

УДК 515.2

ГІЛЬОШУВАННЯ ЯК СПОСІБ ГРАФІЧНОГО ЗАХИСТУ БЛАНКІВ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

Челомбітько В.Ф.

к.т.н., доцент, кафедра Медіасистем та технологій,
Харківський національний університет радіоелектроніки

***Анотація.** Наведено методи захисту документів і цінних паперів з застосуванням гільоширних композицій, використання орнаменту як способу опису та побудови гільоша, застосування в геометричному моделюванні й дизайні кривих з монотонними функціями кривини, поняття кривини лінії для опису натурального рівняння кривої, приклади побудови кривих, уздовж яких їхня кривина міняється за заданим законом, їх реалізація у середовищі математичного пакету Maple.*

***Ключові слова:** ГІЛЬОШ, ГЕОМЕТРИЧНІ ОРНАМЕНТИ, ВІЗЕРУНКОВІ РОЗЕТКИ, ЛІНІЇ З КЕРОВАНИМИ КРИВИНАМИ, НАТУРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ КРИВОЇ, MAPLE.*

Вступ

Проблема ефективного захисту від підробок документів і цінних паперів виникла не одне сторіччя назад, однак залишається актуальною й донині. Для її розв'язання застосовується безліч методик і технологій з різних областей людської діяльності. До числа основних варто віднести *поліграфічні методи захисту* [9, 10, 24, 29].

Методи захисту на стадії дизайну є найбільш алгоритмічно значимими й найменш залежними від технічних ресурсів прийомами захисту поліграфічних виробів, тому вони найчастіше застосовуються на практиці. До їх числа відноситься використання складних растрових осередків при підготовці зображення, застосування *гільоширних композицій*, що представляють собою складні візерунки з тонких гладких ліній, а також вбудовування *текстурних водяних знаків*.

Гільоше (франц. *guilloche*) – особливий візерунок на поверхні й спосіб його нанесення. Гільоше вперше було застосовано А.-Л. Бреге [11]. Технологія гільоше дозволяє гравірувати на корпусі годинника і циферблаті (за допомогою спеціальних гільоширних машин або вручну) особливий тонкий малюнок у вигляді комбінації прямих і кривих ліній. Гільоше надає циферблату приглушене внутрішнє світіння й шляхетність.

Спосіб гільоширування полягає в нанесенні на поверхню тонкого гравірованого візерунка із хвилеподібних, паралельних або пересічних штрихів у правильній геометричній послідовності. Такими елементами можуть бути захисні сітки, розетки, бордюри, віньетки й куточки. Здійснюється за допомогою спеціальних машин типу токарного верстата з обертовим барабаном і різцем (гільоше), що працюють за заданою програмою [1].

Розетка в архітектурі – це мотив орнаменту у вигляді пелюстків квітки, що розпустилася, або декількох листків, однакових за формою, розташованих обертово-симетрично й радіально розбіжних із серцевини, подібних ботанічній розі.

Вважається, що гільош – ефективний спосіб захисту бланків цінних документів від підробок [3, 4, 5, 25, 26].

Мета та задачі дослідження

Метою дослідження є розробка та впровадження комп'ютерної моделі опису та побудови естетично досконалих візерункових ліній, уздовж яких їх кривина змінюється за попередньо заданим законом, а їх колір змінюється пропорційно зазначеній кривині.

Для досягнення мети поставлено такі основні задачі:

- здійснити огляд та критичний аналіз відомих методів опису та побудови візерункових кривих (переважно гільош-розеток);
- розробити на основі натуральних рівнянь спосіб опису та побудови естетично досконалих візерункових кривих залежно від їх функцій кривини;
- розробити способи редагування візерункових кривих, описаних натуральними рівняннями, а саме зсуву вздовж координатних осей, обертання та масштабування.

Об'єктом дослідження є процес формоутворення дизайну естетично досконалих візерункових кривих, уздовж яких їх кривина та колір змінюються за заданим законом.

Предметом дослідження є математичне забезпечення алгоритмів формування вказаних геометричних об'єктів. Реалізація алгоритмів має здійснюватися, виходячи з характеру зміни кривини вздовж цих кривих за наперед заданим законом.

Основна частина

1.1 Гільош як спеціальна технологія захисту документів і цінних паперів

Рисунок, який призначений для захисту від фальшивомонетників, можна побачити на будь-якій грошовій купюрі. Існують різні методи поліграфічного захисту цінних паперів, бланків суворої звітності. Ще в XVIII столітті гостро встала проблема захисту купюр від підробок. Гільоширні елементи стали друкувати на асигнаціях та інших цінних паперах. В XIX столітті гільош створювався на спеціальних механічних гільоширних машинах (рис. 1.1) [1].

Приблизно в цей же час з'являються ідеї про захист цінних паперів і грошових купюр за допомогою складних тонких ліній. Так виникає нова технологія – гільош. Застосування техніки гільоша як захисних засобів від підробок стають популярним у ряді європейських країн [1, 4].

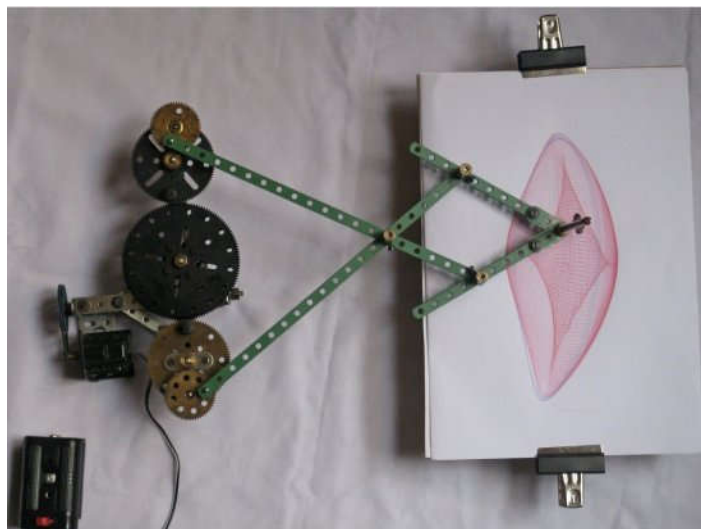


Рисунок 1.1 – Макет механізму для побудови гільюша

Графічні зображення вносяться в документ на стадії додрукарської підготовки й містять захисні ознаки: гільюширні елементи, гравюри, приховані зображення, тощо [9]. Гільюш – це спеціальна технологія захисту документів і цінних паперів за допомогою композиції з гільюширних елементів, розміщених на поверхні документа, що захищається.

Гільюширними елементами називають малюнок з великої кількості візерункових мереживних тонких ліній, заданих, у тому числі, і математичними формулами. Такими елементами можуть бути захисні сітки, розети, бордюри, віньетки й куточки. Гільюш по своєму дизайну може бути як симетричним, так і асиметричним. Відповідно до існуючих нормативів гільюширні елементи повинні займати не менш 70% площі цінних паперів. Причому більша частина цієї площі повинна містити багатобарвні гільюширні композиції [5].

Повторити гільюширну композицію, отриману методом орловського друку, коли до всіх складностей додається плавно й довільно мінливий колір кожної лінії, іншими способами (офсет, трафарет, високий або глибокий друк) неможливо. Підроблена лінія вийде або безперервною, але монохромною, або зі змінним кольором, але переривчастим, що складається з растрових точок. Витримати обидві вимоги одночасно не вийде. Крім усього іншого, навіть монохромні гільюширні елементи складні для сканування, тому що нерідко містять повторювані періодичні елементи, здатні завантажити величезні масиви пам'яті й утруднити роботу комп'ютера.

З розвитком комп'ютерної графіки стали розроблятися різні математичні методи й програми для створення гільюша. У наші дні більшість гільюширних елементів створюється на основі складних комп'ютерних програм, заснованих на спеціальних математичних формулах [12, 15, 16, 23].

Оскільки принцип побудови гільюширних елементів заснований на використанні й накладенні стандартних функцій, таких як синус і косинус, користувачеві програмного забезпечення з гільюширної графіки необхідні хоча б базові знання з вищої математики [5, 11, 15, 16, 23].

Гільоширні елементи створюються поетапно. Спочатку задається основа, на якій і будуть будуватися всі наступні кроки. Як основа може виступати будь-яка геометрична фігура, що утворює систему координат, у рамках якої й буде створюватися гільоширний рисунок.

На другому етапі задаються дві обвідні криві, що служать основою для всіх інших ліній. І тільки після цього задаються функції на заповнення простору між обвідними.

У роботах [25, 26] пропонується декілька способів аналітичного опису й побудови розеток; наприклад, за допомогою полярного радіуса виду

$$\rho = a^2 \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\cos(n\varphi) \right], \quad (1.1)$$

де φ – полярний кут;

n – параметр форми кривої (епітрохоїди).

У роботах [25, 26] наведені формалізовані підходи до опису та побудови епі- та гіпоциклоїд. На сайті [29] наведені формули для опису трохоїд, на основі яких можна побудувати сім'ю гільош-розеток:

$$\begin{aligned} x &= (R + r)\cos(mt) + (r + p)\cos\left(\frac{m(R + r)}{r}t\right) + Q\cos(mt); \\ y &= (R + r)\sin(mt) - (r + p)\sin\left(\frac{m(R + r)}{r}t\right) + Q\sin(mt) \end{aligned} \quad (1.2)$$

де t – параметр, а іншими літерами позначені «секретні» параметри, що впливають на геометричну форму візерунка розеток (рис. 1.2).

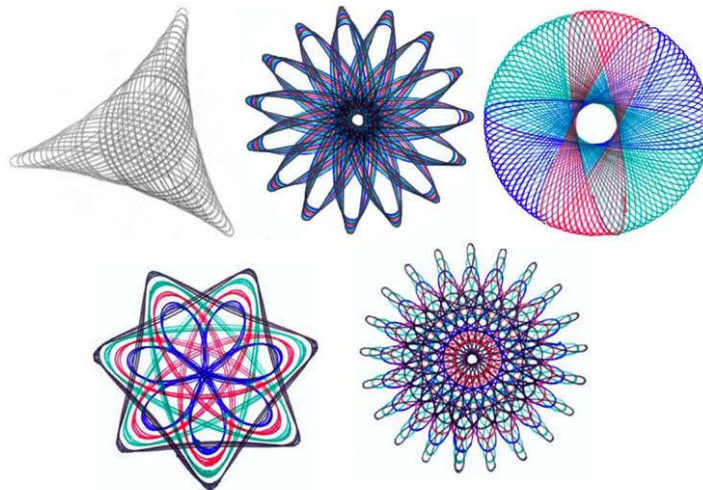


Рисунок 1.2 – Приклади гільош-розеток

Нові зображення можна моделювати, змінюючи параметри формул (1.2). Але досвід показує, що шляхом ускладнення аналітичних залежностей параметричних формул (1.2) не можна істотно вплинути на ускладнення візерунка розетки, і тим самим підвищити захист цінних паперів поліграфічними засобами.

Крім того, при деякій навичці можна створити програму підбора «секретних» параметрів для одержання певного зображення розетки.

На рис. 1.3 наведені приклади відомих гільош-розеток, побудованих за допомогою декількох варіантів сумісного використання формул виду (1.2), а на рис. 1.4 зображені реальні гільоші із фрагментами розеток. У роботах [23, 24, 28] наведені деякі інші способи опису й побудови гільош-розеток.

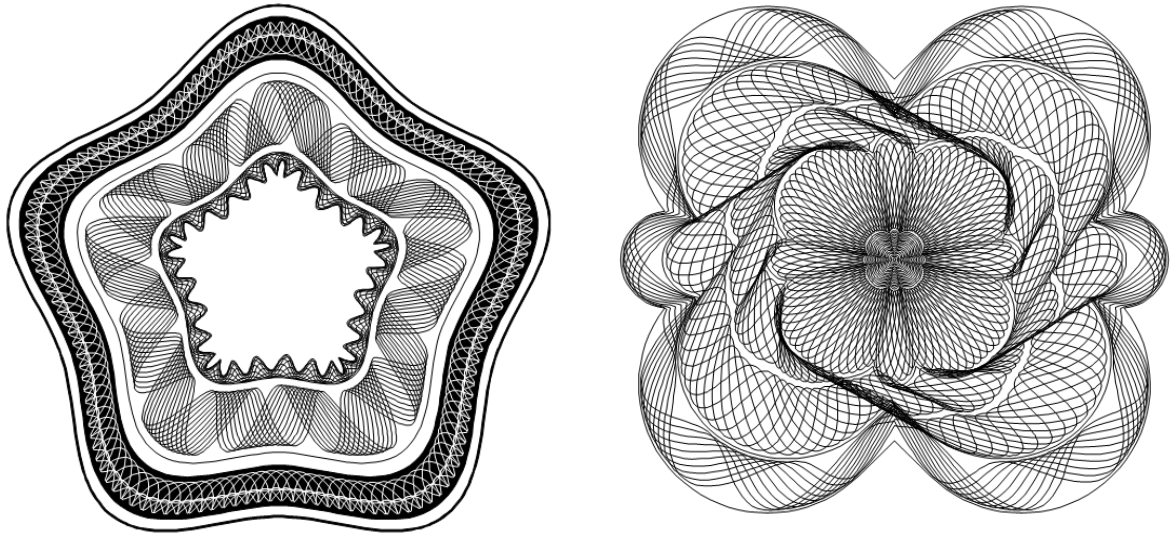


Рисунок 1.3 – Приклади складних гільош-розеток

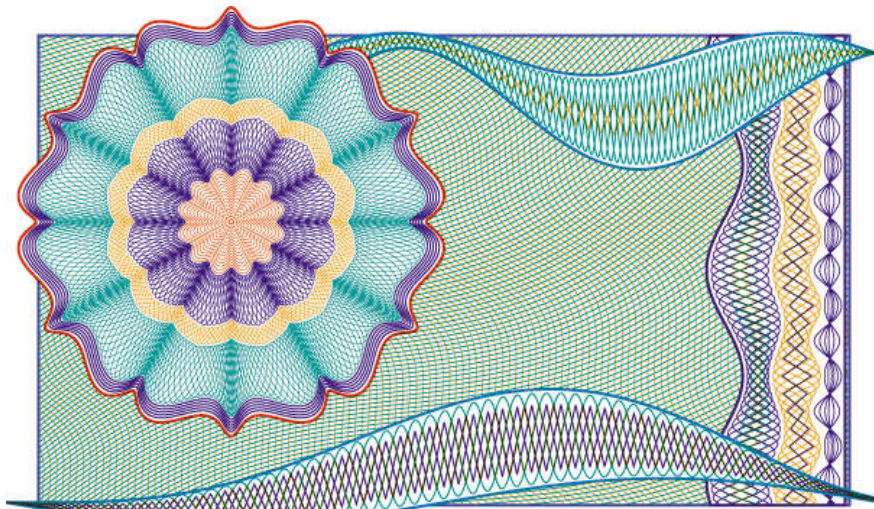


Рисунок 1.4 – Реальні гільоші із фрагментами гільош-розеток

Гільоширний рисунок – лише частина комплексу мір, спрямованих на захист від підробок. Додатково підвищувати надійність можна (і потрібно), використовуючи, наприклад, особливі сорти паперу, тиснення фольгою, металізацію й голограми, які навіть більш кращі, оскільки помітні неозброчним оком (рис. 1.5, 1.6) [9, 10].

