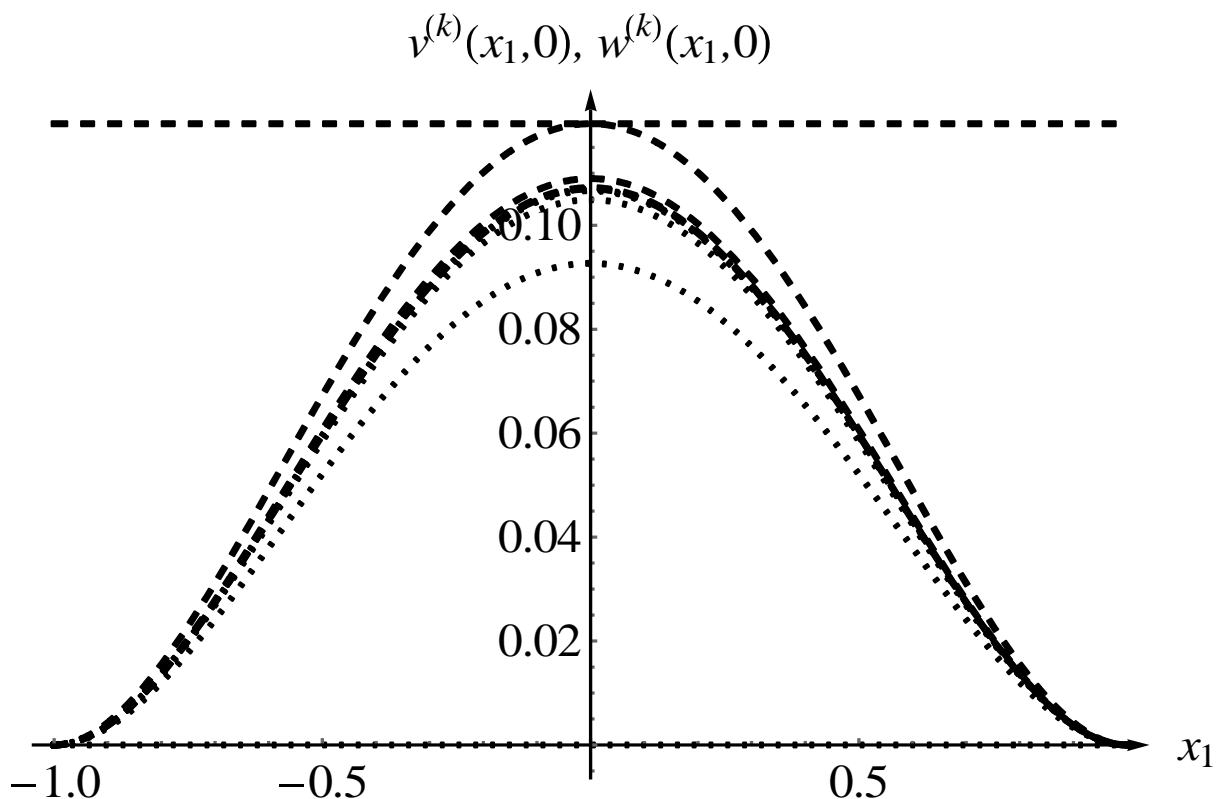


Рисунок 4.5 – Графік верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = \overline{0, 4}$ , у перерізі  $x_2 = 0$

