УДК 519.7

РАЗРАБОТКА ТЕОРИИ СТРУКТУРНОЙ МЕТРИЗАЦИИ КОНЕЧНОМЕРНОГО АРИФМЕТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

М. Ф. Бондаренко[1], С. Ю. Шабанов-Кушнаренко[2], Ю. П. Шабанов-Кушнаренко[3]

[1, 2, 3]ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

В статье сформулирована и решена задача о компараторной идентификации метрики пространства выходных сигналов линейного конечномерного объекта. Установлены необходимые и достаточные экспериментально проверяемые условия, при которых возможна компараторная идентификация этой метрики. Показано практическое значение этой задачи для математического описания технических и природных объектов.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, ЦВЕТОВОЕ ЗРЕНИЕ, ГОМЕОМОРФИЗМ, МЕТРИКА

Введение

Настоящая статья является продолжением работ [1, 2]. В [1] проанализировано применение теории компараторной идентификации к цветовому зрению человека и социально-экономическому поведению людей. В [2] предложена модель компараторной идентификации, позволяющая идентифицировать линейные объекты. В данной статье обоснованы необходимые и достаточные экспериментально проверяемые условия, при которых возможна компараторная идентификация пространства выходных сигналов линейного конечномерного объекта. Разработан практический способ построения этой метрики.

1. Введение метризующего предиката

Пусть N и N' – n-мерные арифметические пространства, связанные гомеоморфизмом $\varphi: N \to N'$, который взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает пространство N на пространство N'. Точка $x' \in N'$ называется образом точки $x \in N$, если $x' = \varphi(x)$, а пространство N' – образом пространства N. Пусть, кроме того, $\rho(x', y')$ – евклидово расстояние между точками x', y' пространства N', определяемое равенством:

$$\rho(x', y') = \sqrt{(\xi'_1 - \eta'_1)^2 + (\xi'_2 - \eta'_2)^2 + ... + (\xi'_n - \eta'_n)^2}, \quad (1)$$

где $\xi'_1, \xi'_2, ..., \xi'_n$ и $\eta'_1, \eta'_2, ..., \eta'_n$ – координаты точек x', y' в пространстве N'. Рассмотрим предикат Φ на N^4, определяемый выражением:

$$\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2) = D(\rho(\varphi(x_1), \varphi(y_1)), \rho(\varphi(x_2), \varphi(y_2))). \quad (2)$$

Здесь символ D обозначает предикат равенства, заданный на декартовом квадрате вещественной полуоси $[0, \infty)$, рассматриваемой как множество всех расстояний между точками пространства N'. Предикат вида (1) устанавливает, равны или нет расстояния между образами точек x_1, y_1 и x_2, y_2. Будем говорить, что предикат Φ метризует пространство N'.

Проинтерпретируем сказанное на примере задачи о введении поля зрения человека, о которой говорилось в [2]. Выделим в физическом пространстве перед испытуемым какую-нибудь плоскость, перпендикулярную зрительной оси того глаза испытуемого, поле зрения которого исследуется, и проведем на ней через точку фиксации горизонтальную и вертикальную прямые, приняв их за координатные оси двумерного пространства N. Такая плоскость называется кампиметрической [3]. На кампиметрической плоскости исследователь произвольно выбирает две пары точек x_1, y_1 и x_2, y_2 (для этой цели следует брать точечные источники света в темноте) и предлагает испытуемому определить, одинаковы или нет расстояния $\rho(x_1, y_1)$ и $\rho(x_2, y_2)$ между субъективными образами $x'_1 = \varphi(x_1)$, $y'_1 = \varphi(y_1)$, $x'_2 = \varphi(x_2)$, $y'_2 = \varphi(y_2)$ точек x_1, y_1 и x_2, y_2. Символом φ обозначено преобразование кампиметрической плоскости N в ее субъективный образ N' (называемый полем зрения глаза), осуществляемое зрительной системой человека. Если предъявить точки при наличии освещения, то испытуемый невольно будет оценивать расстояние между точками кампиметрической плоскости, а не между их субъективными образами.

Опыты показывают, что испытуемый способен решать предложенную задачу при предъявлении ему любых точек x_1, y_1 и x_2, y_2 кампиметрической плоскости с довольно высокой точностью. Это следует из того факта, что изменение расстояний между точками кампиметрической плоскости всего лишь на несколько процентов способно нарушить равенство расстояний между образами этих точек. Таким образом, в данном эксперименте испытуемый своим поведением реализует с весьма высокой точностью предикат Φ. Отображение φ не является тождественным, поэтому образы точек нельзя отождествлять с самими точками кампиметрической плоскости. Это доказывается тем, что образы точек x_1, y_1 и x_2, y_2, лежащих на кампиметрической плоскости и расположенных на равных расстояниях друг от друга, часто субъективно воспринимаются как неравноудаленные. Вместе с тем наблюда-

ются случаи, когда образы точек в поле зрения находятся друг от друга на равных расстояниях, а соответствующие им точки на кампиметрической плоскости лежат на разных расстояниях. Субъективные наблюдения испытуемого свидетельствуют также и о том, что непрерывному перемещению точки на кампиметрической плоскости соответствует непрерывное перемещение ее образа в поле зрения и что каждой точке кампиметрической плоскости соответствует свой образ – точка в поле зрения. Следовательно, судя по ощущениям испытуемого, отображение φ в данной интерпретации можно считать гомеоморфизмом.

Сделанные выводы хотелось бы освободить от элемента субъективизма и обосновать чисто физическими экспериментами, используя метод компараторной идентификации. Представляется, что для решения этой задачи достаточно располагать лишь предикатом Φ и его свойствами, не опираясь ни на какие данные субъективного характера. Основываясь на предикате Φ и его свойствах, требуется доказать, что поле зрения представляет собой двумерное арифметическое пространство N', получаемое деформацией φ (то есть взаимно однозначным и взаимно непрерывным преобразованием) кампиметрической плоскости N. Кроме того, требуется найти конкретный вид гомеоморфизма φ. Первая задача является задачей структурной метризации поля зрения, вторая – задачей параметрической метризации поля зрения.