Очевидно, що практична цінність гільоша для звичайних людей досить спірна. З іншого боку, фахівцеві наявність візерунка дозволяє визначити дійсність, чим і пояснюється його присутність на всіх мало-мальськи значимих документах.



Рисунок 1.5 – Гільош для цінних паперів



Рисунок 1.6 – Банкноти Папуа – Нової Гвінеї

Однак, останнім часом частіше з'являється думка, що гільош у певному розумінні втратив своє «охоронне» значення. Такі композиції частіше застосовуються для декоративного оформлення, ніж як серйозний бар'єр для зловмисників: гарна композиція з тонкого мережива ліній може задати стиль всьому документу або ж органічно доповнити загальний дизайн.

Цікаво, що часто гільоширні елементи стають частиною загального оформлення документа, елементом дизайну. Звичайно гільошем прикрашають дипломи, грамоти, свідоцтва. Звичайно, гільоширні елементи й тут гідно виконують свою основну функцію – захищати від підробки, але все більша увага приділяється їхньому зовнішньому вигляду.

1.2 Орнаменти як основа опису та побудови графічного захисту цінних паперів

Орнаменти є надбанням світової культури, адже вони відображають особливості характеру цілих народів [5, 7, 8, 22, 27]. Для України орнаменти займають особливе місце, адже вони визначають прояви знакових систем трипільської культури, і є відомими ще з давніх часів [2, 6, 13, 18]. Навряд чи можливо переоцінити глибину геометричної уяви й винахідливість, відбитих в візерунках орнаментів. Їхня побудова не тривіальна в математичному відношенні. Математик Г. Вейль зазначає, що мистецтво орнаменту містить у неявному вигляді найбільш древню частину відомої нам вищої математики (https://uk.wikiquote.org/wiki/Герман_Вейль), [7].

Здавалося, що стародавні орнаменти вже досконалі і не схильні до розвитку і удосконалень. Однак у середині ХХ століття з математики в мистецтво прийшов Мауріц Корнеліс Ешер (1898-1972) і здивував світ створенням небачених раніше орнаментів. Ящірки й птахи, риби й люди в його графічних аркушах переплетені у щільні, математично строгі візерунки. І стало зрозуміло, що світогляд народу, його своєрідність яскравіше всього виявляється саме в орнаментальних композиціях. Слід зазначити, що орнамент, незважаючи на термін (лат. *ornamentum* - прикраса), не є мистецтвом прикраси. Це мистецтво організації. Він нічого не зображує, але організує. Тому структура в орнаменті набагато важливіша всякої зображальності й подібності. Орнамент,

як мистецтво порядку, протистоїть хаосу. Він включає річ у струнку систему світу, у стійку світову ієрархію. Недарма, при словах “гармонія світу” відразу спонтанно виникає образ орнаменту [8].

З іншого боку, основою орнаменту завжди служить щось цілком реальне, більше того, повсякденне. У мистецтві орнаменту таку основу називають мотивом. І тут дуже важливо, щоб реальний предмет, обраний як мотив, не мав яскраву індивідуальність, інакше він буде відволікати увагу від всієї орнаментальної структури в цілому, що важливіше будь-якої самої яскравої індивідуальної риси.

Цікаво, хто зараз більше займається вивченням орнаменту – мистецтвознавці або математики? У розумінні структури й технології створення (сприйняття) орнаментів математики, мабуть, досягли більшого. Тому доцільним буде дослідити, як математична правильність входить у саму суть мистецтва орнаменту, яке стає виразним засобом.

В роботі [8] розглянуто способи класифікації давніх орнаментальних систем Євразії. Ранній етап трипільської культури на території України висвітлено в роботі [6]. В роботі [7] вивчено спіральні орнаменти трипільської кераміки. Знакові системи трипільської культури досліджено в роботі [6]. Підводячи підсумок предметному огляду слід зазначити, що ключовим моментом побудови орнаментів є використання елементів симетрії їх частин. Існує значна кількість математичних способів опису та побудови орнаментів засобами обчислювальної техніки. Звичайно графіки функцій будують у декартових координатах, але іноді застосовують полярні, логарифмічні й деякі інші системи координат. В роботі [11] (та інших подібних) наведено програми для ЕОМ побудови різноманітних візерунків. Але відкритим залишається питання осмислення стратегії побудови зображень орнаментів з елементами симетрії. Тому актуальними будуть дослідження, спрямовані на формалізацію побудови засобами обчислювальної техніки орнаментів з елементами симетрії.

Далі розглянуто концептуальні моменти створення орнаментів – від звичайної графіки до технологій комп’ютерної графіки.

В орнаменті людство стало бачити щось більше, ніж просто прикрасу, адже в основі будь-якого орнаменту лежить строга ритмічна закономірність. А оскільки різноманітні ритми становлять саму суть будь-якого твору мистецтва, то кожне з них можна розглядати як своєрідний орнамент. Так виникали практично всі конструктивістські й абстракціоністські напрямки в мистецтві ХХ століття. Художники цих напрямків розкладали живе враження на дрібні складові частини й потім складали з них мальовниче полотно, скульптурний об’єм, архітектурний простір, танець або кінофільм. Більш того, сьогодні, на самому початку ХХІ століття, уже можна визначити саму глибинну особливість мислення людини минулого сторіччя – орнаментальність. Усе у фізичному, психічному й духовному світі людини складено із простих і досить ясних елементів (мотив орнаменту), які, так чи інакше, взаємодіючи між собою, становлять багатомірну картину.

Основними класифікаційними ознаками орнаменту служать його походження, призначення й зміст. З врахуванням усього цього орнаментальні форми можна об'єднати в такі різновиди [10].

Технічний орнамент. Виникнення форм цього орнаменту обумовлено трудовою діяльністю людини. Наприклад, фактура поверхні предметів із глини, виготовлених на гончарному колі, малюнок найпростіших кліток тканини при виробленні її на первісному ткацькому верстаті, спіралеподібні витки, одержувані при плетінні мотузок тощо.

Символічний орнамент. Формуванню символічного орнаменту сприяла спільність природи умовно-символічних зображень творів орнаментального мистецтва в цілому, а самі орнаментальні образи, як правило, являють собою символи або систему символів. Такого роду зображення здатне в лаконічній формі виразити дуже широкі, різноманітні поняття. З'явившись у Древньому Єгипті й інших країнах Сходу, символічний орнамент і сьогодні продовжує відігравати важливу роль.

І, нарешті, найбільш цікавий для нас геометричний орнамент. Спочатку цей орнамент виник завдяки злиттю технічного й символічного орнаментів, утворивши більш складні комбінації зображень, позбавлені конкретні оповідальні значення. Відмова від сюжетної основи в цьому виді орнаменту дозволив акцентувати увагу на строгому чергуванні окремих природних мотивів. Адже будь-яка геометрична форма – це споконвічно реально існуюча форма, гранично узагальнена й спрощена.

Стилізацією в орнаменті називають узагальнене зображення реальних предметів або фігур. Але для узагальнення необхідно відволіктися від конкретного предмета, побачити його в ряді таких же предметів, виділити основні риси. Інакше кажучи, стилізація припускає досить високий рівень осмислення навколишнього світу. Прагнення передати лише основні риси предмета, видаливши все несуттєве, є загальним для мистецтва. Художник намагається показати птаха взагалі, людину взагалі, рослину взагалі.

Особливо багато займалися законами й видами симетрії вчені-кристалографи, адже від різного розташування тих самих атомів сильно залежать і властивості мінералу. Тобто різні види симетрії спричиняють різні фізичні властивості. Вважається, що дзеркальна поверхня відбиває не тільки нас самих, але весь наш світ, створюючи грандіозну ілюзію. Але для одержання найвигадливіших ілюзій можна використовувати не одне, а два й більше дзеркал, по-різному розташовуючи їх, одне відносно одного.

Саме так здійснив в 1819 році Девід Брюстер і винайшов відомий сьогодні кожному калейдоскоп. Дитячі іграшки калейдоскопи, українські хоровади, грецький меандр і мелодії в строгому поліфонічному стилі - все це вираження симетрії повороту. Тому й сприймаються різні за видами симетрії орнаменти по-різному.

Кінцевий орнамент (розетка), заснований на симетрії повороту, створює відчуття центричності, замкнутості, статичності, цілісності. Ми сприймаємо його

як якийсь подання глядачеві. Вважаємо, що він звернений до нас, у анфас, подібно обличчю людини, і веде погляд споглядача в глибину. Нескінченний орнамент (бордюр, мережа), створюючи враження рухливості, фрагментарності, спрямовує погляд глядача уздовж площини. Дзеркальна симетрія дає відчуття врівноваженості й спокою, осьова симетрія народжує враження обертового руху, а перенос (трансляція) сприймається як поступальний рух.

Основу геометричного орнаменту становить вузол, що сприймався в стародавності як один з найдужчих магічних засобів. Не випадково плетіння, в'язання, ткацтво завжди вважалися ремеслами, тісно пов'язаними з обрядовою стороною життя. Власне, всі три операції з вузлами (плетіння, в'язання, ткацтво) є створенням симетричної орнаментальної композиції на основі вузла як мотиву.

Геометричний вузловий орнамент став також основою перших літер і алфавітів, що дотепер зберегли в накресленні “вузлики” і “петельки”. Природно, що й літери легко складаються в орнамент. Поверхневий геометричний орнамент складається вже із дуже стилізованих вузликів і переплетень. Це хрести, трикутники, кола, нанесені, наприклад, на поверхню глиняного горщика, і які відіграють роль оберегу.

Однак у такому образотворчому орнаменті бачиться й небезпека для орнаментального мистецтва взагалі. Мотив тут практично не стилізований, а лише сильно спрощений. Це не дозволяє глядачеві відволіктися від мотиву й розглядати всю композицію в цілому. Увесь час хочеться уважно розглянути й найкритичніше зображення. Напевно, тому художники початку ХХ століття швидко відмовилися від образотворчого орнаменту й зосередили увагу на різних видах геометричного. Такий орнамент чудово сполучався з абстрактними композиціями й знахідками кубістів. Багато полотен А. Екстер, К. Малевича, М. Матюшина, В. Кандинського та інших у більшому або меншому ступені є орнаментальними композиціями [5, 7, 18].

У фізиці, хімії, економіці та багатьох інших галузях використовується безліч функцій і залежностей, що описують певні процеси, і часто їхнє графічне подання виявляється корисним. Крім того, графічні зображення, одержані за допомогою комп'ютера, можуть нести і певний естетичний зміст [4, 11, 14].

Машинні візерунки використовують для сучасної реклами, як заставки в книгах і журналах, в декоративних малюнках, які наносяться на тканину та посуд, тощо. Останнім часом організуються виставки художньої машинної графіки, адже орнаменти, які побудовані комп'ютером, часто не підпадають під якийсь стиль, і за формою можуть бути набагато більш різноманітніші, ніж придумані художниками. Для оформлення приміщень (паркетних підлог, стін та стель) все більшого поширення набувають візерункові розетки – тобто орнаментальні мотиви переважно у вигляді квітки, що розпустилася, з однаковими симетричними відносно повороту пелюстками (застосовуються в архітектурі, ювелірних виробках, тощо).

Відомі результати доцільно було б доповнити шляхом створення алгоритмів побудови візерункових розеток з використанням обчислювальної техніки. Наприклад, за допомогою ліній з керованою кривиною залежно від параметрів, що входять до їх описів. Адже при деяких розрахунках для опису кривих доцільно застосовувати їхні натуральні рівняння. Інакше кажучи, такі рівняння, які описують кривину лінії залежно від натурального параметра s , що визначає довжину даної кривої починаючи з її деякої точки.

Розглянуті моменти створення орнаментів дозволять будувати орнаменти засобами технологій комп'ютерної графіки, базуючись на концептуальних моментах звичайної графіки.

1.3 Існуючі способи опису та побудови гільоша

З впровадженням обчислювальної техніки для виготовлення захисних елементів стали широко застосовуватися персональні комп'ютери зі стандартним програмним забезпеченням. Ринок програмного забезпечення по гільоширній графіці досить вузький, причому більшість представлених на ньому продуктів – це додаткові модулі (плагіни) для популярних редакторів векторної графіки, у першу чергу Adobe Photoshop, CorelDRAW і Adobe Illustrator. Їх характеризують відносно невисока ціна й настільки ж обмежена функціональність, а результати роботи можна використовувати лише як декоративні елементи – вони недостатньо складні, щоб забезпечити захист документів.