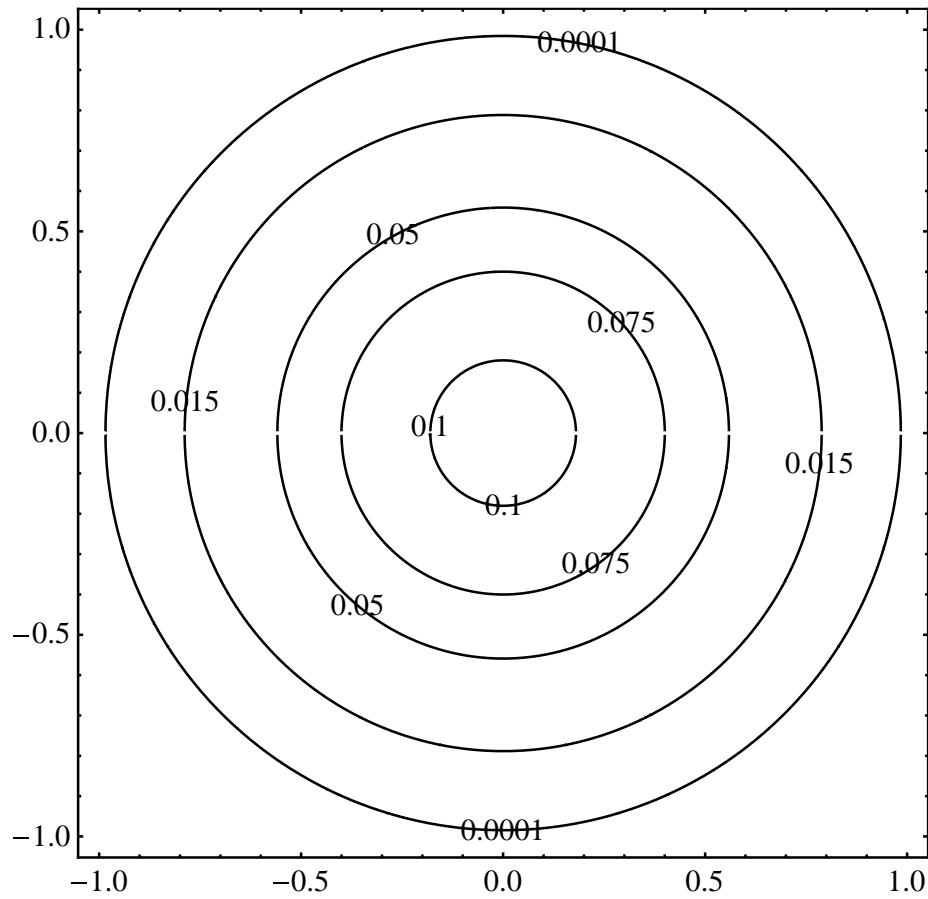


Рисунок 4.6 – Графік ліній рівня наближеного розв'язку  $u^{(4)}(\mathbf{x})$

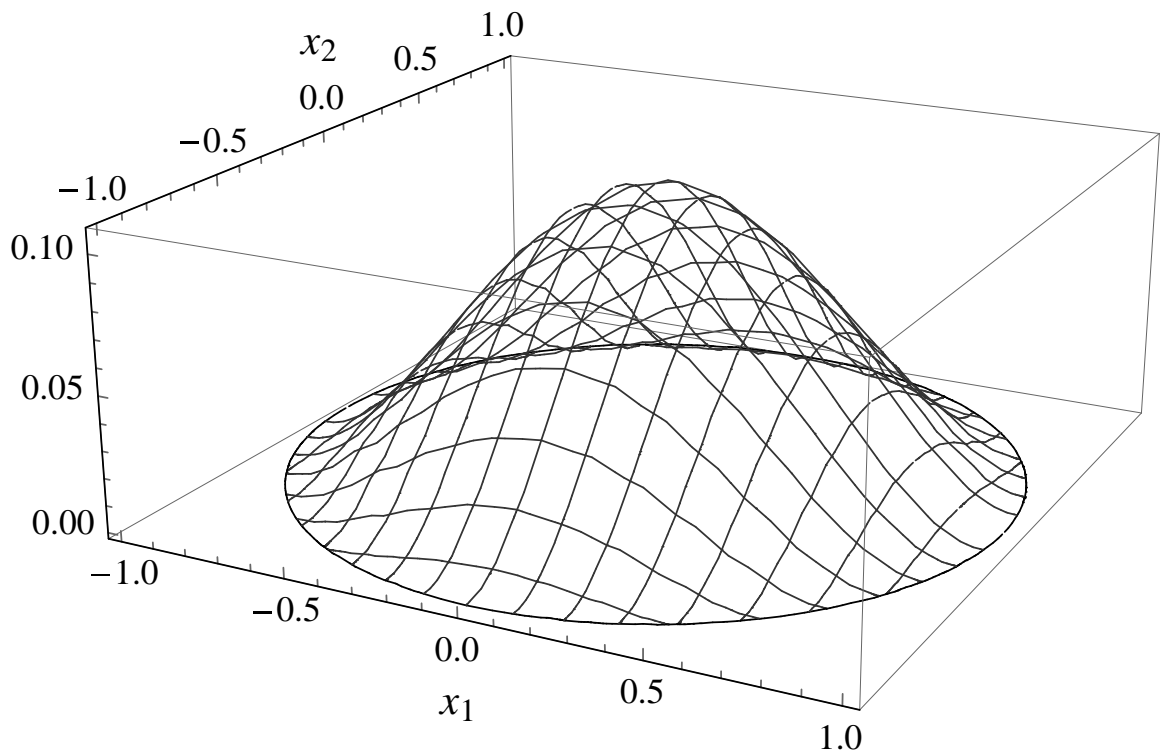


Рисунок 4.7 – Графік поверхні наближеного розв'язку  $u^{(4)}(\mathbf{x})$

Таблиця 4.3 – Значення оцінки похибки  $\delta_k$ ,  $k = \overline{0, 4}$ , на кожній ітерації

$k$	0	1	2	3	4
$\delta_k$	$0,60 \cdot 10^{-1}$	$0,13 \cdot 10^{-1}$	$0,20 \cdot 10^{-2}$	$0,30 \cdot 10^{-3}$	$0,43 \cdot 10^{-4}$

З таблиці 4.3 бачимо, що один знак після коми встановлюється майже за одну ітерацію.

Задача (4.1) – (4.3) при  $P=0$  з зазначеними у (4.5) параметрами була чисельно розв’язана у [22, 26].

У [22] було запропоновано застосувати метод Гальоркіна до розв’язання задачі (4.1) – (4.3). Авторами було отримано значення максимального відхилення пластини – 0,107 мкм.

У [26] для знаходження розв’язку автори застосували метод скінченних елементів. Для параметрів, які задані у (4.5), ними було отримано максимальне відхилення пластини, що дорівнює 0,11 мкм.

При застосуванні методу двобічних наближень отримали, що максимальне відхилення пластини становить 0,10696 мкм.