В формальной постановке, независимой от какой бы то ни было интерпретации, задача структурной метризации пространства N' формулируется следующим образом. Дано n-мерное арифметическое пространство N с определенными на нем операциями сложения векторов и умножения вещественного числа на вектор. На N^4 определен предикат $\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2)$. Требуется сформулировать такую систему A свойств предиката Φ, при выполнении которой предикат Φ можно было бы представить в виде (2). Вместе с тем, если хотя бы одно из свойств системы A для предиката Φ не выполняется, то его нельзя будет представить в виде (2). Задача параметрической метризации пространства N' сводится к отысканию конкретного вида функции φ, извлекаемого из значений предиката Φ, получаемых в опытах на испытуемом. Если бы задачу удалось решить, тогда можно было бы математически описать механизм формирования поля зрения человека. Имея такое описание, можно было бы применить его для целей совершенствования «зрения» роботов, узнающих автоматов и других технических систем.

Задачей идентификации поля зрения человека далеко не исчерпывается область возможного применения теории метризации конечномерного арифметического пространства. Другой важной содержательной интерпретацией этой теории является проблема введения естественной метрики в пространстве цветов. Назовем ее цветовой интерпретацией задачи метризации. Содержательную интерпретацию задачи метризации, рассмотренную первой, назовем пространственной. В случае цветовой интерпретации множество n понимается как объективное цветовое пространство, в котором каждый цвет представлен набором колориметричекских координат. Сумма цветов в цветовом пространстве N определяется суммой световых излучений, породивших данные цвета. Произведение числа на цвет в пространстве N определяется произведением этого числа на световое излучение, соответствующее данному цвету. Гомеоморфизм φ понимается как такое искривление цветового пространства N, в результате которого получается субъективное цветовое пространство N', называемое еще иначе равноконтрастным цветовым пространством [4]. Равноконтрастность цветового пространства означает, что любые пары цветов, находящиеся в пространстве N' на одном и том же расстоянии друг от друга, выглядят равноудаленными также и в психофизическом смысле. Если б удалось построить равноконтрастное цветовое пространство, то это было бы равносильно отысканию наиболее экономного способа кодирования информации о цвете воспринимаемых объектов, что дало бы существенную экономию объема машинной памяти, требуемой для запоминания цветных изображений.

Еще одна интерпретация задачи метризации пространства естественно возникает при автоматическом управлении объектами. Назовем ее технической. Пусть некоторый объект преобразует входные сигналы из m-мерного векторного пространства M в выходные сигналы арифметического пространства N меньшей или той же размерности n. Выходной сигнал представлен набором числовых параметров, по которым осуществляется управление объектом. Управление ведется по расстоянию ρ между текущим выходным сигналом и некоторым эталонным набором чисел, которые могут меняться во времени. Цель управления объектом состоит в том, чтобы, меняя его параметры, постоянно держать выходной сигнал объекта достаточно близким к эталонному. При этом важно, чтобы фактическая точность такого приближения находилась в заранее заданных пределах. Как показывает практика управления объектами, заданная точность сравнения текущего сигнала с эталонным обычно не остается постоянной и меняется вместе с изменением эталонного сигнала. Например, текущий сигнал требуется сравнивать с малым эталонным сигналом обычно с меньшей ошибкой, чем при высоком уровне эталонного сигнала.

Трудно рассчитывать на то, чтобы естественным образом формируемое объектом управления пространство выходных сигналов всегда само собой удовлетворяло указанному выше требованию. Поэтому пространство выходных сигналов обычно нуждается в некотором «исправлении». Стандартный прием такого ис-

правления состоит в том, что пространство выходных сигналов деформируют, причем с таким расчетом, чтобы равным геометрическим расстояниям между точками пространства после его деформации всегда соответствовала одинаковая их удаленность друг от друга в некотором содержательном смысле, диктуемом соображениями, направленными на достижение максимальной эффективности процесса управления объектом. Для этого придется растянуть те области пространства, внутри которых точность сравнения фактического выходного сигнала объекта с эталонным недостаточна, и сжать те области, где эта точность избыточна.

2. Формулировка и обоснование свойств метризующего предиката

Ниже формулируются некоторые свойства метризующего предиката Φ, которые в дальнейшем будут использованы при построении аксиоматической теории компараторной идентификации метризующего отображения. Очевидно, что любой предикат Φ вида (2) рефлексивен, симметричен и транзитивен относительно пар точек, для которых определяется расстояние ρ между их образами по формуле (1). Таким образом, приходим к следующим трем свойствам, которым подчиняется предикат Φ:

– закону парной рефлексивности

$$\forall x,y \in N \;\; \Phi(x,y,x,y); \tag{3}$$

– закону парной симметричности

$$\forall x_1,y_1,x_2,y_2 \in N \quad \Phi(x_1,y_1,x_2,y_2) \supset \Phi(x_2,y_2,x_1,y_1); \tag{4}$$

– закону парной транзитивности

$$\forall x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3 \in N \;\; \Phi(x_1,y_1,x_2,y_2) \wedge \wedge \Phi(x_2,y_2,x_3,y_3) \supset \Phi(x_1,y_1,x_3,y_3). \tag{5}$$

Евклидово расстояние ρ обладает симметрией [5], это означает, что $\rho(x',y') = \rho(y',x')$ для любых $x',y' \in N'$. Поэтому для метризующего предиката справедлив закон одиночной симметричности

$$\forall x_1,y_1,x_2,y_2 \in N \quad \Phi(x_1,y_1,x_2,y_2) \supset \Phi(y_2,x_2,x_1,y_1); \tag{4}$$

Евклидово расстояние ρ удовлетворяет также аксиоме тождества [6]. Это означает, что расстояние $\rho(x',y')$ между любыми совпадающими точками $x' = y'$ пространства N' должно равняться нулю. Кроме того, если x' и y' таковы, что $\rho(x',y') = 0$, то всегда $x' = y'$. Отсюда непосредственно вытекают следующие свойства метризующего предиката: первый закон тождества

$$\forall x,y \in N \;\; \Phi(x,x,y,y) \tag{7}$$

и второй закон тождества

$$\forall x,x_1,y_1 \in N \;\; (\Phi(x,y,x_1,y_1) \supset x_1 = y_1). \tag{8}$$

Рассмотрим предикат R на N^3, значения которого определяются через значения предиката Φ при любых $x,y,z \in N$ следующим образом:

$$R(x,y,z) = \Phi(x,z,z,y) \wedge \wedge \forall t \in N(\Phi(x,t,t,y) \wedge \Phi(z,x,x,t) \supset z = t). \tag{9}$$

Равенство $R(x,y,z) = 1$ означает, что точка $\varphi(z)$ лежит посередине отрезка прямой, соединяющего точки $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ в пространстве N'. В самом деле, из условия $R(x, y, z) = 1$ согласно (8) следует, что:

а) $\Phi(x, z, z, y) = 1$,

б) $\forall t \in N(\Phi(x,t,t,y) \wedge \Phi(z,x,x,t) \supset z = t) = 1$.