Мабуть, кращі з повноцінних пакетів для гільош-дизайнерів пропонує російська компанія SecuritySoft Co. У її арсеналі три лінійки продуктів, що охоплюють практично повний спектр завдань, що виникають при розробці захисних елементів графічного оформлення.

Захистом документів і цінних паперів займаються професійні гільош-дизайнери; за допомогою спеціальних програм, наприклад CERBER®. Вони створюють захисні й декоративні гільоширні елементи, що використовуються для захисту документів від підробки, для оформлення акцизних знаків, лотерейних і проїзних квитків, почесних грамот, сертифікатів і дипломів [12].

Програма CERBER® дозволяє швидко згенерувати різні сітки, розетки, бордюри, а також інші гільоширні елементи по заданих замовником точних числових параметрах. У програмі використовуються оригінальні математичні алгоритми, які дозволяють захистити створений унікальний дизайн від підробки й дублювання.

Елементи дизайну неможливо точно повторити навіть за допомогою цієї ж програми без точних даних про використані у формулах числові значення. Для коефіцієнтів у формулах можуть бути використані дробові числа з великою кількістю розрядів після коми, що й дає унікальність функцій.

Створення елементів провадиться користувачем в інтерактивному режимі – відразу видно результат роботи програми на екрані. Робота по створенню елементів розділена на етапи, кожний з яких добре описаний у довідковому розділі. Гільоширні елементи задаються геометрично й управляються рядом

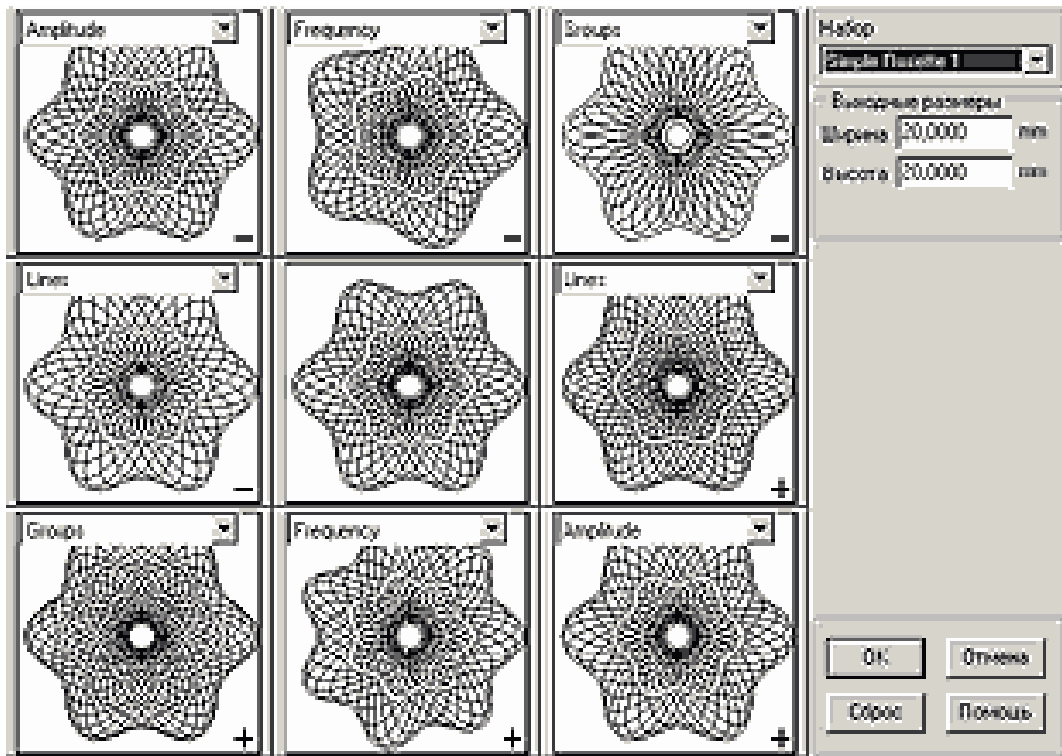


Рисунок 1.9 – Вбудований майстер гільошей

За допомогою програми CERBER® можна створювати такі елементи:

- елементи замкнутої форми – розетки;
- лінійні елементи – бордюри;
- елементи фону – захисні й декоративні сітки;
- спеціальні ефекти – базуються на півтонових зображеннях;
- 3D-малюнок, видавлений із сітки - зсув ліній сітки залежить від напівтонів малюнка;
- зображення з мікротекстом – модуляція мікротексту напівтонами малюнка;
- різні модуляції сітки напівтоновим зображенням по амплітуді, фазі, частоті;
- штрихові й гравюрні ефекти – передача півтонів різними типами штрихових ліній;
- орнамент – накладення ліній з різною шириною одна на одну;
- поєднані елементи – складаються з комбінацій перерахованих вище елементів.

Проведений огляд літературних джерел показав, що ще недостатньо досліджено питання підвищення ступеня захисту цінних паперів поліграфічними засобами шляхом ускладнення візерунка розетки з одночасним спрощенням способу його кодування.

1.4 Застосування в геометричному моделюванні й дизайні сім'ї кривих з монотонними функціями кривини

У роботах [29-33] розглядаються сім'ї кривих з монотонними функціями кривини і їхнє застосування в геометричному моделюванні й естетичному дизайні. Наводиться приклад моделювання поверхні кузова автомобіля за

допомогою естетичних сплайнів. Зазначається, що естетична привабливість промислових продуктів є дуже важливим фактором для їхнього успішного просування на ринку збуту. Більшість кривих і поверхонь, які використовуються у традиційних системах CAD/CAM [29], мають поліноміальний або раціональний параметричний вигляд і не задовольняють високим естетичним вимогам [30]. Одним з їхніх недоліків є складність контролювання монотонності функції кривини кривій.

У геометричному дизайні криві з монотонними функціями кривини відомі як *fair curves*. До них можна віднести спіралі з монотонними функціями кривини (спіралі Ейлера, Нільсена, логарифмічна спіраль, інволюта кола), псевдоспіралі, а також так звані естетичні криві [30], які, по суті, є лінійною репараметризацією псевдоспіралей. Перераховані криві входять до сім'ї суперспіралей, кривина яких задається Гауссовою гіпергеометричною функцією, що задовольняє умовам строгої монотонності при деяких обмеженнях, які накладаються на її параметри.

Відомі криві Безьє класу А [31], функція кривини яких монотонна, однак їх більш детальний аналіз показав, що при підвищенні ступеня полінома крива сходиться до логарифмічної спіралі. Взагалі, контролювання монотонності кривини кривих Безьє й В-сплайнів порядку $n > 2$ має потребу в більш глибокому аналізі й розробці відповідних алгоритмів.

Криві, що задовольняють монотонності функції кривини, широко застосовуються в дизайні поверхонь автомобілів, моделюванні фасок, побудові перехідних кривих у дизайні високошвидкісних магістралей і залізничних колій, дизайні шрифтів [32] і є невід'ємними факторами естетичного дизайну.

На рис. 1.10 представлено новий концептуальний дизайн автомобіля, створений за допомогою естетичних кривих і мультиспіралей [32].

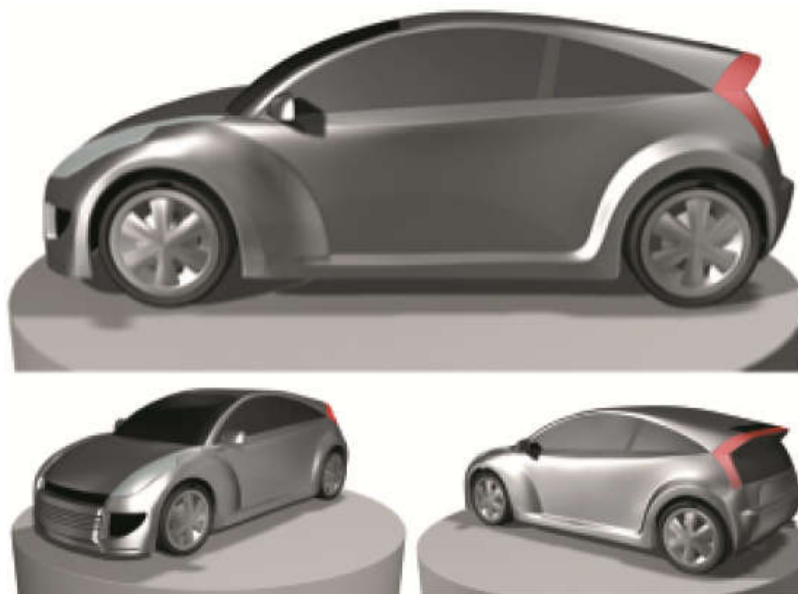


Рисунок 1.10 – Новий концептуальний дизайн автомобіля, створений за допомогою естетичних кривих, мультиспіралей і кінематичних спіральних поверхонь

Далі розглянемо математичний апарат естетичних кривих. Найцікавішими з погляду естетичного дизайну й можливих впроваджень є естетичні криві, математична теорія яких розроблялася в роботах [30], [33]. Тошинобу Харада і його дослідницька група шляхом вивчення характеристик множини кривих привабливої форми, що властиві об'єктам реального й віртуального світу, установили, що їхні функції кривизни залежно від натурального параметра (довжини дуги) у логарифмічній шкалі мають бути або лінійними, або близькими до лінійних.

Натуральні рівняння цих кривих мають такий вигляд [29]:

$$\kappa(s) = (\lambda\alpha s + 1)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (1.3)$$

при $\alpha \neq 0$, і

$$\kappa(s) = e^{-\lambda s} \quad (1.4)$$

при $\alpha = 0$.

Тут α – параметр форми, λ – масштабний фактор. В [30] для обчислення сегментів кривих використовувався чисельний метод Гаусса-Кронрода, пізніше в роботі [29] були отримані параметричні рівняння для (1.3), у яких використовуються неповні гамма-функції, що дозволяють із високою точністю обчислювати сегменти кривої. В [30] шляхом обчислювального експерименту були отримані припустимі межі для контрольних точок, обумовлених напрямком одиничних дотичних векторів у початковій і кінцевій точках сегмента естетичної кривої.

Встановлено, що спіралі Ейлера ($\alpha=-1$), Нільсена ($\alpha=0$), а також інволюта кола ($\alpha=2$) мають обмежені припустимі межі зміни для контрольної точки, обумовленої напрямком одиничних дотичних векторів у початковій і кінцевій точках. Крім того, сегмент кривої, що задовольняє напрямкам дотичних, не завжди існує.

Проте, завдання двохточкової Ермітової інтерполяції, судячи виконаному в [30] обчислювальному експерименті, завжди має розв'язок для спіралей з параметром форми. Йошида й Сайто [30] досліджували поведження ліній відбиття на лінійчатих спіральних поверхнях і прийшли до висновку, що при обертанні кінематичних поверхонь на них відсутні осциляції ліній відбиття, що є однією з характеристик їхньої найвищої якості. Деякі приклади застосування естетичних сплайнів класу $C1$ можна знайти в [33].

Далі розглянемо одиничні кватерніонні інтегральні криві. В [33] уперше було запропоновано клас одиничних кватерніонних кривих Qqs у групі обертань $SO(3)$, а також розроблено метод, за допомогою якого криву, обумовлену зваженою сумою базисних функцій, можна перетворити в її одиничний кватерніонний аналог в $SO(3)$. Прикладом, використовуючи запропонований в [33] метод для таких сплайнів, як сплайни Безьє, Ермітові й

В-сплайни, можуть бути отримані одиничні кватерніонні криві, багато диференціальних властивостей яких є інваріантними.

Одинична кватерніонна інтегральна крива (QI-Крива) визначається так:

$$C(s) = P_0 + \int_0^s q(s)v_0q^{-1}(s)ds, \quad (1.5)$$

де s – довжина дуги;

q – довільний одиничний вектор.

У цьому випадку кватерніони, особливо одиничні, зручні для опису обертань, використовуються для контролювання напрямку дотичного вектора, що додає деяку ефективність і простоту в дизайні кривої естетичної форми. Кватерніонні координати вважаються ідеальними для інтерполяції орієнтації об'єктів.

Враховуючи те, що QI-Крива визначається вектором дотичної, який контролюється одиничною кватерніонною кривою, і довжина дуги є її натуральним параметром, можливо більш зручне маніпулювання з її функцією кривини, ніж у більш традиційних для CAD/CAM систем поліноміальних параметричних кривих.

Отже, плоскі криві з монотонною функцією кривини широко застосовуються в комп'ютерному геометричному дизайні й комп'ютерній графіці. Область їхнього застосування досить широка – починаючи з дизайну шрифтів до моделювання поверхонь літаків і балістичних ракет. Досить цікавою є розробка алгоритмів для генерації й контролювання кривини кривих Безьє класу A.

2.1 Поняття степені кривини лінії для опису натурального рівняння кривої

Для опису та зображення кривих поліграфічного захисту доцільно застосовувати їхні натуральні рівняння [16]. Інакше кажучи, такі рівняння, які описують кривину деякої кривої залежно від її натурального параметра s , який визначає довжину даної кривої починаючи з її деякої точки.

Подальшим узагальненням побудови кривих з керованими кривинами буде вивчення та реалізація на практиці більш складних залежностей входження класичної кривини в описи результуючих кривих.

Далі розглянемо випадок, коли у формули опису результуючої лінії входить кривина, обчислена з позитивним степенем (виду $kw(s)$).

Відомо [15], що натуральне рівняння кривої на площині має вигляд

$$\frac{1}{R} = f(s), \quad (2.1)$$

де R – радіус кола, дотичного до гладкої кривої в певній її точці, а функція $f(s)$ визначає закон зміни кривини лінії (тобто величини $k = 1/R$) залежно від натурального параметра s .