Бачимо, що отримане за допомогою методу двобічних наближень значення максимального відхилення пластини менше ніж отримане у [22, 26], але добре узгоджене зі вказаними значеннями.

Дослідимо залежність прогину пластини від прикладеної напруги. У таблиці 4.4 наведено значення напруги  $V$ , кількість виконаних ітерацій  $N$ , оцінка похибки  $\delta$  та значення максимального відхилення пластини  $u_{\max}$ .

На рисунку 4.8 наведено графіки наближених розв’язків  $u^*(x_1, x_2)$  у перерізі  $x_2 = 0$  для різних значень напруги.

З таблиці 4.4 та рисунку 4.8 бачимо, що при збільшенні прикладеної напруги відхилення пластини збільшується, що є природнім для розглядуваної моделі. В той же час можемо помітити збільшення кількості ітерацій для досягнення заданої точності.

Таблиця 4.4 – Значення прикладеної напруги, кількість виконаних ітерацій, оцінка похибки та значення максимального відхилення пластини

$V, \text{В}$	$N$	$\delta$	$u_{\max}, \text{МКМ}$
30	2	$0,15 \cdot 10^{-5}$	0,01044
50	2	$0,36 \cdot 10^{-4}$	0,02972
70	3	$0,26 \cdot 10^{-4}$	0,06071
90	4	$0,43 \cdot 10^{-4}$	0,10696
110	6	$0,65 \cdot 10^{-4}$	0,17693