Утверждение а) означает, что точка $\varphi(z)$ равноудалена от точек $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. Утверждение б), взятое вместе с утверждением а), означает, что если какая-то точка $\varphi(t)$ равноудалена от точек $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ на такое расстояние, что и точка $\varphi(z)$ от точек $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$, то точка $\varphi(t)$ всегда совпадает с точкой $\varphi(z)$. Таким образом, точка $\varphi(z)$ делит пополам отрезок прямой, соединяющий точки $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. Сказанное иллюстрируется для случая двумерного пространства диаграммой, изображенной на рис 1.

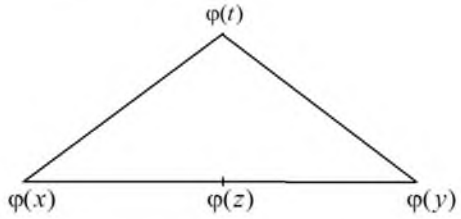

Рис. 1

Пусть $\varphi(t)$ – точка, лежащая на расстоянии φ от точек $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. Такая точка единственна, если она лежит на середине отрезка прямой, соединяющего точки $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. На диаграмме эта единственная точка обозначена символом z. Если же точка $\varphi(t)$ не совпадает с точкой $\varphi(z)$, то всегда найдется еще одна точка $\varphi(t_1) \neq \varphi(t)$, которая так же, как и точка $\varphi(t)$, лежит на расстоянии ρ от точек $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$.

Равенство же $R(x, y, z) = 0$ означает, что точка $\varphi(z)$ не лежит на середине отрезка прямой, соединяющего точки $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. В самом деле, если $R(x, y, z) = 0$, то условие а) или условие б) не выполняются. В первом случае точка $\varphi(z)$ не лежит посередине отрезка прямой, соединяющего точки $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$, во втором случае точка $\varphi(z)$ не лежит на этом отрезке. Таким образом, отношение, соответствующее предикату $R(x, y, z)$, задает операцию отыскания средней точки $\varphi(z)$ между точками $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ пространства N'. Эту операцию назовем внутренним равноделением точек x и y. Для нее, очевидно, выполняются свойства всюду определенности

$$\forall x,y \in N \;\; \exists z \in N \;\; R(x,y,z) \tag{10}$$

и однозначности

$$\forall x,y,z,z_1 \in N \;\; (R(x,y,z)R(x,y,z_1) \supset z = z_1). \tag{11}$$

Операцию внутреннего равноделения точек x и y, которая ставит им в соответствие точку z, обозначим

кружком: $z = x \circ y$. Она определена на N^2 со значениями в множестве N. Из определения предиката Φ с очевидностью следует, что в арифметическом пространстве N для любых двух точек x и y всегда найдется единственная точка z такая, что точка y будет результатом внутреннего равноделения интервала между точками x и z. Эту операцию назовем внешним равноделением точек x и y, обозначая ее звездочкой: $z = x^*y$. Последнее равенство равносильно равенству $x^*z = y$. Внешнее равноделение обладает свойством всюду определенности

$$\forall x, y \in N \ \ \exists z \in N \ \ R(x,z,y) \qquad (12)$$

и свойством однозначности

$$\forall x, y, z \in N \ \ (R(x,z,y) \wedge R(x,z_1,y) \supset z = z_1). \qquad (13)$$

Очевидно, что операция внутреннего равноделения обладает свойствами коммутативности

$$\forall x, y \in N \ \ (x \circ y = y \circ x) \qquad (14)$$

и идемпотентности

$$\forall x, y \in N \ \ (x \circ x = x). \qquad (15)$$

Заметим, что свойство (14) логически следует из свойств (3), (6) и (8). Действительно, согласно определению (9) предиката R имеем:

$$R(x,x,x) = \Phi(x,x,x,x) \wedge \forall t \in N$$
$$\Phi(x,t,t,x) \wedge \Phi(x,x,x,t) \supset x = t.$$

По закону парной рефлексивности (3) находим: $\Phi(x,x,x,x) = 1$. По законам парной симметричности (6) имеем: $\Phi(x,t,t,x) = 1$. По второму закону тождества (8) из $\Phi(x,x,x,t)$ следует $x = t$. Поэтому $R(x,x,x) = 1$ $\forall t \in N \ \ 1 \wedge \Phi(x,x,x,t) \supset x = t) = 1$, а значит, $x \circ x = x$.

Из зависимостей (1) и (2), определяющих метризующий предикат Φ, следует, что непрерывное изменение положения точек x и y в пространстве N влечет непрерывное изменение положение точек $x \circ y$ и $x * y$, являющихся результатом их внутреннего и внешнего равноделения. Соответственно этому имеет место свойство непрерывности операций $x \circ y$ и $x * y$:

Функции $x \circ y$ А и $x * y$ непрерывны по совокупности переменных x и y. (16)

Имеется в виду непрерывность, индуцируемая евклидовой метрикой в пространстве N.

В любом четырехугольнике n-мерного арифметического пространства N' отрезки прямых, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в точке 0, которая делит их пополам [7]. Это свойство иллюстрируется в двумерном случае диаграммой, изображенной на рис. 2. Его истинность вытекает из тождества

$$\frac{\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2} + \frac{\varphi(z)+\varphi(t)}{2}}{2} = \frac{\frac{\varphi(t)+\varphi(x)}{2} + \frac{\varphi(y)+\varphi(z)}{2}}{2}.$$

Отсюда следует свойство четырехугольника:

$$\forall x, y, z, t \in N \ \ ((x \circ y)(z \circ t) = (t \circ x)(y \circ z)). \qquad (17)$$

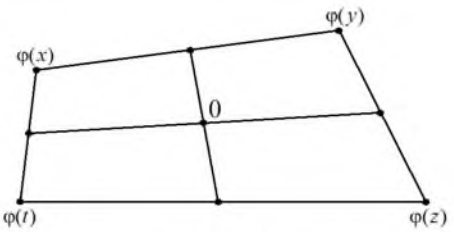

Рис. 2

Обратим внимание на то обстоятельство, что выражения (9)–(17) задают свойства предиката Φ, несмотря на то, что имя этого предиката в них не фигурирует. Это вытекает из того, что предикат R выражается зависимостью (1) через предикат Φ, а операция $\circ$ определяется предикатом R. Таким образом, выражения (9)–(17)представляют собой сокращенную запись свойств предиката Φ. Все эти выражения можно при желании записать в виде высказываний, зависящих только от предиката Φ, если заменить в них предикат R и операцию $\circ$ через предикат Φ.