За визначенням (класичною) кривиною дуги кривої у точці M називається величина

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|, \quad (2.2)$$

де α – кут між дотичними в точках M і $M\Delta$

а Δs – довжина дуги $MM\Delta$.

З використанням похідної формулу (2.2) можна записати як

$$k = |\dot{\alpha}|, \quad (2.3)$$

де $\alpha(s)$ – кут повороту дотичної у точці M , що залежить від шляху, пройденого по кривій, $\dot{\alpha}$ – похідна функції $\alpha(s)$ по параметру s .

Рівняння (2.3) допомагає описати криву, що задана натуральним рівнянням. Дійсно, з рівняння $k = \dot{\alpha}(s) = f(s)$ обчислюється функція

$$\alpha(s) = \int_0^s f(s) ds + \alpha_0, \quad (2.4)$$

за допомогою якої обчислюється кут нахилу дотичної залежно від довжини дуги.

Тоді відповідно до відомих [15] залежностей

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha \quad \text{і} \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha \quad (2.5)$$

параметризацію кривої можна задати у вигляді

$$x(s) = \int_0^s \cos \alpha(s) ds + x_0; \quad y(s) = \int_0^s \sin \alpha(s) ds + y_0, \quad (2.6)$$

або, з врахуванням (2.4), рівняння шуканої кривої має вигляд

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos \left(\int_0^s f(s) ds + \alpha_0 \right) ds + x_0; \\ y(s) &= \int_0^s \sin \left(\int_0^s f(s) ds + \alpha_0 \right) ds + y_0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Легко переконатися в тому, що обертання кривої спричиняє зміну у формулах (2.7) постійної α_0 , а паралельний перенос кривої пов'язаний зі зміною параметрів x_0 і y_0 . Рівність цих констант нулю визначає розташування кривої так, що початкова точка для відліку дуги буде розташована у початку координат, а додатній напрямок дотичної у ній збігається з додатнім напрямком осі Ox .

У курсі диференціальної геометрії доводиться [15], що кожне рівняння виду (2.1), де функція $f(s)$ неперервна, можна прийняти як натуральне рівняння деякої кривої, яку можна описати у параметричному вигляді. Канва доказу цього твердження полягає в такому. Для рівняння (2.1) визначається спочатку вираз для α за допомогою формули (2.4), а потім формули для x і y визначаються рівняннями (2.6) – тобто в результаті маємо параметричне подання кривої. Якщо вирази (2.6) продиференціювати по змінній s , то приходимо до рівняння (2.4), звідки

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (2.8)$$

Тобто ds дійсно є диференціалом дуги цієї кривої, а s – дугою кривої.

Зі співвідношень (2.5) слідує, що α є кутом дотику цієї кривої з віссю x . Після диференціювання (2.4) знаходимо, що кривина дорівнюватиме

$$\frac{d\alpha}{ds} = f(s). \quad (2.9)$$

Тобто доходимо висновку, що рівняння (2.1) дійсно виявляється натуральним рівнянням кривої.

Подальшим узагальненням побудови кривих з керованою кривиною буде введення поняття *степеня кривини лінії*.

Визначення. Нехай кривина уздовж кривої змінюється за законом $k^w(s)$, де $w > 0$ і s – натуральний параметр. За допомогою функції $k^w(u)$ задамо вираз $\alpha_w(s)$ у вигляді

$$\alpha_w(s) = \int_0^s k^w(u) du, \quad (2.10)$$

Тоді параметр w буде степенем кривини лінії $\{x(s), y(s)\}$, одержаної в результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{ds} x(s) = \cos(\alpha_w(s)); \quad \frac{d}{ds} y(s) = \sin(\alpha_w(s)). \quad (2.11)$$

Кривина лінії другого степеня застосовується при побудові еластик Ейлера [14], а кривини ліній більш високих степенів використовуються, наприклад, при побудові треків елементарних часток у магнітних полях.

2.2 Побудова кривих, уздовж яких їхня кривина міняється за заданим законом

Ідею побудови кривих, описаних натуральним рівнянням, пояснимо на тестових прикладах. Нехай кривина лінії описана функцією $k(s)$, де s – натуральний параметр. За допомогою функції $k(s)$ задамо вираз $\alpha(s)$ у вигляді

$\alpha(s) = \int_0^s k(u) du$, після чого в результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{ds}x(s) = \cos(\alpha(s)); \quad \frac{d}{ds}y(s) = \sin(\alpha(s)) \quad (2.12)$$

одержимо натуральне рівняння лінії $\{x(s), y(s)\}$.

На практиці зручніше систему диференціальних рівнянь розв'язувати у вигляді системи Френе:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\alpha(s) &= k(s); \\ \frac{d}{ds}x(s) &= \cos(\alpha(s)); \\ \frac{d}{ds}y(s) &= \sin(\alpha(s)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Або, з використанням синтаксису мови Maple, – у вигляді

```
sys := diff(alpha(s), s) = kap(s),
      diff(x(s), s) = cos(alpha(s)),
      diff(y(s), s) = sin(alpha(s));
```

Для розв'язання системи диференціальних рівнянь необхідно задати крайові умови одержання розв'язку:

```
krai := x(0)=0, y(0)=0, alpha(0)=0;
```

За допомогою операторів

```
ans := dsolve({sys, krai}, {x(s), y(s), alpha(s)}, type=numeric, output=listprocedure)
```

одержуємо розв'язок системи рівнянь Френе у вигляді процедур, з якими можна оперувати як зі звичайними функціями дійсного змінного.

Зокрема, за допомогою цих функцій можна побудувати зображення **pic** шуканої лінії:

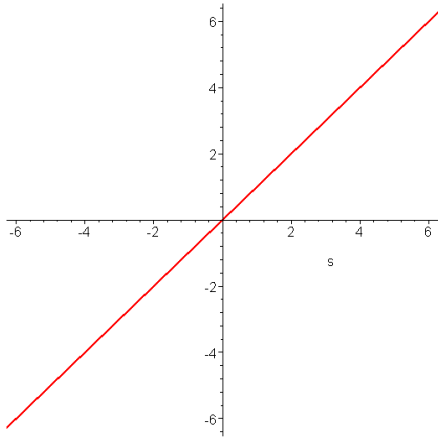
```
pic := odeplot(ans, [x(s), y(s)], s=-12*Pi..12*Pi,
              numpoints=15000, thickness=2, color=black):
display(pic, scaling=constrained, axes=NONE);
```

Приклад 2.1. На рис. 2.1 наведено криву для $\mathbf{kap}(s) = s$.

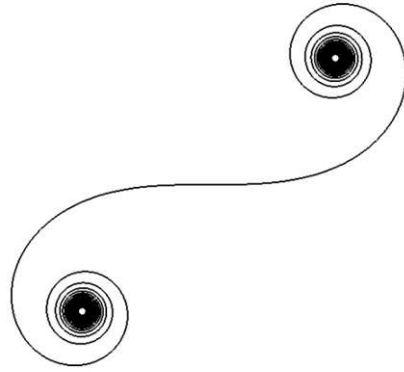
Приклад 2.2. На рис. 2.2 наведено криву для $\mathbf{kap}(s) = s^2$.

Приклад 2.3. На рис. 2.3 наведено криву для $\mathbf{kap}(s) = s^2 - 2,5$.

Приклад 2.4. На рис. 2.4 наведено криву для $\mathbf{kap}(s) = 5*s^4 - 18s^2 + 5$.

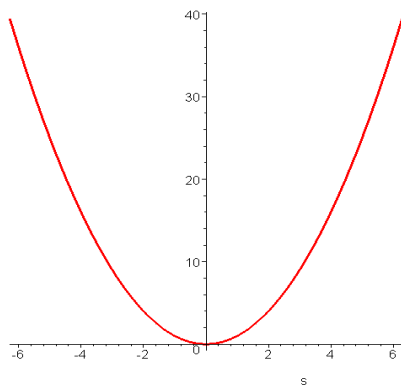


Графік функції s



Лінія зі змінною кривиною s

Рисунок 2.1 – Рисунки до прикладу 2.1

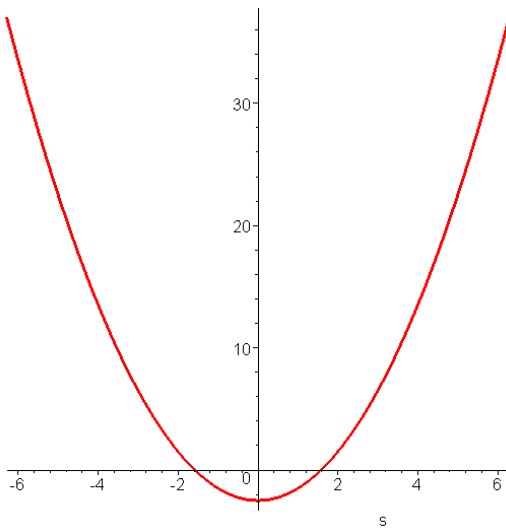


Графік функції s^2

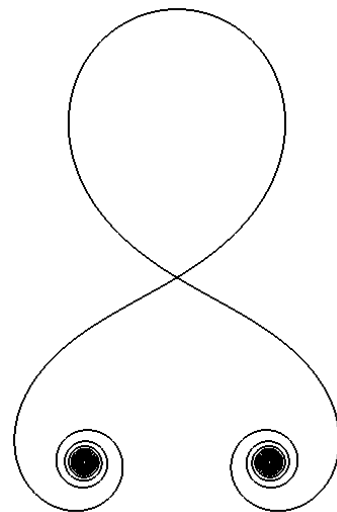


Лінія зі змінною кривиною s^2

Рисунок 2.2 – Рисунки до прикладу 2.2



Графік функції $s^2 - 2,5$



Лінія зі змінною кривиною $s^2 - 2,5$

Рисунок 2.3 – Рисунки до прикладу 2.3

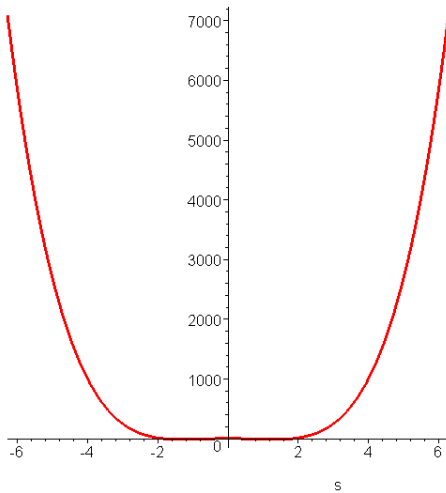
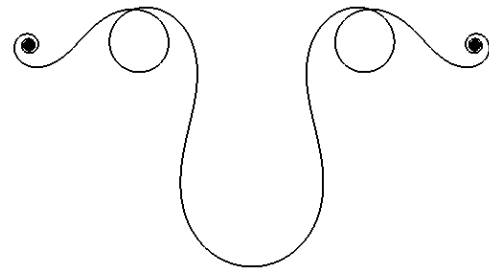
Графік функції $5*s^4-18s^2+5$ Лінія зі змінною кривиною
 $5*s^4-18s^2+5$

Рисунок 2.4 – Рисунки до прикладу 2.4

Більш цікаві випадки кривих одержимо тоді, коли вирази для опису кривини будуть аналітично складнішими.

Наведемо варіанти таких кривих, які для порівняння ми запозичили з роботи [22], але в цій роботі криві описуються і будуються за допомогою інтегральних співвідношень.

Приклад 2.5. На рис. 2.5 наведено криву для

$$\kappa_{ap}(s) = 1/5 + 2\sin(s) + 3\cos(s/3) .$$

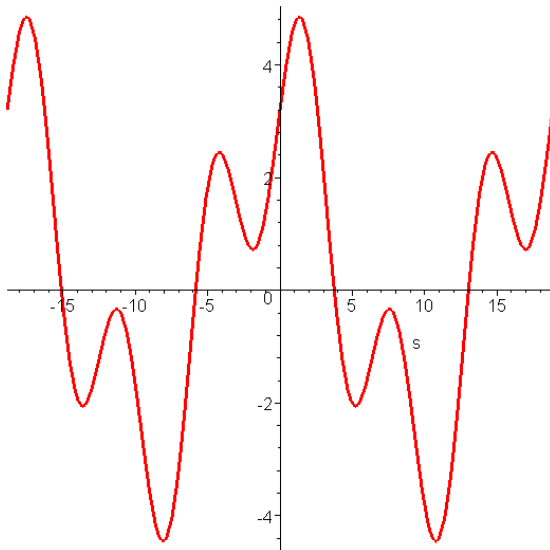
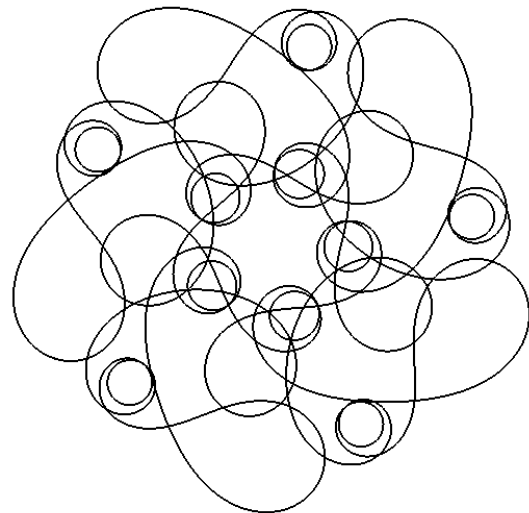
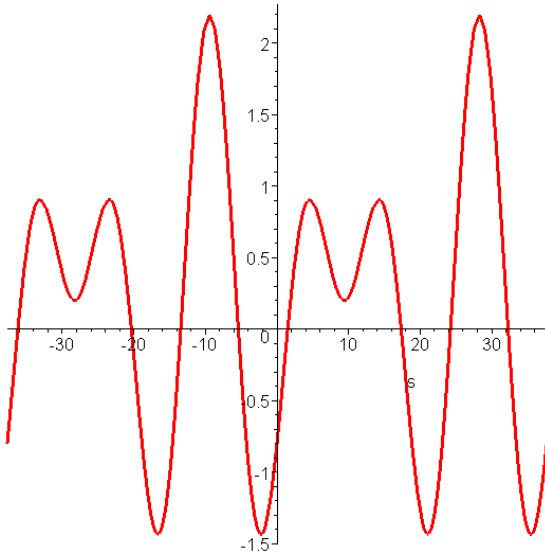
Графік функції
 $1/5+2\sin(s)+3\cos(s/3)$ Лінія зі змінною кривиною
 $1/5+2\sin(s)+3\cos(s/3)$

