

УДК 517.9:535.4

А. И. ВЯЗЬМИТИНОВ, С. С. ВЯЗЬМИТИНОВА, В. А. РЕЗУНЕНКО

**РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛОВ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ
СИСТЕМ С РАЗГРУЖЕННЫМ СФЕРИЧЕСКИМ КАТОДОМ**

Актуальная проблема физики и техники приборов СВЧ — создание высокоэффективных и долговечных катодно-подогревательных узлов (КПУ). Один из способов решения этой проблемы состоит в том, чтобы использовать катоды как можно более «разгруженные» по тепловым и эмиссионным характеристикам, а затем с помощью формирующей части электронно-оптической системы (ЭОС) «сжимать» электронный пучок до нужной плотности. Наиболее подходит для этого, с нашей точки зрения, полый сферический катод, который давно привлекает внимание специалистов по электронной оптике. Практическое использование катода такого типа до сих пор сдерживается физически обусловленными трудностями, связанными с почти полной экранировкой поля анода, расположенного вблизи отверстия в сферической полости, на внутренней поверхности которой расположено термоэмиссионное покрытие. Экспериментальное же исследование влияния дополнительных электродов, введенных внутрь катодной полости, на результирующие характеристики КПУ весьма затруднительно по технологическим причинам. Сложность экспериментального исследования ЭОС стимулирует разработку эффективных численно-аналитических методов решения соответствующих задач математической

Применим метод интегрального преобразования Агеля [1] для регуляризации и обращения [2] операторного уравнения первого рода с целью решения задачи о распределении потенциала в ЭОС, состоящей из полого сферического катода и системы ускоряющих и формирующих электродов в виде круглых диафрагм и тонких колец, расположенных аксиально-симметрично с катодной полостью. Пусть катод образован частью идеально проводящей бесконечно тонкой сферы радиуса a с плоским срезом, полярный угол среза — θ_0 ; круглые диафрагмы и тонкие кольца (т. е. дополнительный электрод, дисковый анод и фокусирующий электрод) образованы конечным числом N круговых петель, для которых r_j — расстояние от j -й петли до точки $(0, 0, 0)$; α_j — полярный угол раскрытия j -й петли ($1 \leq j \leq N$), причем для M_1 петель, образующих электрод и часть дискового анода $r_j < a$ ($j = 1, 2, \dots, M_1$), для остальных $N - M_1$ петель $r_j > a$ ($j = M_1 + 1, M_1 + 2, \dots, N$). Здесь предполагается, что начало сферической системы координат совмещено с центром сферического катода, полярная ось — с осью симметрии катода и осью всей ЭОС. Пусть φ_0 — потенциал катода; Q_j — полный заряд j -й петли; ϵ — диэлектрическая проницаемость среды.

Распределение потенциала найдем как решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с учетом требуемых ограничений на поведение потенциала в окрестности ребра сферического катода, в окрестности начала координат, круговых петель и на бесконечности. Потенциалы $\varphi_{N+1}^{(1)}, \varphi_{N+1}^{(2)}$ искомым электростатических полей и потенциалы $\varphi_j^{(0)}$ ($1 \leq j \leq N$) заданных источников используя метод разделения переменных в сферической системе координат, представим рядами по полной ортонормированной системе $P_n(\cos \theta)$ нормированных полиномов Лежандра первого рода степени n ($n = 0, 1, 2, \dots$) аргумента $\cos \theta$ в пространстве функций $L^2[0, \pi]$, интегрируемых с квадратом:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{N+1}^{(1)} \\ \varphi_{N+1}^{(2)} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \theta) M_n \begin{cases} A_n^{(1)} r^n, & r < a; \\ B_n^{(2)} r^{-n-1}, & r > a; \end{cases}$$

$$\varphi_j^{(0)} = \frac{Q_j}{4\pi\epsilon r_j} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) P_n(\cos \alpha_j) M_n \begin{cases} \left(\frac{r}{r_j}\right)^n, & r < r_j; \\ \left(\frac{r_j}{r}\right)^{n+1}, & r > r_j, \end{cases} \quad (1)$$

где $P_n(\cos \alpha_j)$ — полиномы Лежандра аргумента $\cos \alpha_j$, $M_n = 2^{-1}(2n + 1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, N$. Используя метод частичных областей и граничные условия, получаем для нахождения коэффициентов $B_n^{(2)}$ потенциала $\varphi_{N+1}^{(2)}$ в пространстве L_2 числовых последовательностей следующую систему парных сумматорных уравнений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) [D_n + e_n^{(1)}] P_n(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [D_n + e_n^{(2)}] P_n(\cos \theta) = \varphi_0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi; \quad (2)$$

$$D_n^{(1)} = B_n^{(2)} \cdot a^{-n-1}, \quad \varphi_0 = 4\pi\epsilon;$$

$$e_n^{(1)} = \sum_{j=1}^{M_1} \frac{Q_j}{r_j} P_n(\cos \alpha) \left(\frac{r_j}{a}\right)^{n+1};$$

$$e_n^{(2)} = \sum_{j=M_1+1}^{M_2} \frac{Q_j}{r_j} P_n(\cos \alpha) \left(\frac{a}{r_j}\right)^n.$$