3. Содержательные интерпретации свойств метризующего предиката

Продолжим изучение пространственной, цветовой и технической интерпретаций метризующего предиката. Важность рассмотрения пространственной интерпретации определяется, во-первых, тем, что она проще цветовой и технической и поэтому может служить как бы введением к описанию двух последних интерпретаций и, во-вторых, тем, что она сама по себе интересна как важная область практического применения разрабатываемых авторами методов компараторной идентификации объектов.

Когда мы говорим о пространственной интерпретации, то имеем в виду процесс зрительного восприятия испытуемым окружающего его трехмерного физического пространства. Глаз человека отображает трехмерное физическое пространство M на двумерное поле зрения N, причем только те точки исходного пространства, которые лежат на одном луче, исходящем из центра глаза, проектируются в одну и ту же точку поля зрения (рис. 3).

Процесс перехода от точки X трехмерного физического пространства, описываемой в координатной системе $\Xi_1\Xi_2\Xi_3$, к точке двумерного поля зрения x, описываемой в системе $\xi_1\xi_{21}$, может быть идентифицирован компараторным методом, который устанавливает факт совпадения или различия точек x и y поля зрения, являющихся образами $x = F(X)$, $y = F(Y)$ точек X и Y физического пространства.

Человек обладает способностью субъективно оценивать расстояние между точками поля зрения [8]. Если предъявить испытуемому две пары точек поля зрения (x_1, y_1) и (x_2, y_2), то он с достаточно высокой точностью сможет определить, равны расстояния меж-

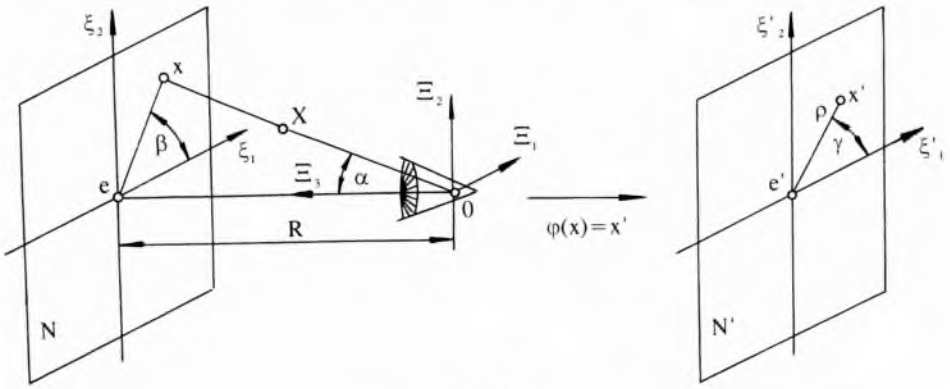

Рис. 3

ду точками этих пар или нет. Тем самым испытуемый фактически реализует метрический предикат $\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2)$, о котором шла речь в п. 6. Факты свидетельствуют, что далеко не всегда расстояния между точками поля зрения, равные в физическом смысле, будут равными также и в психофизическом смысле. Это означает, что исходное поле зрения (назовем его объективным) в процессе восприятия искривляется, следовательно, может быть поставлен вопрос о субъективном поле зрения N' и о существовании гомеоморфизма $\varphi(x) = x'$, отображающего объективное поле зрения в субъективное.

Следующий опыт доказывает наличие искривления поля зрения. В ясную ночь выберем для наблюдения на небе какие-нибудь далеко отстоящие друг от друга три яркие звезды, лежащие на дуге окружности с центром в точке наблюдения так, чтобы средняя звезда делила пополам интервал между крайними (в определенные моменты времени в таком положении оказываются, например, планеты Венера, Марс и Юпитер). Если зафиксировать взгляд на средней звезде y, то остальные две звезды x и z будут восприниматься как равноудаленные от средней звезды и лежащие на одной прямой с ней (рис. 4а). Но если точку фиксации e сместить куда-нибудь в сторону (например, вправо и вниз), то крайние звезды теперь будут видеться на разном удалении от средней, а прямая линия превратится в ломаную, два отрезка которой образуют тупой угол (рис. 4б).

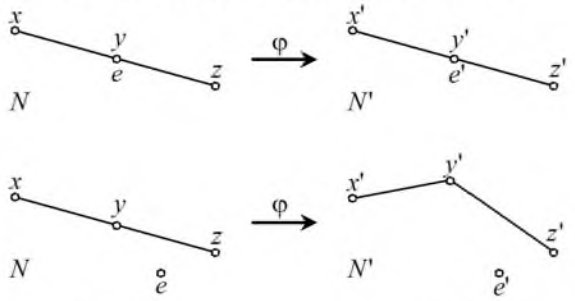

Рис. 4а

Рис. 4 б

Специально проведенные нами опыты по сравнению расстояний между точками, зрительно воспринимаемыми испытуемым, свидетельствуют о том, что все перечисленные в предыдущем параграфе свойства метризующего предиката в случае его пространственной интерпретации выполняются с той точностью, которую обеспечивает точность ответа испытуемого. Отклонение оси симметрии пороговой кривой при проверке, например, свойства парной рефлексивности не превышает $\pm 0{,}5\%$ [9]. Свойство парной рефлексивности в пространственной интерпретации означает, что при двухкратном предъявлении одной и той же пары точек испытуемый будет устанавливать равенство расстояний. Свойство парной симметричности означает, что при перемене порядка предъявления пар точек испытуемому его реакция не изменится. Свойство парной транзитивности означает, что если при сравнении субъективных расстояний между точками первой и второй пары, а также второй и третьей пары испытуемый устанавливает их равенство, то он установит равенство также и при сравнении субъективных расстояний между точками первой и третьей пар.