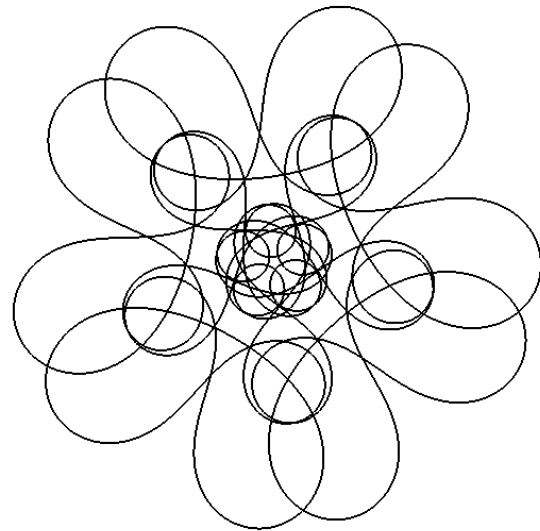
Рисунок 2.5 – Рисунки до прикладу 2.5

Приклад 2.6. На рис. 2.6 наведено криву для

$$\kappa_{ap}(s) = 1/5 + \sin(s/2) - \cos(s/3) .$$



Графік функції
 $1/5 + \sin(s/2) - \cos(s/3)$

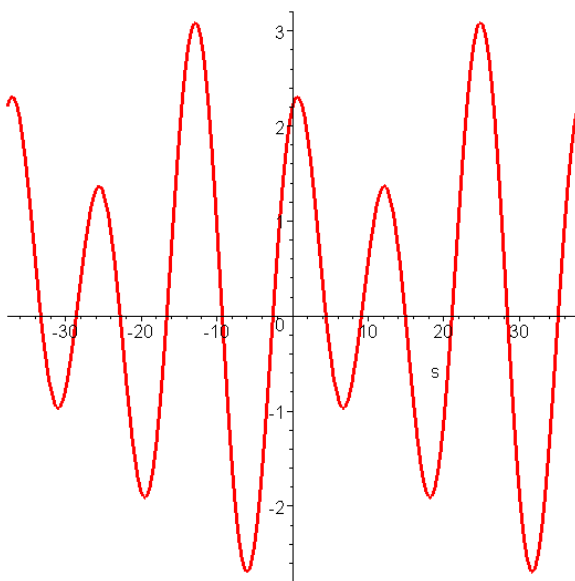


Лінія зі змінною кривиною
 $1/5 + \sin(s/2) - \cos(s/3)$

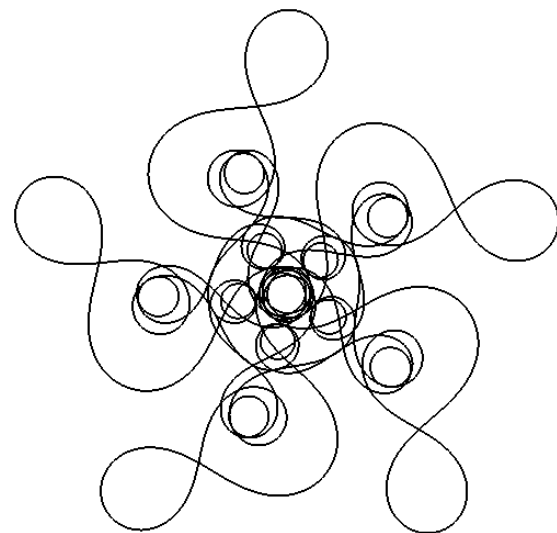
Рисунок 2.6 – Рисунки до прикладу 2.6

Приклад 2.7. На рис. 2.7 наведено криву для

$$\text{кар}(s) = 1/5 + \sin(s/3) + 2\cos(s/2) .$$



Графік функції
 $1/5 + \sin(s/3) + 2\cos(s/2)$

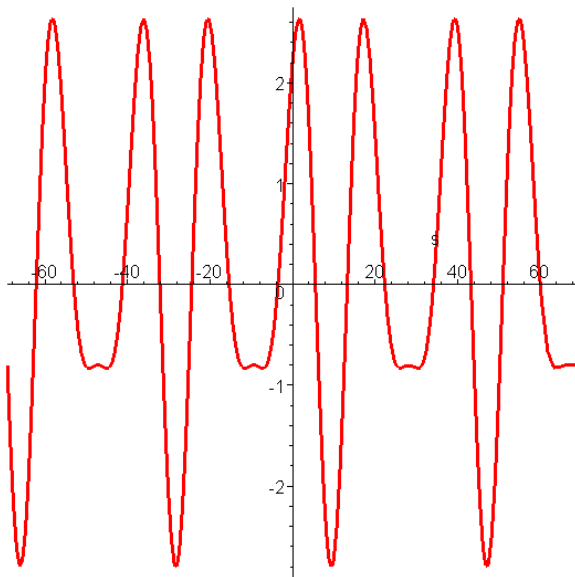


Лінія зі змінною кривиною
 $1/5 + \sin(s/3) + 2\cos(s/2)$

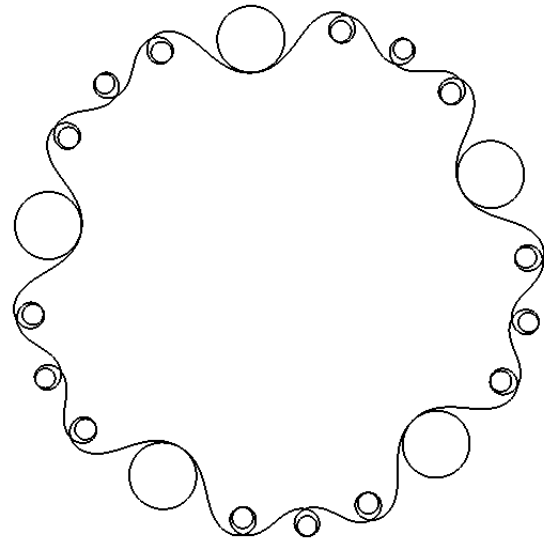
Рисунок 2.7 – Рисунки до прикладу 2.7

Приклад 2.8. На рис. 2.8 наведено криву для

$$\text{кар}(s) = 1/5 + \sin(s/2) + 2\cos(s/3) .$$



Графік функції
 $1/5 + \sin(s/2) + 2\cos(s/3)$



Лінія зі змінною кривиною
 $1/5 + \sin(s/2) + 2\cos(s/3)$

Рисунок 2.8 – Рисунки до прикладу 2.8

Для побудови кривих із запропонованою кривиною визначеної степені w було складено Maple-програму, фрагмент якої у вигляді процедури-функції має вигляд:

```

profil := proc(kap, a, b)
  local sys, p, ics, p1:
    sys:= diff(alpha(s),s) = kap(s)^w,
           diff(x(s),s) = cos(alpha(s)),
           diff(y(s),s) = sin(alpha(s)):
    krai:= x(0)=0,y(0)=0, alpha(0)=0;
    ans:= dsolve({sys,krai},{x(s),y(s),alpha(s)},
                 type=numeric);
    pic:=odeplot(ans,[x(s),y(s)], s=a..b,
                 numpoints=12000,thickness=2,color=black):
    display(pic,scaling=constrained);
end:

```

Тут через **kap** позначено (класичну) кривину кривої, через **a** і **b** - границі зміни параметра довжини дуги, систему диференціальних рівнянь Френе позначено через **sys**, розв'язок цієї системи позначено через **ans**, а підготовлену для візуалізації інформацію позначено як **pic**.

Звертатися до процедури-функції треба так:

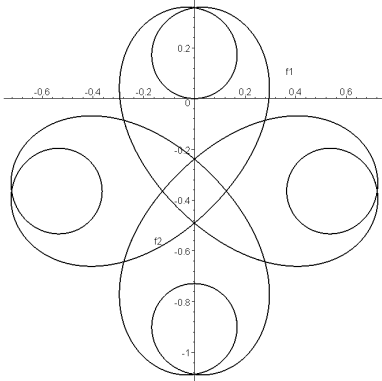
```

w := 2.:
kap := s -> 1 + 5*cos(s)^2;
profil(kap, 0, 6*Pi);

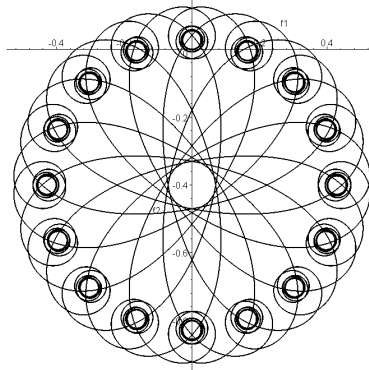
```

У результаті в системі декартових координат $\{x, y\}$ буде побудована лінія, що відповідатиме заданим користувачем параметрам **kap** і **w**.

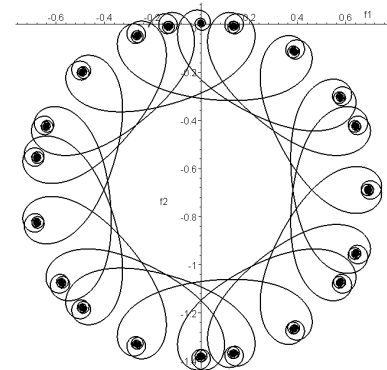
Приклад 2.9. Нехай $(5\cos^2(s) + 1)^w$ є описом закону зміни кривини уздовж лінії. На рис. 2.9 зображені відповідні лінії різних степенів кривини.



$$w = 1; 0 \leq s \leq 6\pi$$



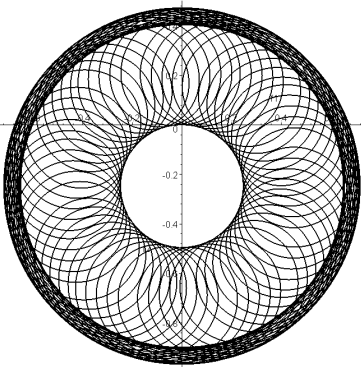
$$w = 2; 0 \leq s \leq 6\pi$$



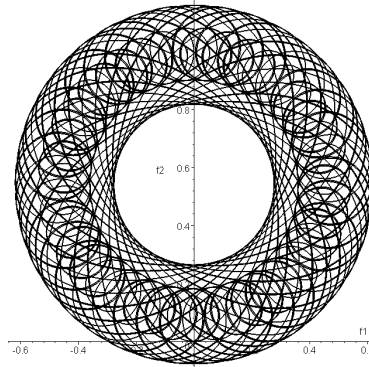
$$w = 3; 0 \leq s \leq 60\pi$$

Рисунок 2.9 – Кривина уздовж лінії змінюється за законом $(5\cos^2(s) + 1)^w$

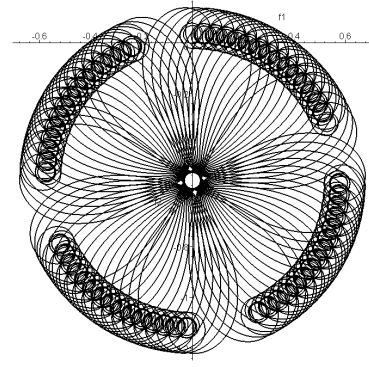
Приклад 2.10. Нехай $(5\cos^2(s)/4 + 1)^w$ є описом закону зміни кривини уздовж лінії. На рис. 2.10 зображені відповідні лінії різних степенів кривини.



$$w = 2; 0 \leq s \leq 60\pi$$



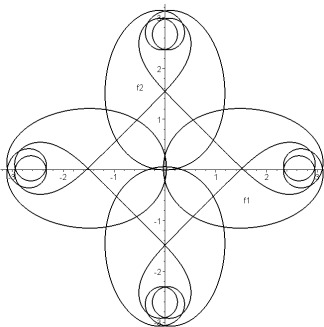
$$w = 3; 0 \leq s \leq 60\pi$$



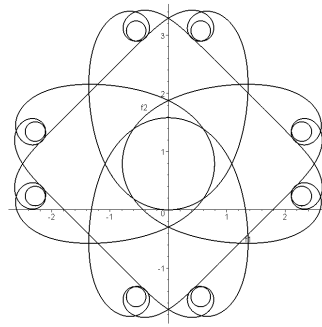
$$w = 4; 0 \leq s \leq 60\pi$$

Рисунок 2.10 – Кривина уздовж лінії змінюється за законом $(5\cos^2(s) + 1)^w$

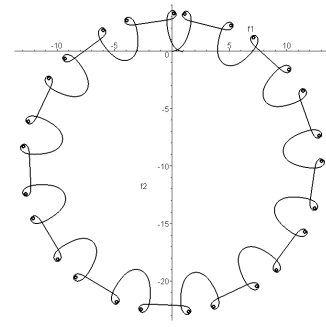
Приклад 2.11. Нехай $(\cos^2(s/2) + \sin^2(s/3))^w$ є описом закону зміни кривини уздовж лінії. На рис. 2.11 зображені відповідні лінії різних степенів кривини.