Система уравнений (2) не пригодна для непосредственного нахождения коэффициентов D_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Оператор этой системы неограничен в пространстве $L^2[0, \pi]$. С помощью интегрального преобразования Абеля эквивалентными операциями приведем (2) к виду, удобному для обращения и явного нахождения коэффициентов D_n . Сначала уравнение на $[0, \theta_0]$ из (2) проинтегрируем почленно как ряд Фурье функции из $L^2[0, \pi]$ по полной ортогональной системе функций $P_n(\cos \theta)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Затем, используя соотношение между полиномами Лежандра $P_n(x)$ и их производными $(2n+1)P_n(x) = P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)$ [3] и интегрируя это соотношение, приходим к уравнению на $[0, \theta_0]$ из (2), не содержащему коэффициентов $(2n+1)$ в левой части ряда; возникающая при интегрировании уравнения на подынтервале $[0, \theta_0]$ из (2) константа, как нетрудно видеть, равна нулю. Далее подставим в оба уравнения из (2) вместо полиномов Лежандра их интегральные представления Мелера — Дирихле [3], поменяем порядки интегрирования и суммирования в обоих уравнениях и перенесем все слагаемые в уравнениях в левую часть, получим вместо каждого уравнения однородное интегральное уравнение типа Абеля. Каждое такое уравнение имеет единственное тривиальное решение, которое находится при помощи композиции с ядром вида

$(x-y)^{-\frac{1}{2}}, (x > y)$ [4]. Так как в интегральных уравнениях в качестве неизвестных функций-решений служат ряды Фурье по элементарным функциям, то в результате эквивалентных операций получены ряды Фурье по элементарным функциям с одинаковыми коэффициентами при неизвестных D_n вместо рядов по $P_n(\cos \theta)$ из (2) с различными коэффициентами при неизвестных D_n на подынтервалах $[0, \theta_0]$ и $(\theta_0, \pi]$ основного интервала $[0, \pi]$. Обращая установленные ряды Фурье, определяем явный вид коэффициентов D_n , а вместе с ними и искомых коэффициентов $B_n^{(2)}$ (1):

$$B_n^{(2)} = a^{n+1} \left\{ \varphi_0 [\sigma_{n,0} - \alpha_{n,0}^0] + \sum_{m=0}^{\infty} e_m^{(1)} \alpha_{n,m}^{(1)} - \sum_{m=0}^{\infty} e_m^{(2)} [\sigma_{n,m} - \alpha_{n,m}^{(2)}] \right\}, \quad (3)$$

где

$$\alpha_{n,m}^{(1)} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-m)\theta_0}{n-m} - \frac{\sin(n+m+1)\theta_0}{n+m+1} \right], \quad n \neq m;$$

$$\alpha_{n,n}^{(1)} = \frac{1}{\pi} \left[\theta_0 - \frac{\sin(2n+1)\theta_0}{2n+1} \right];$$

$$\sigma_{n,m} = 0, \quad n \neq m; \quad \sigma_{n,n} = 1; \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Для нахождения коэффициентов $A_n^{(1)}$ потенциалов $\Phi_{N+1}^{(1)}$ (1) воспользуемся линейным соотношением между коэффициентами $A_n^{(1)}$ и $B_n^{(1)}$, вычисленным из граничных условий

$$A_n^{(1)} = B_n^{(2)} a^{-2n-1} - e_n^{(1)} a^{-n} + e_n^{(2)} a^{-n}, \quad n \geq 0.$$

Данное решение удобно использовать для проведения систематических расчетов распределения потенциала с помощью ЭВМ. Так ряды в (3) сходятся не хуже, чем геометрические прогрессии со знаменателями, значительно меньшими, чем единица, при этом выбор знаменателей прогрессий, зависящих от соотношений r_j/a ($1 < j < M_1$) и a/r_j ($M_1 + 1 \leq j \leq N$), полностью контролируется. Управление распределением потенциала ЭОС производится выбором геометрических и физических параметров катода и круговых петель, количества петель, составляющих электроды и анод. Наличие большого числа параметров ЭОС требует проведения систематических расчетов на ЭВМ, анализа полученных результатов. Такому анализу будет посвящено отдельное сообщение.

Список литературы: 1. Шестопалов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. К., 1983. 251 с. 2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986. 287 с. 3. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. М., 1974. Т. 2. 295 с. 4. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., 1960. 299 с.

Поступила в редколлегию 05.04.88