Свойство одиночной симметричности означает, что после перестановки точек внутри отдельной пары результат сравнения расстояний не меняется. Первое свойство тождества означает, что при совпадении точек в обеих парах субъективные расстояния всегда будут одинаковыми. Второе свойство тождества означает, что если в одной паре точки совпадают, то при равенстве расстояний они будут совпадать и во второй паре. Существо операции внутреннего равноделения состоит в том, что к двум заданным точкам подыскивается такая третья, чтобы, во-первых, расстояния между первой и третьей, а также третьей и второй точками совпали, и, во-вторых, точка, удовлетворяющая первому условию при таком расстоянии, оказалась единственной. Третья точка субъективно воспринимается испытуемым как лежащая посередине отрезка прямой, соединяющего первую и вторую точки. Существо операции внешнего равноделения состоит в

том, что к первой и второй точкам подыскивается такая третья, чтобы отрезок прямой, соединяющий первую и третью точки, делился второй точкой пополам.

Закон внутреннего равноделения означает, что для любых двух точек поля зрения субъективно средняя точка между ними всегда существует и единственна. Исключением является случай, когда средняя точка попадает в зону слепого пятна [10], тогда она не существует. Закон внешнего равноделения означает, что для любых двух точек результат внешнего равноделения всегда существует и единственен. Этот закон также выполняется, но с одной оговоркой: так как поле зрения человека ограничено [11], то точка внешнего равноделения выходит за пределы поля зрения при некоторых исходных данных и поэтому не существует. Также остается в силе и замечание относительно зоны слепого пятна. Вследствие этого теорию компараторной идентификации метризующего отображения приходится применять в случае ее пространственной интерпретации на суженной основе со всеми вытекающими отсюда предосторожностями [9]. Закон непрерывности означает, что при непрерывном изменении положения исходных точек будет также непрерывно меняться положение третьей точки, получающейся в результате выполнения операции внутреннего или внешнего равноделения. Смысл закона четырехугольника ясен из рассмотрения рис. 2. Этот закон применим во всех случаях, когда предъявляемые и получаемые в результате выполнения операций точки (всего 9 точек) лежат в пределах поля зрения испытуемого. В противном случае закон четырехугольника утрачивает смысл.

Перейдем теперь к рассмотрению цветовой интерпретации. По сравнению с пространственной цветовая интерпретация имееет некоторые особенности. В то время, как расстояния между далекими и близкими точками в поле зрения определяются испытуемым с достаточно высокой и примерно одинаковой относительной точностью, с цветами дело обстоит иначе. Расстояния между близкими цветами сравниваются испытуемым на тождество и различие довольно точно. Когда же испытуемый устанавливает совпадение или различие расстояний между далекими цветами, то относительная точность сравнения резко падает, и он испытывает большую неуверенность в своих ответах. Поэтому в случае цветовой интерпретации можно говорить о достаточно точной экспериментальной проверке аксиом теории компараторной идентификации метризующего отображения лишь в локальном смысле. В связи с этим в теории цветового зрения практикуется измерять расстояние числом пороговых значений (или кратной ему величиной), разделяющих данные цвета [12]. Следует обратить внимание на некоторую спорность такого измерения, поскольку понятия порога и расстояния теоретически между собой никак не связаны, их природа совершенно различна. Поэтому они не обязаны строго соответствовать друг другу.

Сказанное подтверждается исследованиями, выполненными для точек поля зрения человека. Пространственный порог различения, определяющий остроту зрения и измеряемый в угловых минутах, для различных участков поля зрения достаточно хорошо изучен [13]. При движении от центра (точки фиксации) к краям поля зрения острота зрения очень быстро снижается. Субъективные расстояния также сокращаются, но не так быстро, поэтому точного соответствия между порогами и расстояниями для пространственной интерпретации нет, но и попытка мерять субъективные расстояния между точками поля зрения числом порогов, разделяющих их, терпит фиаско. Это, однако, не означает, что таким же будет положение и для цветовой интерпретации. Быть может, измерение цветовых расстояний числом порогов правомерно, но это надо доказать специальным экспериментальным исследованием, демонстрирующим наличие корреляции между цветовыми расстояниями и порогами. Судя по литературным источникам, вопрос о проведении таких исследований до сих пор не ставился.

Что же касается технической интерпретации метризующего предиката и его свойств, то здесь определяющим фактором является точность измерения сигналов пространства N. Именно она должна быть выравнена во всех областях пространства N' после перехода к нему с помощью гомеоморфизма φ от пространства N. Поэтому при экспериментальной проверке свойств метризующего предиката в случае его технической интерпретации следует измерять расстояние между точками пространства N' не иначе, как числом порогов различения.

Возвращаясь от технической интерпретации метризующего предиката к его цветовой и пространственной интерпретациям, можно прийти к выводу, что и там изучение порогового варианта метрики представляет определенный интерес. Дело в том, что реализуя модель цветового зрения или модель пространственного видения предметов человеком в виде технических устройств, последние можно будет использовать в системах автоматического управления (например, в системах слежения за движущимися объектами). В этом случае придется решать проблему выравнивания пространства выходных сигналов управляемого объекта с целью достижения рациональной точности их измерения [14–16], и будет небезынтересно узнать, как этот же вопрос решен в зрительной системе человека, чтобы дать возможность инженеру воспользоваться подсказкой природы.

При этом важно иметь в виду, что метрики одного и того же пространства выходных сигналов объекта, получаемые на базе изучения порогов и на базе изучения расстояний, вообще говоря, различны. Изучение этих метрик представляет собой две независимые друг от друга задачи. Сравнивая результаты раздельного

решения этих задач, можно будет узнать, насколько близки друг к другу получаемые гомеоморфизмы. В частном случае эти гомеоморфизмы могут даже совпадать, однако ожидать такого совпадения во всех случаях нет никаких оснований.

4. Введение структуры линейного пространства, согласованной с операциями внутреннего и внешнего равноделения точек

Выше было введено понятие метризующего предиката и сформулированы некоторые из его характеристических свойств. Используя эти и некоторые другие свойства как исходные положения, поставим теперь задачу получить аксиоматическое, то есть абстрактное определение метризующего предиката. Для решения этой задачи сначала введем на множестве N с помощью операций внутреннего и внешнего равноделения точек структуру n-мерного векторного пространства. Она может не совпадать с исходной структурой n-мерного арифметического пространства N. Множество N с введенной на нем новой структурой векторного пространства будем обозначать символом N^*.