$$w = 2; 0 \leq s \leq 14\pi$$



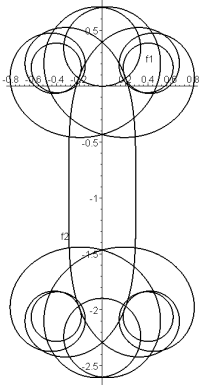
$$w = 3; 0 \leq s \leq 60\pi$$



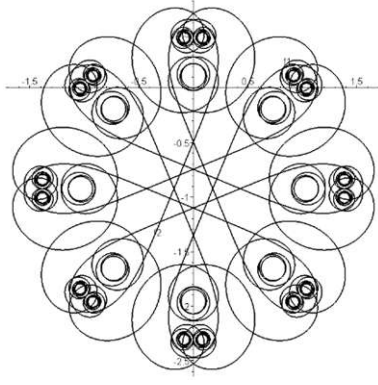
$$w = 4; 0 \leq s \leq 78\pi$$

Рисунок 2.11 – Кривина уздовж лінії змінюється за законом $(\cos^2(s/2) + \sin^2(s/3))^w$

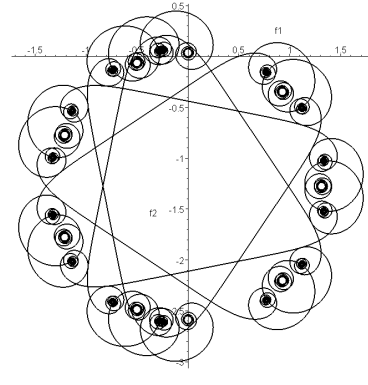
Приклад 2.12. Нехай $(3\cos^2(s/2) + 2\sin^2(s/3))^w$ є описом закону зміни кривини уздовж лінії. На рис. 2.12 зображені відповідні лінії різних степенів кривини.



$$w = 1; 0 \leq s \leq 12\pi$$



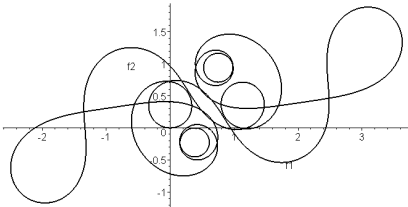
$$w = 2; 0 \leq s \leq 48\pi$$



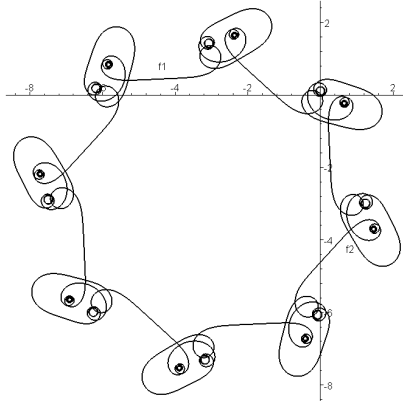
$$w = 3; 0 \leq s \leq 48\pi$$

Рисунок 2.12 – Кривина уздовж лінії змінюється за законом $(3\cos^2(s/2) + 2\sin^2(s/3))^w$

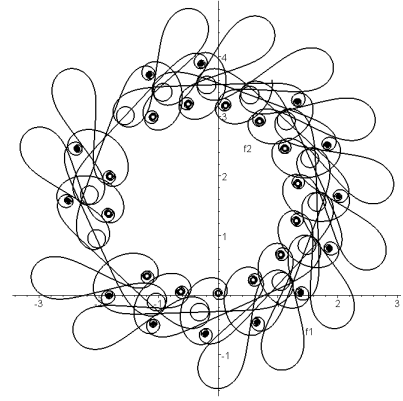
Приклад 2.13. Нехай $(3\cos^2(s/2) + 2\sin^3(s/3))^w$ є описом закону зміни кривини уздовж лінії. На рис. 2.13 зображені відповідні лінії різних степенів кривини.



$$w = 1; 0 \leq s \leq 12\pi$$



$$w = 2; 0 \leq s \leq 48\pi$$



$$w = 3; 0 \leq s \leq 79\pi$$

Рисунок 2.13 – Кривина уздовж лінії змінюється за законом $(3\cos^2(s/2) + 2\sin^3(s/3))^w$

2.3 Деякі варіанти опису кривих з керованою кривиною

Побудуємо візерункові розетки за допомогою ліній, вздовж яких їх кривини змінюються за законом функції $[1 + p \arccos(\cos(s))]^w$, де $w > 0$.

Досвід роботи показує, що незначні зміни параметра p призводять до значних змін в зображенні візерункової розетки.

Тому пропонується будувати N кадрів анімаційних зображень на інтервалі $[A...B]$ зміни параметра p . Для цього складено Maple-програму:

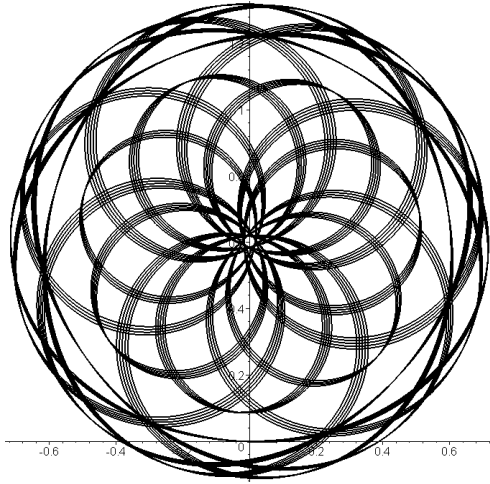
```

for i from 0 to N do
  p := evalf(A + (B - A)*i/N):
  z := convert(p, string):
  txt := cat(`p = `, z):
  kap := s -> 1 + p*arccos(cos(s));
  Gr[i] := display(profil(kap, 0, 66*Pi), title=txt);
end do:
display(seq(Gr[i], i=0..N), scaling=CONSTRAINED,
          insequence=true, view=[-1..1, -0.5..1.5]);

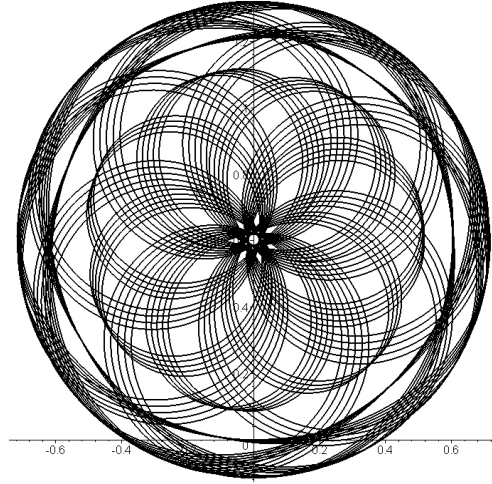
```

При цьому в кожному кадрі буде зображено значення параметра p , яке відповідатиме цьому зображенню.

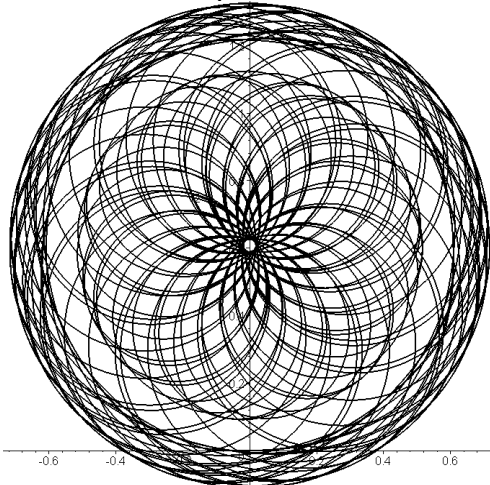
На рис. 2.14 наведено приклади візерункових розеток на деяких значеннях p лише з інтервалу $[0,969...1]$ при $w=1$.



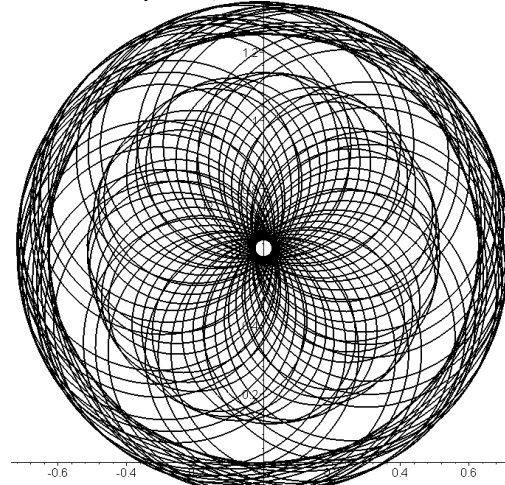
$$p = 1$$



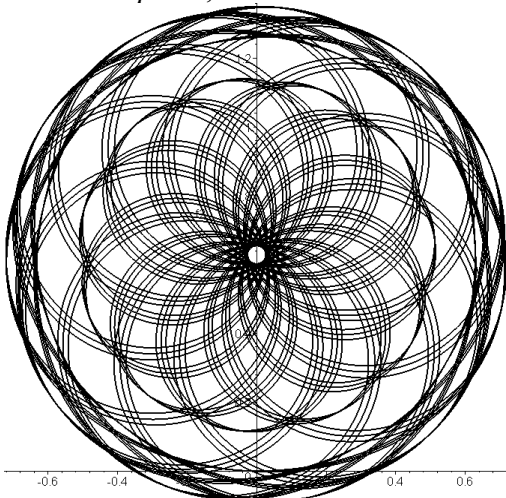
$$p = 0,9994444445$$



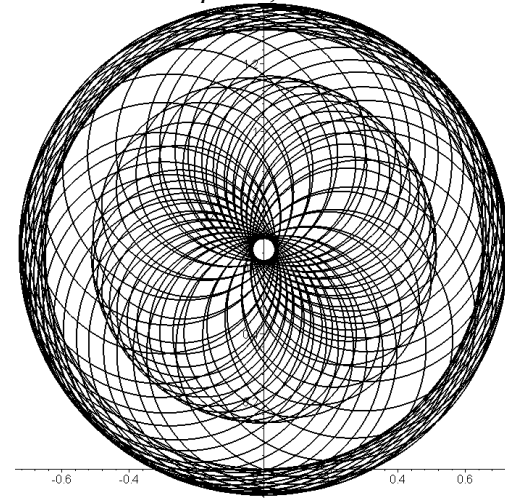
$$p = 0,9966666667$$



$$p = 0,985$$



$$p = 0,9833333334$$



$$p = 0,9694444445$$

Рисунок 2.14 – Приклади візерункових розеток залежно від параметра p при $w=1$

На рис. 2.15 – приклади візерункових розеток при $w=2$.

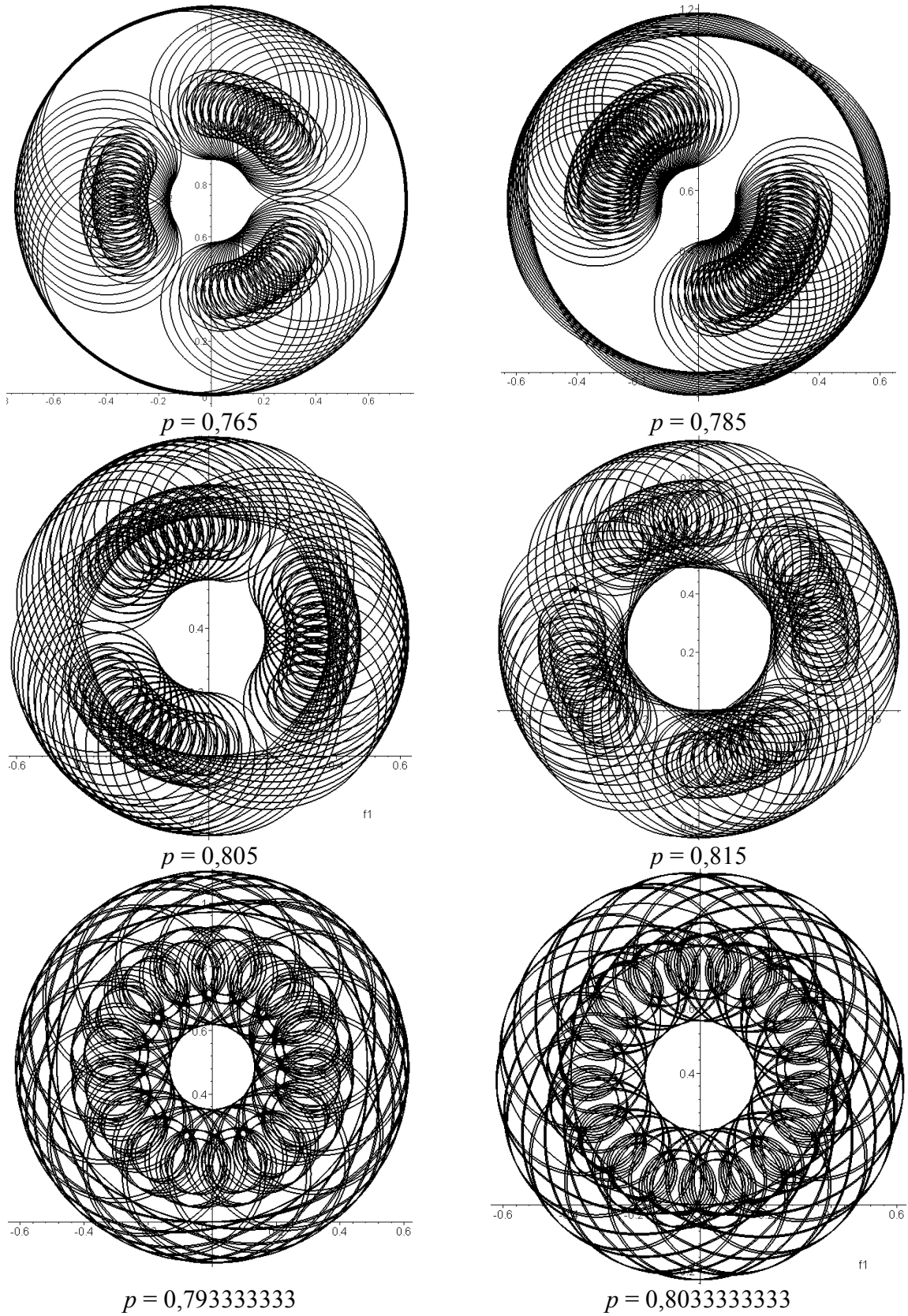
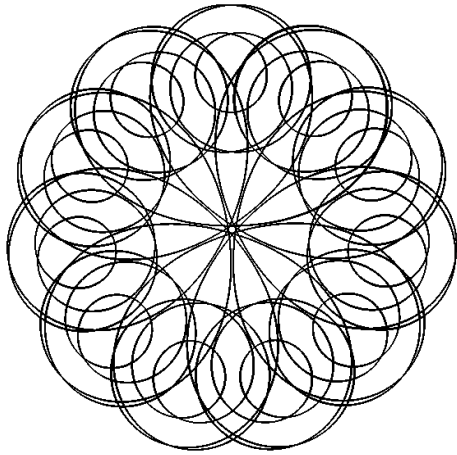
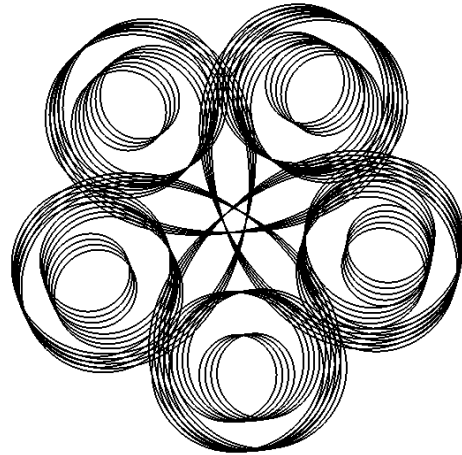


