УДК 621.391

А. Б. БЕЛОГОРЦЕВ, канд. физ.-мат. наук, *Д. М. ВАВРИВ*, д-р физ.-мат. наук, *М. Ф. ПОЛЯШЕНКО*, *О. А. ТРЕТЬЯКОВ*, д-р физ.-мат. наук

О СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В МНОГОМОДОВЫХ СИСТЕМАХ

Возникновение случайных колебаний в радиофизических системах возможно не только в результате проявления естественных флюктуаций, но может быть также следствием нелинейных свойств детерминированных систем. Установлено, что способностью генерировать хаотические колебания обладает широкий класс нелинейных радиофизических объектов [1; 2]. Большинством своих свойств хаотические колебания не отличаются от истинно случайных: их корреляционные функции убывают экспоненциально, спектры мощности непрерывны и т. д. В то же время существует ряд свойств, которые разграничивают эти классы случайных процессов, например размерность инвариантных множеств в фазовых пространствах, являющихся образами таких процессов. В этой связи представляется важным провести сопоставление хаотических колебаний и классических моделей случайных процессов по их статистическим характеристикам. Наиболее подробно с этой точки зрения изучены одномерные отображения, для которых в ряде случаев удается провести достаточно полное аналитическое исследование [2; 3]. Вероятностные свойства хаотических колебаний, возникающих в реальных радиофизических системах, практически не изучены.

Приведены результаты исследований статистических характеристик стохастических колебаний, возникающих в одной из типичных моделей динамики поля в многомодовых радиофизических системах.

Рассмотрим совокупность двух нерезонансно взаимодействующих мод, одна из которых является пассивной (затухает в линейном приближении), а другая — активной (нарастает в линейном приближении). Относительно собственных частот мод ω_p, ω_a предположим, что они не находятся в сильном рациональном отношении и, следовательно, резонансное взаимодействие между ними отсутствует. Тогда при возбуждении данной системы мод внешним гармоническим источником с частотой ω_0, близкой к частоте ω_p пассивной моды, динамика колебаний в приближении кубической нелинейности описывается следующей системой укороченных уравнений:

$$\frac{dp}{d\tau} = (\alpha_p - \gamma_p p^2 - \mu_p a^2)\, p + R \sin\varphi; \qquad (1)$$

$$p\frac{d\varphi}{d\tau} = (-\Delta + \beta p^2 + \varkappa a^2)\, p + R\cos\varphi;$$

$$\frac{da}{d\tau} = (\alpha_a - \gamma_a a^2 - \mu_a p^2)\, a.$$

Здесь p, a — амплитуды пассивной и активной мод; φ — фаза колебаний пассивной моды; τ — медленное время; $\alpha_p < 0$, $\alpha_a > 0$ — параметры, определяющие устойчивость мод в линейном приближении; параметры γ_p, γ_a характеризуют зависимость диссипации энергии системы от амплитуд мод; μ_p, μ_a — параметры диссипативной, а $\varkappa$ — реактивной связи мод; β — параметр неизохронности колебаний пассивной моды; R — нормированная амплитуда внешнего сигнала; Δ — нормированная расстройка между частотами ω_0 и ω_p. Системы типа (1) широко применяются для анализа межмодовых взаимодей-

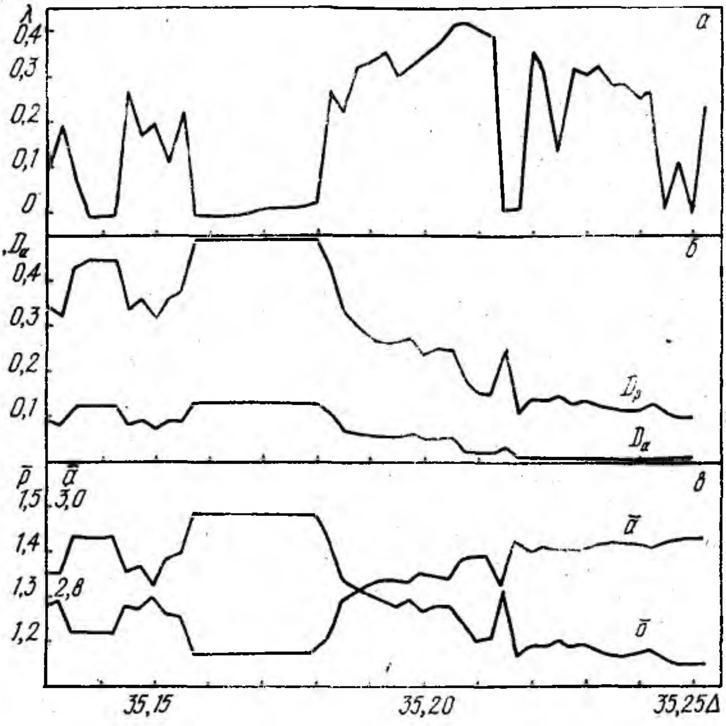

Рис. 1

ствий в электронике СВЧ [4]. Возможность существования хаотических колебаний в моделях с нерезонансным взаимодействием впервые была показана в работе [5].