Выберем в качестве нулевого вектора пространства N^* какой-нибудь элемент множества N. Обозначим его символом 0. Операцию сложения векторов x, y пространства N^* определяем следующим образом:

$$x+y=0*(x\circ y). \tag{18}$$

С содержательной точки зрения (то есть исходя из первоначального конкретного определения метризующего предиката) вектор $\varphi(x+y)$ в пространстве N' образуется из векторов $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ по правилу параллелограмма (рис. 5), в котором, как известно, диагонали делятся пополам точкой их пересечения.

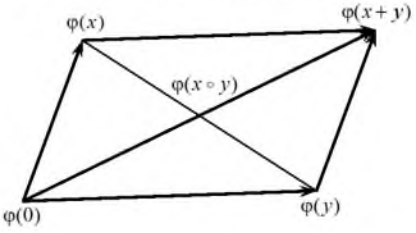

Рис. 5

Точка $\varphi(0)$ играет в пространстве N' роль нулевого вектора. Вектор $\varphi(x+y)$ представляет собой сумму векторов $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ пространства N'.

Множество N вместе с заданной на нем операцией сложения (18) образует абелеву группу [17]. Действительно, коммутативность сложения

$$x+y=y+x \tag{19}$$

вытекает из определения (18) и коммутативности операции внутреннего равноделения $\circ$. Проверяем свойство нуля

$$0+x=x. \tag{20}$$

Операция $*$ является обратной по отношению к операции $\circ$, поэтому $0+x=0*(0\circ x)=x$.

Доказываем единственность нуля. Предположим, что существуют два нулевых вектора 0' и 0", так что для любого $x\in N$ имеем $0'+x=x$ и $0''+x=x$. В частности, 0'+0"=0" и 0'+0"=0'. В силу коммутативности сложения получаем 0'=0", что и требовалось доказать. Однозначность решения уравнения $x+y=0$ при любом $x\in N$ относительно y выводится следующим образом: из равенства $x+y=0$ и (18) следует $0*(x\circ y)=0$, откуда с учетом свойства $x\circ x=x$ получаем $x\circ y=0\circ 0=0$, $y=x*0$. Таким образом,

$$-x=x*0. \tag{21}$$

Доказываем ассоциативность сложения

$$(x+y)+z=x+(y+z). \tag{22}$$

Полагая в законе четырехугольника $t=z$, имеем $(x\circ y)\circ(z\circ z)=(z\circ x)\circ(y\circ z)$. Пользуясь коммутативностью операции внутреннего равноделения и свойством $x\circ x=x$, приходим к закону дистрибутивности для операции $\circ$: при любых $x,y,z\in N$

$$(x\circ y)\circ z=(x\circ z)\circ(y\circ z). \tag{23}$$

В равенстве (23) заменяем x на $z*x$, y на $z*y$. Тогда:

$$((z*x)\circ(z*y))\circ z=((z*x)\circ z)\circ((z*y)\circ z),$$

$$((z*x)\circ(z*y))\circ z=x\circ y,$$

$$(z*x)\circ(z*y)=z*(x\circ y).$$

После замены x на y, y на z и z на x приходим еще к одному закону дистрибутивности: при любых $x,y,z\in N$

$$(x*y)\circ z=(x*z)\circ(x*z). \tag{24}$$

Полагая в аксиоме четырехугольника $t=0$, имеем: $(x\circ y)\circ(0\circ z)=(0\circ x)\circ(y\circ z)$. Из последнего равенства с помощью (24) выводим:

$$0*((x\circ y)\circ(0\circ z))=0*((0\circ x)\circ(y\circ z)),$$

$$(0*(x\circ y))\circ(0*(0\circ z))=(0*(0\circ x))\circ(0*(y\circ z)),$$

$$(x+y)\circ z=x\circ(y+z).$$

Наконец, приходим к закону ассоциативности:

$$0*((x+y)\circ z)=0*(x\circ(y+z)),$$

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

Итак, множество N вместе с заданной на нем операцией сложения (18) образует абелеву группу.

Приступаем к введению операции умножения вещественного числа на вектор x пространства N^*. Полагаем по определению операции умножения

$$0x=0, \tag{25}$$

$$1x=x, \tag{26}$$

$$(-1)x=-x. \tag{27}$$

Определяем операцию удвоения $2x$ и операцию деления пополам $\frac{1}{2}x$ вектора x. Полагаем $2x=x+x$. Это означает, что

$$2x=0x. \tag{28}$$

Принимаем, что $y=\frac{1}{2}x$ тогда и только тогда, когда $2y=x$. Отсюда выводим

$$\frac{1}{2}x=0\circ x. \tag{29}$$

Определяем умножение числа 2^k на вектор x k-кратным применением операции удвоения к вектору x:

$$2^k\ x=2(2...(2x)...). \tag{30}$$

Умножение числа 2^{-k} на вектор x определяем k-кратным применением операции деления пополам к вектору x:

$$2^{-k}x=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}...(\frac{1}{2}x)...). \tag{31}$$

Здесь k – произвольное натуральное число.

Далее определяем операцию умножения суммы и произведения чисел 2^k и 2^l на вектор x:

$$(2^k+2^l)x=2^kx+2^lx, \tag{32}$$

$$(2^k2^l)x=2^k(2^lx). \tag{33}$$

Здесь k, l – целые числа. Для любого целого k по определению полагаем:

$$(-2^k)x=2^k(-x). \tag{34}$$

Докажем, что

$$-2x=2(-x). \tag{35}$$

Для этого вводим векторы $u=0*x$ и $v=u*0$. Согласно тождеству $x\circ x=x$ имеем $(u\circ v)\circ(u\circ v)=(u\circ v)$. Применяя к полученному равенству свойство коммутативности операции $\circ$ и ее свойство дистрибутивности (23), получаем $((u\circ v)\circ u)\circ((u\circ v)\circ v)=u\circ v$. Из равенства $u*0=v$ выводим $u\circ v=0$, поэтому $(0\circ u)\circ(0\circ v)=0$. Из равенства $0*x=u$ выводим $0*u=x$, поэтому $x\circ(0\circ v)=0$. Отсюда $0\circ v=x*0$, $0*(x*0)=v=u*0=(0*x)*0$.

Итак, $(0*x)*0=0*(x*0)$. Используя (21) и (28), последнее равенство переписываем в виде $(2x)0=0*(-x)$, а затем в виде $-(2x)=2(-x)$. Тождество (35) доказано.