Рисунок 2.15 – Приклади візерункових розеток залежно від параметра p при $w=2$

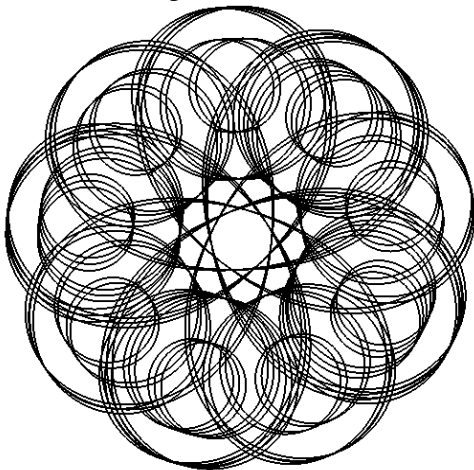
На рис. 2.16-2.19 наведено приклади візерункових розеток, побудованих за допомогою ліній, вздовж яких їх кривини змінюються за законом більш складної функції виду $\left[1 + p \arccos(\cos^n(s))\right]^w$.



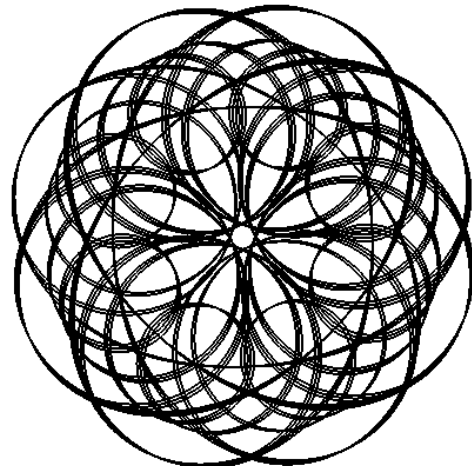
$$p = 0,5795$$



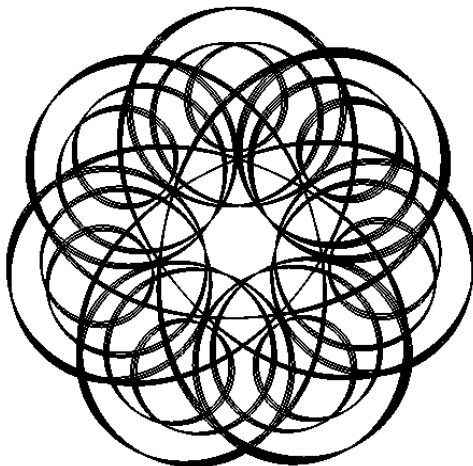
$$p = 0,576908$$



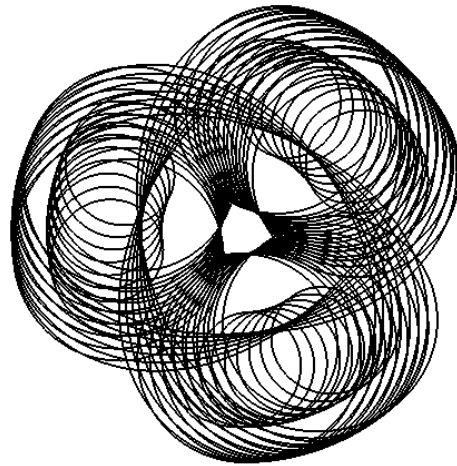
$$p = 0,573452$$



$$p = 0,549836$$

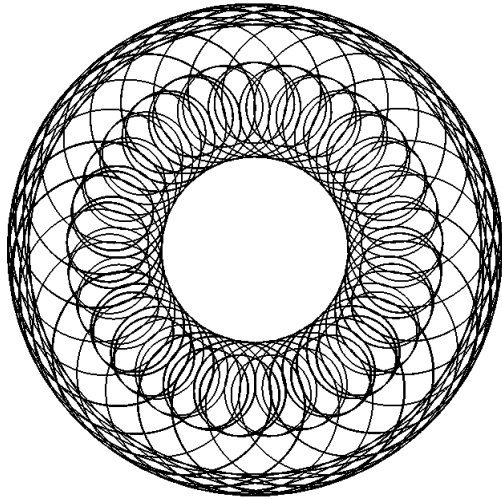


$$p = 0,56366$$

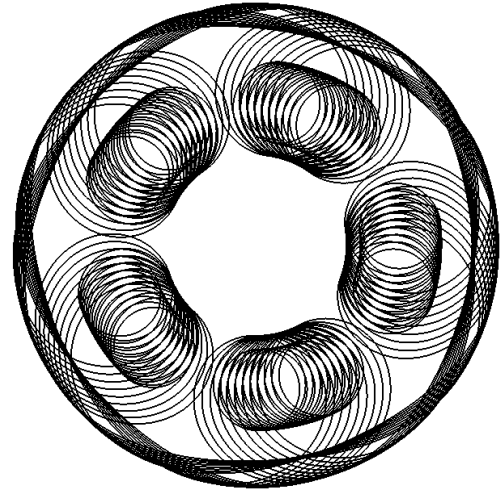


$$p = 0,557036$$

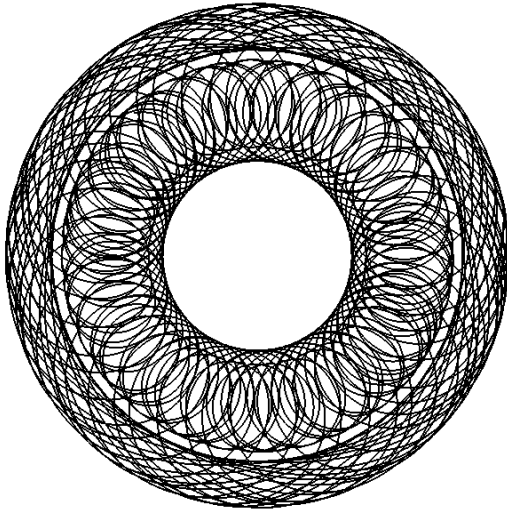
Рисунок 2.16 – Приклади візерункових розеток при $w=2$ і $n=3$ залежно від параметра p



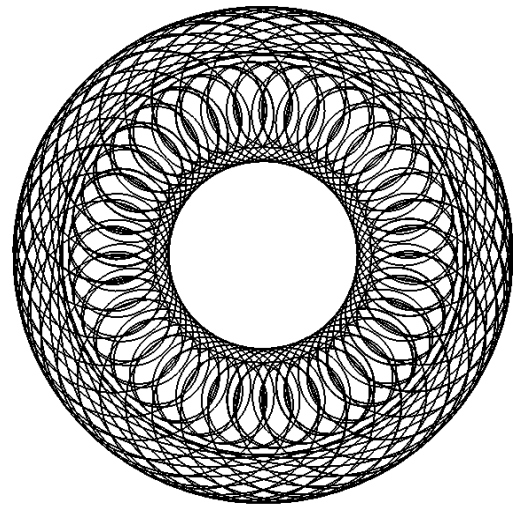
$p = 0,8365333$



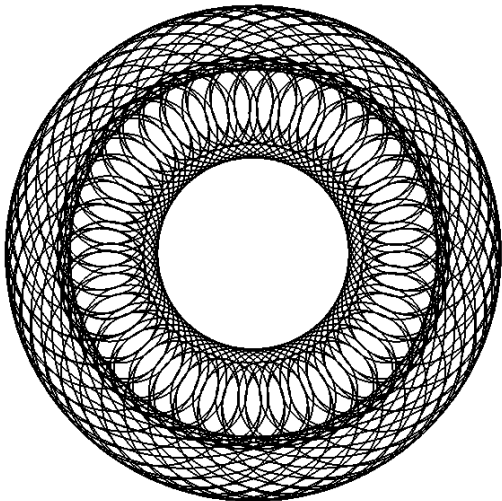
$p = 0,8403$



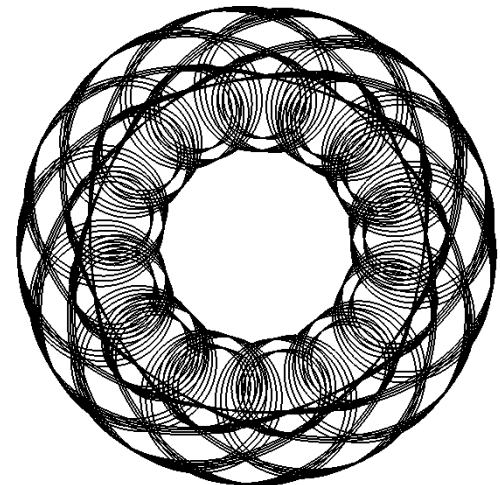
$p = 0,8505333$



$p = 0,85193333$

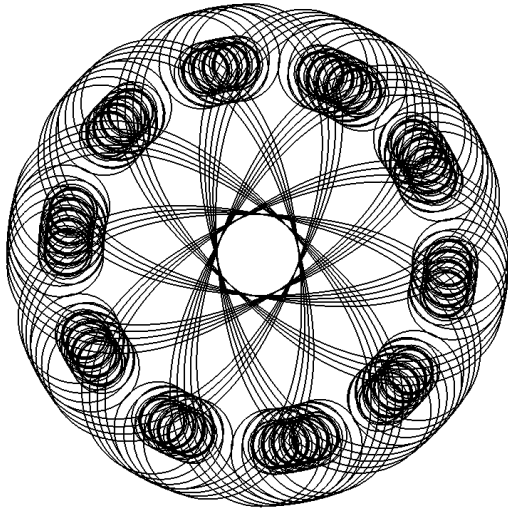


$p = 0,8584666$

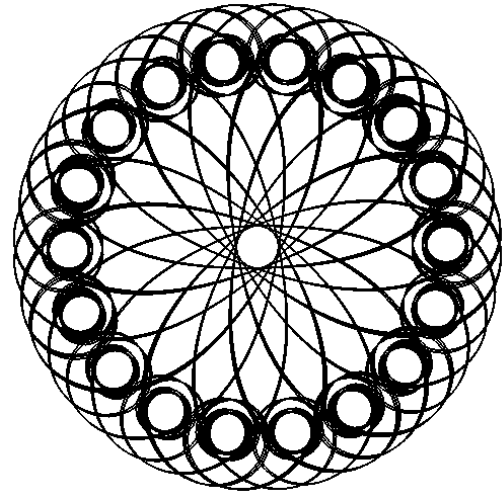


$p = 0,8626666$

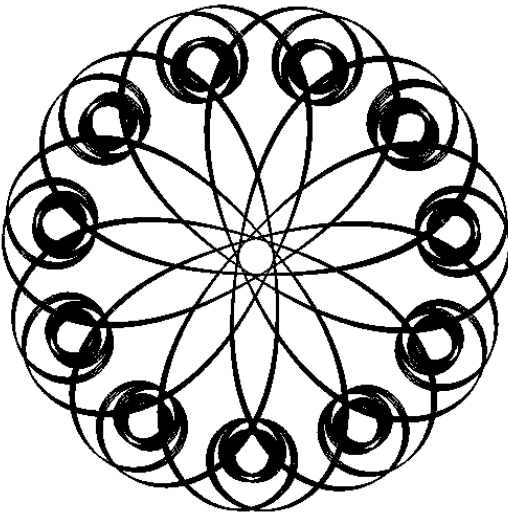
Рисунок 2.17 – Приклади візерункових розеток при $w=3$ і $n=2$ залежно від параметра p