Система уравнений (1) характеризуется довольно большим числом параметров. Ясно, что провести полное ее исследование при всех возможных комбинациях значений параметров невозможно. Поэтому ограничимся анализом зависимости свойств хаотических колебаний от параметра частотной расстройки Δ, зафиксировав остальные таким образом: $\alpha_p = -1$; $\alpha_a = 1$; $\gamma_p = \gamma_a = \mu_p = \mu_a = 0{,}1$; $\beta = \varkappa = 3$; $R = 6$. Существование хаотических колебаний в системе (1) показано на рис. 1, *а*, где приведена рассчитанная численно по стандартной методике [1; 2] зависимость максимального характеристического показателя Ляпунова λ от Δ. Она указывает на наличие странного аттрактора в не-которых интервалах изменения Δ, в которых величина λ положительна.

Определение статистических свойств возбуждаемых хаотических колебаний предполагает проведение статистического усреднения величин, характеризующих такие колебания, по ансамблю. В данном случае ансамбль реализаций случайного процесса представляет собой решения уравнений (1), отличающиеся начальными значениями величин p, φ, a. Отметим, что локальная неустойчивость движения на странном аттракторе приводит к тому, что распределение фазовых траекторий на нем с течением времени стремится к инвариантному. Это свойство исключает зависимость статистических характеристик аттрактора от начального состояния ансамбля, что подтверждается результатами подробных численных экспериментов. Однако при проведении расчетов необходимо учитывать, что выбор начального распределения реализаций оказывает существенное влияние на длительность переходных процессов, а следовательно, и на время расчета статистических характеристик на ЭВМ. В частности, выбор начальных условий в некоторой малой окрестности странного аттрактора, которые были получены путем возмущения одной фазовой траектории, позволял в несколько раз сократить время расчета статистических средних по сравнению с другими способами выбора начальных условий.

Основной вопрос, от которого зависят как методика определения статистических характеристик, так и интерпретация полученных результатов,— вопрос о стационарности хаотических колебаний. Поскольку уравнения (1) автономны и, следовательно, инвариантны относительно произвольного сдвига по времени, можно предположить, что конечномерные распределения порождаемых ими хаотических процессов не зависят от времени. Однако нельзя заранее исключить возможность нестационарности таких процессов, которая может быть вызвана, например, «пульсациями» во времени странного аттрактора в силу динамических свойств системы (1). Для выяснения этого вопроса были проведены численные исследования, на характерных результатах которых мы и остановимся.

Стационарность процесса в широком смысле по определению означает независимость его математического ожидания от времени и инвариантность его корреляционной функции относительно произвольного временного сдвига. Для установления характера такой зависимости применительно к системе (1) проводился расчет средних по ансамблю значений p, φ, a, а также их дисперсий и законов распределения плотностей вероятности. Строились зависимости амплитуды P и фазы Φ математического ожидания случайного процесса $pe^{i\varphi}$ от времени в точке $\Delta = 35{,}2$, соответствующей режиму хаотических колебаний при размерах ансамблей от 200 до 3200 реализаций на отрезке безразмерного времени $60 \leqslant \tau \leqslant 105$. В полученных зависимостях не проявляется выраженной периодичности по времени. Кроме того, с увеличением размера ансамбля N значение среднего квадратичного отклонения ε величин P и Φ от их постоянных составляющих на рассматриваемом интервале времени изменяется пропорционально $N^{-\alpha}$, где

$\alpha \simeq \frac{1}{2}$. Например, значение среднего квадратичного отклонения ε величины $P(\tau)$ для $N = 200$ равно 0,045, при $N = 800$ — $\varepsilon = 0{,}018$, а при $N = 3200$ величина ε уменьшается до $\simeq 10^{-2}$, что соответствует примерно 0,8 % от постоянной составляющей амплитуды P. В соответствии с общими положениями математической статистики это дает основание считать, что имеющиеся флюктуации величины P во времени обусловлены исключительно эффектом конечности ансамбля реализаций, что неизбежно в численных расчетах. Аналогичные закономерности изменения во времени в зависимости от N имеют место