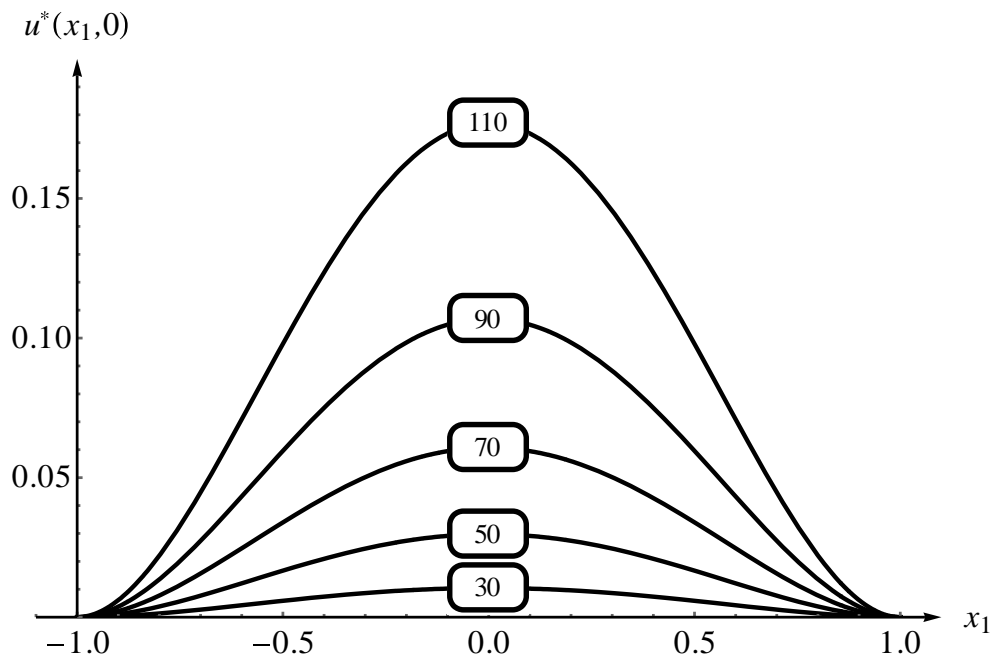


Рисунок 4.8 – Графіки наближених розв'язків  $u^*(x_1, x_2)$  у перерізі  $x_2 = 0$  для різних значень напруги.

Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на 27-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 10 – 12 травня 2023 р.) [7] та на II Міжнародній науково-практичній конференції англійською мовою «Навчання і викладання: після війни та під час миру» (м. Харків, 10 листопада 2023 р.) [29].

## Висновки за розділом 4

У четвертому розділі проведено обчислювальний експеримент з використанням розробленого програмного продукту для розв'язання крайової задачі, що є математичною моделлю актюатора методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна.

Для конкретних значень параметрів моделі отримано чисельні розв'язки задачі й проведено порівняння з розв'язками, отриманими іншими авторами з використанням різних чисельних методів та при застосуванні додаткових спрощень моделі. Проведено обчислювальний експеримент для моделі у випадку відсутності гідростатичного тиску.

Проведено аналіз моделі при зміні початкових параметрів: тиску та прикладеної напруги.

## ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було проведено дослідження процес прогину круглої пластини під дією електростатичної сили та гідростатичного тиску, що описує роботу основного механізму мікроелектромеханічних систем – актюатора. Математичною моделлю даного процесу є задача Діріхле для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором. Для знаходження її додатного розв'язку вперше було запропоновано застосувати метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна.

1. Проведено аналіз предметної області та розглянуто низку математичних моделей та чисельних методів їх розв'язання, що описують процес роботи актюатора. На основі цього сформульовано основні етапи дослідження розглядуваного процесу, обрано математичну модель – задачу Діріхле для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором, та для її дослідження запропоновано метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна.

2. За допомогою методу функцій Гріна розглядувана задача була зведена до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке в свою чергу було досліджено методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих банахових просторах. Сформовано ітераційний процес методу двобічних наближень та наведено умови його збіжності до єдиного додатного розв'язку крайової задачі.

3. Процес розв'язання розглядуваної задачі було алгоритмізовано то виконано програмну реалізацію у системі комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica 11.

4. Використовуючи розроблений програмний продукт, було проведено серію обчислювальних експериментів для конкретних параметрів моделі та отримано результати, які демонструють високу точність розробленого алгоритму у порівнянні з вже існуючими.

5. Отримані у ході виконання кваліфікаційної роботи результати можуть бути використані при проектуванні та дослідженні роботи МЕМС, основою яких є актюатор.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Гераїмчук М. Д., Івахів О. В., Репетило Т. М. Основи проектування МЕМС перетворювачів механічних величин в електричну: навч. посіб. для студентів спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. 108 с.
2. Гірняк Ю. Мікроелектромеханічні системи у сучасному приладобудуванні. *Вимірвальна техніка та метрологія*. 2008. № 69. С. 97–102.
3. Двосторонні наближені методи / Б. А. Шувар, М. І. Копач, С. М. Ментинський, А. Ф. Обшта. Івано-Франківськ : ВДВ ЦІТ, 2007. 515 с.
4. Кончаковська О. С., Сидоров М. В. Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2018. № 39. С. 33–41.
5. Лобур М., Мельник М. Основи мікросистемних пристроїв : навч. посіб. Львів: НУ «Львівська політехніка», 2015. 258 с.
6. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
7. Савченко А. В. Застосування методу двобічних наближень до розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором. *27-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті»* : зб. матеріалів форуму. Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2023. С. 189–190.
8. Семенець В. В., Невлюдов І. Ш., Палагін В. А. Введення в мікросистемну техніку та нанотехнології. Харків : ТОВ «Компанія СМІТ», 2011. 416 с.
9. Сидоров М. В. Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики : дис. на здобуття наук. ступеня д-ра фіз.-мат. наук : 01.05.02 / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2019. 486 с.
10. Теслюк В. Моделі та інформаційні технології синтезу мікроелектромеханічних систем : монографія. Львів : ПП «Вежа і Ко», 2008. 192 с.