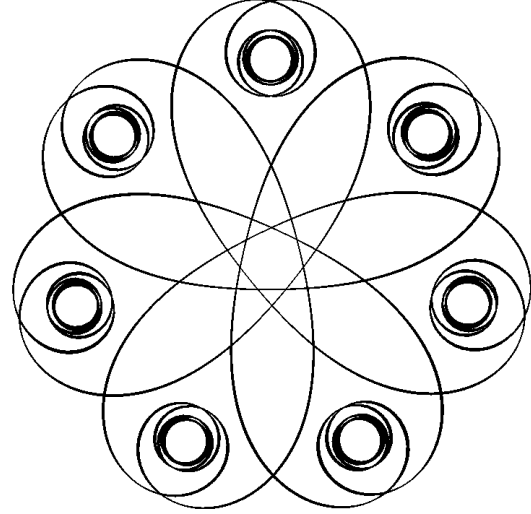
$p=0,8807$



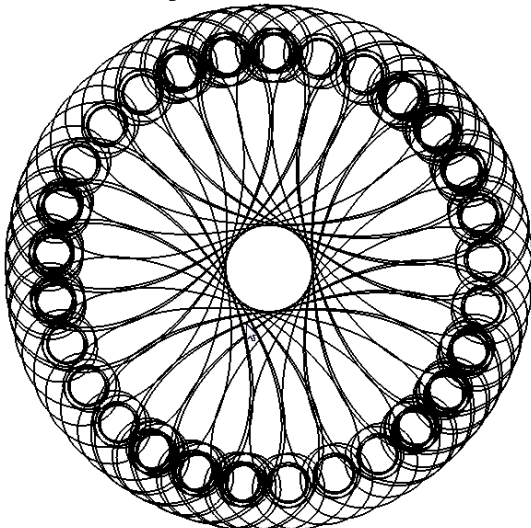
$p=0,8816666$



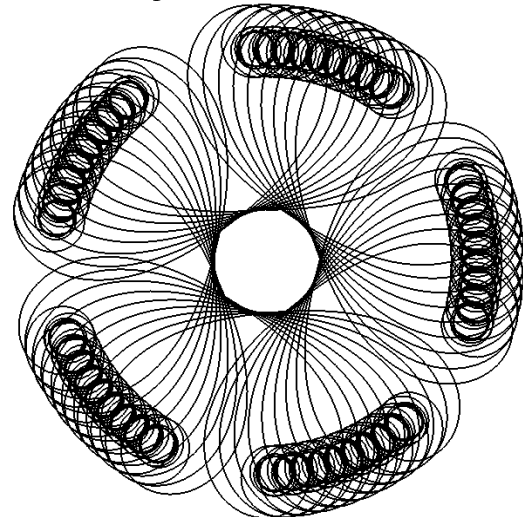
$p=0,88186666$



$p=0,881333333$

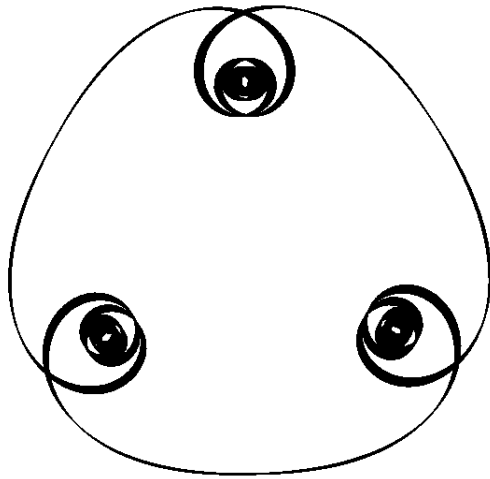


$p=0,8846$

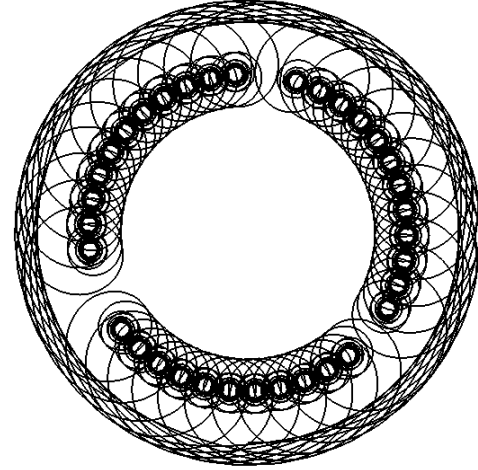


$p=0,885$

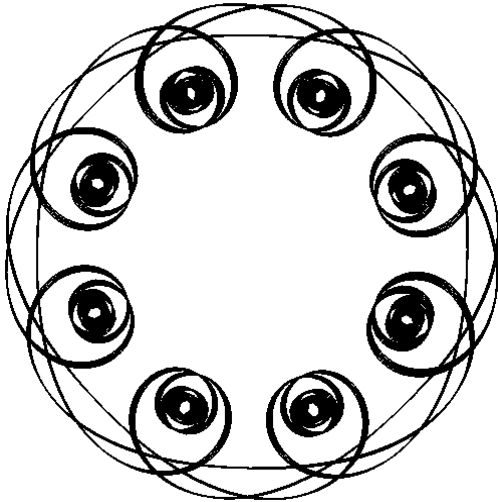
Рисунок 2.18 – Приклади візерункових розеток при $w=4$ і $n=4$ залежно від параметра p



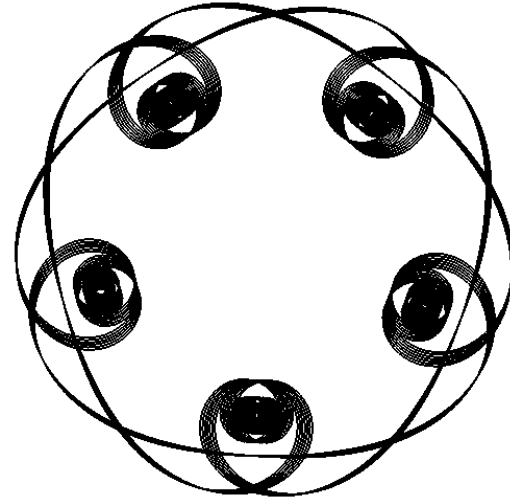
$$p = 0,8805333333$$



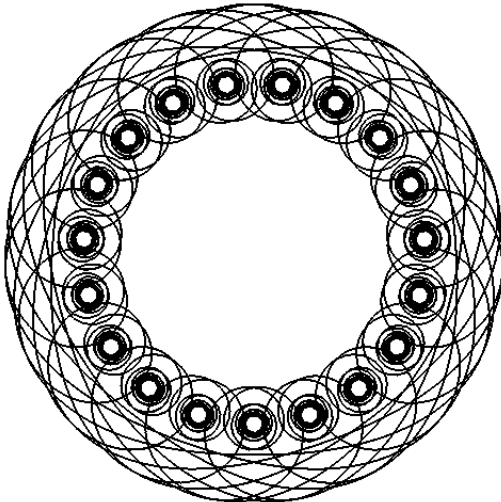
$$p = 0,8807$$



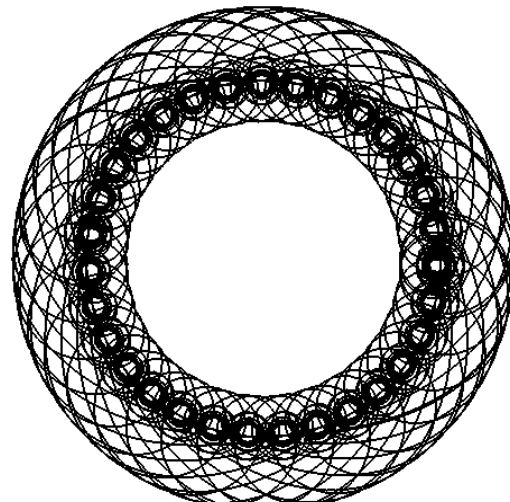
$$p = 0,88136666$$



$$p = 0,881866666$$



$$p = 0,8823$$



$$p = 0,88356666$$

Рисунок 2.19 – Приклади візерункових розеток при $w=5$ і $n=2$ залежно від параметра p

Результати досліджень

Розроблено спосіб побудови кривих за їхніми натуральними рівняннями.

Побудова кривих за їх кривиною $k(s)$ (s - натуральний параметр) полягає в розв'язанні системи диференціальних рівнянь Френе

$$\frac{d}{ds} \alpha(s) = k(s); \quad \frac{d}{ds} x(s) = \cos(\alpha(s)); \quad \frac{d}{ds} y(s) = \sin(\alpha(s)),$$

в результаті чого одержуємо натуральне рівняння лінії $\{x(s), y(s)\}$, де третя змінна α визначає кут дотику у досліджуваній точці цієї кривої з віссю Ox .

Розроблений спосіб дозволяє будувати зображення кривих, кривина яких змінюється за складними законами, які практично неможливо розкрити, наприклад, $k(s) = \left[1 + p \arccos(\cos^n(s))\right]^w$.

Висновки

1. Гільош – спосіб захисту бланків цінних документів від підробок, при цьому бажано використовувати вдосконалену технологію гільоша.

2. Геометричну основу опису та побудови графічного гільоширного захисту цінних паперів складають орнаменти.

3. Для зображення кривих пропонується застосовувати їхні натуральні рівняння – тобто такі рівняння, які описують кривину деякої лінії залежно від її натурального параметра s . Порівняно з параметричними натуральними рівняннями можна описати значно ширший клас кривих.

Список літератури.

1. Valiev, S., & E'tazarov, B. (1997). Zashhita czenny`kh bumag. M.: CheRo.
2. Вітчинкіна, К.О. (2009). Обґрунтування дизайну як творчої проектно-художньої діяльності. Вісник ХДАДМ, (8), 23-27.
3. Яковлев М. І. Основи композиції (геометричні аспекти художнього формотворення) (2008): Навч. посіб. 2-е вид. / В. Є. Михайленко, М. І. Яковлев. – К.: Каравела, 106-134.
4. Практичний дизайн і додрукарська підготовка. (2009). Гільош, тангірна сітка, захист документів. <http://design-praktik.com/2009/11/gilosh-tangirnaya-setka-zashhita-dokumentov/>.
5. Григорян, М. (2003). Гільош – захисна сітка. КомпьюАрт, (12). <http://www.compuart.ua/article.aspx?id=9366&iid=397>.
6. Zbenovich, V.G. (1989). Rannij e'tap tripol'skoj kul'tury` na territorii Ukrainy`. K.: Nauk. dumka.
7. Ornamental Borders, Scrolls And Cartouches in Historic Decorative Styles (1997) / New York: Dover Publications, Inc.
8. Kozhin, P.M. (1991). Н О drevnix ornamental`ny`kh sistemakh Evrazii. E`tnoznakovy`e funkczii kul'tury`, 129-151.
9. Konshin, A.A. (1999). Zashhita poligraficheskoy produkczii ot fal`sifikaczii. Sinus.

10. Korochkin, L.S. (2003). Sistemy` zashhity` i identifikaczii czenny`kh bumag. NTUP «Kriptotekh».
11. Kotov, Yu.V. (1988). Kak risuet mashina. Nauka.
12. Securesoft (б. д.). Programmny`j produkt dlya sozdaniya gil`oshirny`kh risunkov «Cerber» v.3.0. <http://securesoft.ru/soft.html>.
13. Prokopenko, V.V. (б. д.). Krasota tripol'skoj keramiki. http://www.ecodesign.kiev.ua/Ru/Publication/pub16_3_1.htm
14. Ардентов А.А. (2009) Розв'язання задачі Ейлера про еластики. Автоматика і телемеханіка, 4, 78–88.
15. Rashevskij, L.V. (1939). Kurs differenczial'noj geometrii. GONTI.
16. Savelov, A.A. (1960). Ploskie krivy`e. Sistematika, svojstva, primeneniya. Fizmatgiz.
17. Челомбітько, В.Ф. (2012). Використання ліній з керованими кривинами для побудови візерункових розеток. Прикладна геометрія та інженерна практика, 4(52), 150-156.
18. Челомбітько, В.Ф. (2012). Концептуальні моменти створення орнаментів: від графіки до комп'ютерних технологій. Технічна естетика і дизайн, (11), 199-203.
19. Челомбітько, В.Ф. (2012). Новий спосіб кодування дизайну поліграфічного захисту цінних паперів. Прикладна геометрія та інженерна графіка, 4(55), 236-245.
20. Челомбітько, В.Ф. (2011). Побудова візерунків за допомогою кривих з керованими кривинами. Технічна естетика і дизайн, (9), 247-254.
21. Челомбітько, В.Ф. (2011). Побудова візерункових розеток за допомогою ліній з керованими кривинами. Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво, (6), 270-275.
22. Kaplan, C.S. (2002). Computer Graphics and Geometric Ornamental Design. A dissertation submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. University of Washington.
23. Dubina, N. (2002). Mathematics guilloche. CompuArt, (2), 24-27.
24. Dubina N. (2002). Printing methods of protection. CompuArt, (1), 24-27.
25. Liakhovych, O., & Riznyk, V. (2010). Guilloche as a special kind of printed documents protection. XII International PhD Workshop OWD, 57-60.
26. Liakhovych, O. & Riznyk, V. (2011). Investigation of information technologies for creating guilloches. XIII International PhD Workshop OWD, 97-100.
27. Syracuse Ornamental Co. (1997). Ornamental Borders, Scrolls And Cartouches in Historic Decorative Styles. New York: Dover Publications, Inc.
28. Rogers, D. (1989). Algorithmic foundations of computer graphics. M. World.
29. Farin, G. (2001). Curves and Surfaces for CAGD, Morgan Kaufmann, 5th edition.
30. Yoshida, N., & Saito, T. (2006). Interactive aesthetic curve segments. The Visual Computer, 22(9), 896-905.
31. Farin, G. (2006). Class A Bezier curves. Computer Aided Geometric Design, 23(7), 573-581.
32. Ziatdinov, R., Yoshida, N., & Kim, T. (2012). Fitting G2 multispiral transition curve joining two straight lines. Computer Aided Design, 44(6), 591-596.
33. Kim, M.-J., Kim, M.-S., & Shin, S.Y. (1995). A general construction scheme for unit quaternion curves with simple high order derivatives. SIGGRAPH '95 Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 369-376.