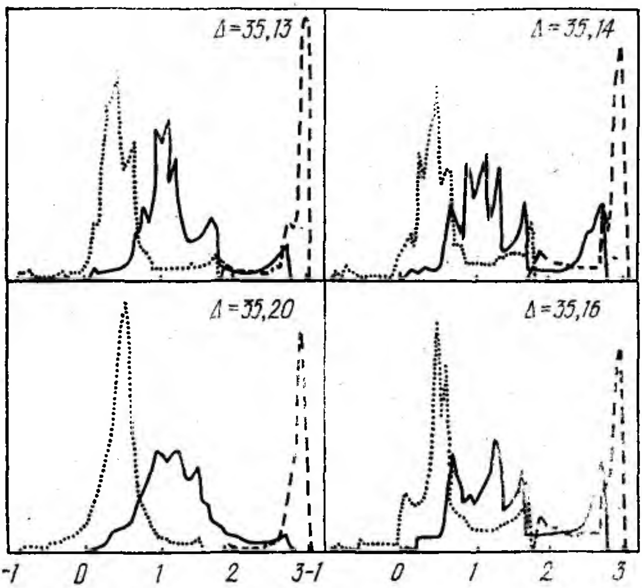

Рис. 2

и для других усредненных по ансамблю величин. Тем самым можно утверждать, что стохастические колебания, соответствующие странному аттрактору системы (1), стационарны.

Совпадение с точностью до 1 % средних по ансамблю величин со средними по времени, вычисленными по отдельным реализациям, свидетельствует об эргодичности хаотических колебаний. Это позволяет рассчитывать статистические характеристики процесса путем анализа только одной реализации. На рис. 1, *б*, *в* показаны зависимости от Δ средних значений амплитуд обеих мод $\bar{p}$ и $\bar{a}$, а также их дисперсий. Эти величины рассчитывались усреднением по интервалу времени τ, равному 2500, при котором погрешность вычисления не превышает 1—2 %. Этот интервал на два порядка больше характерного времени, в течение которого фазовая траектория отслеживает крупномасштабную структуру странного аттрактора ($T_{\text{хар}} \simeq 25$).

Из приведенных на рис. 1, *б, в* зависимостей следует наличие определенной корреляции между моментами 1-го и 2-го порядков и показателем Ляпунова. Отметим, что в областях значений параметра частотной расстройки Δ, соответствующих хаотическому поведению решений системы (1), дисперсия этих процессов меньше, чем в «окнах порядка».

Плотности распределения вероятностей амплитуд пассивной моды (сплошные линии), активной моды (штриховые линии) и фазы φ (точечные линии) представлены на рис. 2 для ряда характерных значений Δ, соответствующих хаотическим ($\Delta = 35{,}13$; $35{,}2$) и регулярным ($\Delta = 35{,}14$; $35{,}16$) колебаниям. Распределение амплитуды пассивной моды в областях порядка имеет вид суперпозиции β-распределений с параметрами $0 < \alpha, \beta < 1$. В области хаоса провалы β-распределений заполняются, и кривую плотности распределения вероятности можно аппроксимировать гамма-распределением, хотя такая аппроксимация является грубой и отвергается критериями согласия даже при малых уровнях значимости.

Таким образом, проведенные исследования показали, что возникающие в системе (1) стохастические колебания стационарны и, следовательно, для их анализа можно использовать хорошо разработанный математический аппарат теории стационарных случайных процессов. Вероятностные распределения хаотических колебаний описываются известными законами распределения вероятностей неудовлетворительно. Их адекватное математическое отражение нуждается в изучении и разработке новых математических моделей случайных процессов.

Список литературы: 1. *Анищенко В. С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Ч. 1, 2. Саратов. 1985. 224 с.; 1986. 200 с. 2. *Неймарк Ю. И.*, Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М. 1987. 424 с. 3. *Ulam S. M., von Neumann J.* On Combination of Stochastic and Deterministic Processes // Bull. Amer. Math. Soc. 1947. Vol. 53, No 11. P. 1120. 4. *Нусинович Г. С.* К теории синхронизации многомодовых электронных СВЧ генераторов // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, № 11. С. 1689—1698. 5. *Белогорцев А. Б., Ваврив Д. М., Третьяков О. А.* Влияние пассивной моды на устойчивость синхронных колебаний // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 11. С. 36—39.

Поступила в редколлегию 07.05.88

УДК 621.385

В. Е. КОНОВАЛОВ, П. В. НЕШМОНИН, В. В. КРИВОШЕЯ

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ МИНИМУМА ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛОВО

Необходимое условие генерации в ЛОВО — обращение в нуль высокочастотного поля в некотором сечении пространства взаимодействия, удаленном от выхода. В том случае, когда высокочастотное поле с удалением от выхода достигает положительного минимума,