Докажем, что

$$-(\frac{1}{2}x)=\frac{1}{2}(-x). \tag{36}$$

Для этого водим вектор $y=x*0$. Согласно тождеству $x\circ x=x$ имеем: $(x\circ y)\circ(x\circ y)=(x\circ y)$. Применяя к полученному равенству свойство коммутативности операции $\circ$ и ее свойство дистрибутивности (23), получаем: $((x\circ y)\circ x)\circ((x\circ y)\circ y)=x\circ y$. Из равенства $y=x*0$ выводим $x\circ y=0$, поэтому $(0\circ x)\circ(0*y)=0$. Из последнего равенства выводим $(0\circ x)*0=0\circ y=0\circ(x*0)$. Итак, $(0\circ x)*0=0\circ(x*0)$. Используя (22) и (29), последнее равенство переписываем в виде: $(\frac{1}{2}x)*0=0\circ(-x)$. Тождество (36) доказано.

Из определений (30) и (31) и тождеств (35), (36) непосредственно вытекает тождество

$$-(2^kx)=2^k(-x), \tag{37}$$

справедливое при любом целом k. Из определений (30), (31) также следует тождество

$$2^k(2^lx)=2^{k+l}x, \tag{38}$$

справедливое при любых целых k и l.

Докажем, что при любом целом k имеет место тождество

$$2^kx+2^ky=2^k(x+y). \tag{39}$$

Действительно, при $k=0$ тождество (39) выполняется: $2^0x+2^0y=1x+1y=x+y=1(x+y)=2^0(x+y)$. Выполняется оно и при $k=1$:

$2^1x+2^1y=2x+2y=(x+x)+(y+y)=2(x+y)=2^1(x+y)$.

Предположим, что при некотором $k>0$ тождество (39) выполняется.

Тогда $2^{k+1}x+2^{k+1}y=2^k(2x)+2^k(2y)=2^k(2x+2y)=$ $=2^k(2(x+y))=2^{k+1}(x+y)$. Для случая $k<0$ свойство (39) доказывается аналогично.

Из (37) и (39) вытекает, что

$$2^kx-2^ky=2^k(x-y). \tag{40}$$

Назовем двоично-рациональным любое число вида

$$\lambda=\sum_{k=-m}^{n}a_k2^k, \tag{41}$$

где $a_k\in\{-1,0,1\}$, а m и n – некоторые натуральные числа. При любом двоично-рациональном λ определяем операцию λx равенством

$$\lambda x=\sum_{k=-m}^{n}a_k(2^kx). \tag{42}$$

Доказательство корректности этого определения, а также доказательство тождеств

$$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y, \tag{43}$$

$$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x, \tag{44}$$

$$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x \tag{45}$$

для любых двоично-рациональных чисел λ,μ достаточно громоздко и носит технический характер, поэтому здесь не приводится.

Чтобы перейти от двоично-рациональных чисел к вещественным, придется опереться на закон непрерывности и еще на одно дополнительное свойство метризующего предиката: закон сходимости – для любой сходящейся последовательности двоично-рациональных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}$ и произвольного $x\in N$ существует $\lim\lambda_nx$. Законы непрерывности и сходимости позволяют определить операцию умножения произвольного вещественного числа λ на любой элемент x множества N:

$$\lambda x=\lim\lambda_nx, \tag{46}$$

где $\{\lambda_n\}$ – последовательность двоично-рациональных чисел, для которой $\lim\lambda_nx=\lambda$.

Корректность определения (46) обосновывается тем, что любое вещественное число λ единственным способом представляется бесконечным двоичным кодом, а следовательно, предел последовательности (46) для числа λ может быть только один. Из определения (46) и перечисленных выше свойств метризующего предиката следует справедливость равенств (13)–(15) для любых вещественных чисел λ и μ. Итак, мы ввели на множестве N структуру линейного пространства над полем вещественных чисел, согласованную с операциями внутреннего и внешнего равноделения точек. Этим доказаны следующие утверждения:

Утверждение 1. Из законов парной рефлексивности, симметричности и транзитивности. одиночной симметричности, тождества, равноделения, непрерывности, четырехугольника и сходимости следует существование на области задания метризующего предиката структуры линейного пространства над полем вещественных чисел с операцией сложения векторов, определяемой равенством (17).

Кроме того, имеет место следующее очевидное

Утверждение 2. Любой метризующий предикат подчиняется закону сходимости.

С содержательной точки зрения закон сходимости означает следующее. Если задаться произвольным вещественным числом λ и попытаться экспериментально найти точку λx для произвольно выбранной точки x множества N, то это всегда удается сделать, причем при повторном выполнении процедуры отыскания точки λx придется выполнить ту же самую последовательность внутренних и внешних равноделений. Поскольку любая физическая система, являющаяся объектом идентификации, имеет конечную чувствительность, то процесс отыскания точки λx не будет длиться бесконечно долго, а закончится за конечное число шагов.

5. Установление условий существования метризующего предиката

В этом разделе формулируются два новых свойства метризующего предиката и доказывается, что они, вместе со свойствами, введенными ранее в этой главе, образуют полную систему условий, обеспечивающих существование метризующего предиката. В связи с недостатком места некоторые детали доказательства здесь опущены.

Сформулируем закон n-мерности – пространство N^*, введенное в предыдущем параграфе, n-мерно.

В развернутой форме закон n-мерности запишем в следующем виде: существуют векторы $e_1,e_2,...,e_n \in M^*$ такие, что равенство

$$\Phi(a,a,x,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)e_i^*)=1 \qquad (47)$$

выполняется для каждого $x \in N^*$ при единственном наборе коэффициентов $\alpha_1(x),\alpha_2(x),...,\alpha_n(x)$. Здесь a – какой-нибудь вектор из N^*; $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ – фиксированные функции, определенные на N^* со значениями в поле вещественных чисел.

Согласно второму закону тождества условие (47) равносильно равенству

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)e_i^*, \qquad (48)$$

которое означает, что любой вектор x выражается в виде линейной комбинации векторов $e_1^*,e_2^*,...,e_n^*$ при единственном наборе коэффициентов $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, а именно к этому сводится содержание закона n-мерности.