11. Філяшкін М. К. Мікроелектромеханічні системи : навч. посіб. Київ : НАУ, 2019. 276 с.
12. Яворський Н. Б., Теслюк В. М., Литвинова Є. І. Комп'ютерні методи в інженерії мікроелектромеханічних систем: навч. посіб. Львів : Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2015. 280 с.
13. A new analytical solution for diaphragm deflection and its application to a surfacemicromachined pressure sensor / W. P. Eaton, F. Bitsie, J. H. Smith, D. W. Plummer. *International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems : Technical Proceedings*. 1999. P. 640–643.
14. About Wolfram. URL: <https://www.wolfram.com/company> (дата звернення: 28.12.2023).
15. Ahmad B., Pratap R. Elasto-electrostatic analysis of circular microplates used in capacitive micromachined ultrasonic transducers. *IEEE Sensors Journal*. 2010. № 10 (11). P. 1767–1773.
16. An Improved Method for the Mechanical Behavior Analysis of Electrostatically Actuated Microplates Under Uniform Hydrostatic Pressure / Z. Li, L. Zhao, Z. Jiang, Z. Ye, Y. Zhao. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2015. № 2 (24). P. 474–485.
17. Boggio T. Sulle funzioni di Green d'ordine  $m$ . *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. 1905. № 20. P. 97–135.
18. Cassani D., Bezerra J., Ghossoub N. On a Fourth Order Elliptic Problem with a Singular Nonlinearity. *Advanced Nonlinear Studies*. 2009. № 9. P. 177–197.
19. Detection of individual gas molecules adsorbed on graphene / F. Schedin, A. K. Geim, S. V. Morozov [та ін.]. *Nature Mater*. 2007. № 6. P. 652–655.
20. Esposito P., Ghossoub N., Guo Y. Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS. New York : American Mathematical Soc. 2010. 318 p.
21. Ghossoub N., Guo Y. On the Partial Differential Equations of Electrostatic MEMS Devices: Stationary Case. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 2007. № 5 (38). P. 1423–1449.

22. Koochi A., Abadyan M. Nonlinear differential equations in micro/nano mechanics : Application in micro/nanostructures and electromechanical systems. Amsterdam : Elsevier, 2020. 270 p.
23. Krasnoselskii M. A. Positive solutions of operator equations. Groningen : P. Noordhoff, 1964. 379 p.
24. Lin F., Yang Y. Nonlinear non-local elliptic equation modelling electrostatic actuation. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2007. № 463 (2081). P. 1323–1337.
25. Mechanical behavior of a circular micro plate subjected to uniform hydrostatic and non-uniform electrostatic pressure / A. Nabian, G. Rezazadeh, M. Haddad-derafshi, A. Tahmasebi. *Microsystem Technologies*. 2008. № 14. P. 235–240.
26. Modeling of electrostatically actuated microplates / L. Zhao, Z. Jiang, Z. Li, Y. Zhao. *Q.-A. Huang (Ed.). Micro Electro Mechanical Systems*. 2018. № 3. P. 99–153.
27. Pelesko J. A., Bernstein D. H. Modeling MEMS and NEMS. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2003. 364 p.
28. Saif M. T. A., Alaca B. E., Sehitoglu H. Analytical modeling of electrostatic membrane actuator for micro pumps. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 1999. № 3 (8). P. 335–345.
29. Savchenko A. Sidorov M. The application of the method of two-sided approximation to solving the Dirichlet problem for a nonlinear equation with a biharmonic operator. *II International Youth Scientific & Practical Conference «LEARNING & TEACHING: after War and during Peace»*. Kharkiv, 2023. P 225.