УДК 517.927.4:517.988.8

ЗАСТОСУВАННЯ ДВОБІЧНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ У МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ТЕРМОХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ (ОДНОВИМІРНИЙ ВИПАДОК)

Янбеков Р.Я.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ
м. Харків, Україна
тел. +38 (066) 373-00-08, email: ravil.yanbekov@nure.ua

The paper considers the application of bilateral iterative methods to the solution of the first boundary value problem for an ordinary semi-linear differential equation with the Helmholtz operator, which occurs in mathematical modeling of thermochemical processes.

При математичному моделюванні стаціонарних термохімічних процесів, що відбуваються у плоскому шарі $0 \le x \le l$, приходять до наступної нелінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$-u'' = f(x,u),\ 0 < x < l, \tag{1}$$

$$u(x) > 0,\ 0 < x < l, \tag{2}$$

$$u(0) = u(l) = 0. \tag{3}$$

Тут функція $f(x,u)$ відповідає нелінійним джерелам тепловиділення, джерелам речовини при дифузії тощо. Типовою є ситуація, коли $f(x,u) = -qu + g(x,u)$, де $g(x,u)$ є неперервною та додатною при $x \in [0, l]$, $u > 0$ функцією. Доданок qu описує джерела чи стоки тепла або речовини при хімічній реакції, які пропорційні температурі. При цьому значенню $q > 0$ відповідає стоку, а $q < 0$ – джерелу. Позначивши $q = \pm\kappa^2$, від задачі (1) – (3) ми приходимо до задачі

$$-u'' \pm \kappa^2 u = g(x,u),\ 0 < x < l, \tag{4}$$

$$u(x) > 0,\ 0 < x < l, \tag{5}$$

$$u(0) = u(l) = 0. \tag{6}$$

У роботі [2] для випадку рівняння $-u'' + \kappa^2 u = g(x,u)$ було обґрунтовано застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Цей метод полягає у переході від диференціальної задачі до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, ядром якого є функції Гріна першої крайової задачі для оператора Гельмгольця $-u'' + \kappa^2 u$. Ця функція Гріна має вигляд

$$G(x,s) = \frac{1}{\kappa\,\mathrm{sh}\,l\kappa}\begin{cases}\mathrm{sh}\,\kappa x\,\mathrm{sh}\,\kappa(l-s), & 0 \le x \le s,\\ \mathrm{sh}\,\kappa s\,\mathrm{sh}\,\kappa(l-x), & s \le x \le l,\end{cases}$$

і є невід'ємною в квадраті $0 \le x,\ s \le l$. Такі її властивості дають змогу застосувати для обґрунтування методу двобічних наближень теорію нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [3].

Але ж до рівняння $-u'' - \kappa^2 u = g(x,u)$ цей підхід не може бути застосо-

ваний, оскільки функція Гріна першої крайової задачі для оператора Гельмгольця $-u'' - \kappa^2 u$ має вигляд

$$G(x,s) = \frac{1}{\kappa \sin l\kappa} \begin{cases} \sin \kappa x \sin \kappa (l-s), & 0 \le x \le s, \\ \sin \kappa s \sin \kappa (l-x), & s \le x \le l, \end{cases}$$

і, по-перше, існує лише, якщо $l\kappa \ne \pi k$, $k \in \mathbb{N}$, а, по-друге, не завжди є невід'ємною у квадраті $0 \le x, s \le l$. Запишемо рівняння $-u'' - \kappa^2 u = g(x,u)$ у вигляді $-u'' = \kappa^2 u + g(x,u)$. Тоді відповідна крайова задача буде еквівалентною інтегральному рівнянню:

$$u(x) = \int_0^l G(x,s)[\kappa^2 u(s) + g(s,u(s))]ds, \tag{7}$$

де $G(x,s) = \frac{1}{l} \begin{cases} x(l-s), & 0 \le x \le s, \\ s(l-x), & s \le x \le l, \end{cases}$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-u''$.

Рівняння (7) розглядатимемо як операторне рівняння $u = T(u)$ у просторі $C[0, l]$, напівупорядкованому конусом K_+. Якщо функція $g(x,u)$ дозволяє діагональне подання $g(x,u) = \hat{g}(x,u,u)$, де функція $\hat{g}(x,v,w)$ зростає за v і спадає за w, то оператор T, який визначається правою частиною рівняння (7) буде гетеротонним. Тоді за умови існування для нього сильно інваріантного конусного відрізка $< v_0, w_0 >$ можна сформувати ітераційний процес:

$$v^{(k)}(x) = \int_0^l G(x,s)[\kappa^2 v^{(k-1)}(s) + \hat{g}(s, v^{(k-1)}(s), w^{(k-1)}(s))]ds, \; k = 1, 2, ...,$$

$$w^{(k)}(x) = \int_0^l G(x,s)[\kappa^2 w^{(k-1)}(s) + \hat{g}(s, w^{(k-1)}(s), v^{(k-1)}(s))]ds, \; k = 1, 2, ...,$$

$$v^{(0)}(x) = v_0(x), \; w^{(0)}(x) = w_0(x),$$

який на разі збіжності приводить до двобічної послідовності наближень до точного розв'язку $u^*(x)$ крайової задачі.

Список використаних джерел:

1. Pao, C.V. (1992). *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. Plenum Press.

2. Сидоров, М.В. (2019). Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, 1 (48), 57–66.

3. Опойцев, В. И., & Хуродзе, Т. А. (1984). *Нелинейные операторы в пространствах с конусом*. Изд-во Тбилис. ун-та.