С содержательной точки зрения закон n-мерности означает следующее. Пусть в пространстве N^* произвольно выбрана точка x. Возьмем n фиксированных точек $e_1^*,e_2^*,...,e_n^* \in N^*$ и попытаемся из них и из нулевой точки пространства N^*, комбинируя их многократно и в различной последовательности с помощью операций внутреннего и внешнего равноделения, получить точку x. Закон n-мерности требует, чтобы существовала такая система точек $e_1^*,e_2^*,...,e_n^*$, при которой попытки такого рода всегда заканчиваются успешно. Он также требует, чтобы при использовании меньшего числа каких бы то ни было фиксированных точек не было возможности получить из них и из точки 0 точку x. В случае пространственной интерпретации закон n-мерности выполняется при $n = 2$, он означает, что поле зрения двумерно. В случае цветовой интерпретации закон n-мерности выполняется при $n = 3$, он означает, что пространство цветов трехмерно.

Возьмем в роли N' n-мерное арифметическое пространство R^n, а в роли φ' – функцию, отображающую пространство N^* на N' так, что вектору $x \in N^*$ с координатами $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ соответствует в N' точка $x'=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$. Предполагается, что базис в N^* зафиксирован. Очевидно, что φ' есть гомеоморфизм. В арифметическом пространстве любой размерности может быть введена евклидова метрика. Вместе с тем, все евклидовы пространства одинаковой размерности гомеоморфны [18]. Пространства φ и N' – арифметические и имеют одну и ту же размерность n, следовательно, существует гомеоморфизм φ, отображающий пространство N на пространство N'. Отсюда непосредственно следует существование гомеоморфизма $\varphi''=(\varphi')^{-1}\varphi$, отображающего пространство N на пространство N^*.

Для аксиоматического обоснования структуры метрического предиката Φ, задаваемой соотношениями (1) и (3), осталось доказать возможность введения такого базиса $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ в N, при котором метрика, индуцируемая предикатом Φ, оказалась бы согласованной с метрикой пространства N'. Сказанное означает, что расстояние $\rho(x',y')$ между точками x',y' пространства N', определяемое формулой (3), должно удовлетворить условию (1).

Сформулируем закон метричности – существует вектор $h \in N^*$ такой, что для любых $x, y \in N^*$ найдется единственное неотрицательное число $\alpha(x,y)$, для которого

$$\Phi(x,y,\alpha(x,y)h,0)=1. \quad (49)$$

Справедливы следующие утверждения:

Утверждение 3. Любой метризующий предикат подчиняется законам n-мерности и метричности.

Утверждение 4. Функция

$$\rho(x',y')=\alpha(\varphi^{-1}(x'),\varphi^{-1}(y')) \quad (50)$$

обладает всеми свойствами евклидова расстояния [19] и выражается в виде (3).

Утверждение 5. Если принять $e_1=\varphi^{-1}(1,0,0,...,0,0)$, $e_2=\varphi^{-1}(0,1,0,...,0,0)$, ..., $e_n=\varphi^{-1}(0,0,0,...,0,1)$, то при любых $x_1,x_2,y_1,y_2 \in N$ равенство $\rho(x_1,y_1)=\rho(x_2,y_2)$ будет равносильно равенству $\Phi(x_1,y_1,x_2,y_2)=1$.

Из утверждений 1–5 непосредственно следует теорема об условиях существования метризующего предиката:

Теорема. Для того, чтобы предикат $\Phi(x_1,y_1,x_2,y_2)$ был метризующим, необходимо и достаточно, чтобы он подчинялся законам парной рефлексивности, симметричности и транзитивности, одиночной симметричности, первому и второму законам тождества, законам внутренннего и внешнего равноделения, непрерывности, четырехугольника, сходимости, n-мерности и метричности.

С содержательной точки зрения закон метричности означает следующее. Пусть в пространстве N^* произвольно выбраны точки x, y и точка h, отличная от нулевой точки. Тогда можно будет найти, причем единственным образом, такую точку $t=\alpha(x,y)h$, лежащую на луче, исходящем из точки 0 и проходящем через точку h, которая находится на таком же расстоянии от точки 0, что и точки x, y друг от друга. Это означает, что расстоянию между любыми двумя точками пространства N^*N^*, индуцируемому предикатом Φ, можно поставить в соответствие числовую меру. Таким образом, можно говорить не только о равенстве или неравенстве расстояний между точками пространства N', но и о самом расстоянии, которое может быть измерено вещественным числом.

Смысл теоремы для цветовой интерпретации состоит в том, что существует субъективное цветовое пространство N', а также взаимно однозначная и взаимно непрерывная функция φ, отображающая объективное цветовое пространство N в субъективное, такие что геометрическое расстояние между точками x', y' пространства N' в точности соответствует психологическому расстоянию между цветами, представленными этими точками. В пространственной интерпретации теорема означает, что существует гомеоморфизм φ, преобразующий объективное поле зрения в субъективное, причем в последнем расстояние между точками измеряется посредством евклидовой метрики. В технической интерпретации теорема указывает полный набор свойств системы управления, при выполнении которых возможно задать такое искривление пространства выходных сигналов объекта, которое обеспечит равную точность представления этих сигналов.

Выводы

Сформулирована задача о компараторной идентификации метрики пространства выходных сигналов линейного конечномерного объекта и показано ее практическое значение для математического описания технических и природных объектов.

Установлены необходимые и достаточные экспериментально проверяемые условия, при которых возможна компараторная идентификация метрики пространства выходных сигналов линейного конечномерного объекта.

Даны цветовая, пространственная и техническая интерпретации задачи о компараторной идентификации метрики пространства выходных сигналов линейного конечномерного объекта, определяющие возможные области ее практического применения.

Сформулирована и доказана теорема об условиях существования метризующего предиката, решающая задачу структурной компараторной идентификации метрики пространства выходных сигналов линейного конечномерного объекта.

Список литературы: 1. *Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Компараторна ідентифікація кольорового зору людини // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал.–2008.–№ 0.–С. 000–000. **2.** *Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Идентификация объектов, описываемых векторами и линейными операциями над ними // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. –2009.–№0.–С. 000–000. **3.** *Гебер Р.* Курс физиологии человека. –М.-Л.: Биомедгиз, 1936. –678 с. **4.** *Матвеев А.Б.* Проблемы построения равноконтрастного простра-нства // Светотехника.–1964.–№ 12. –С. 1–6. **5.** *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. –М.: Наука, 1965. –520 с. **6.** *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. –М.: ИЛ, 1969. –1072 с. **7.** *Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю.* Об условиях существования линейного предиката. –Киев: Деп. в УкрНИИНТИ 11.05.88, №1130. –9 с. **8.** *Гельмгольц Г.* Новейшие успехи теории зрения. –Л.: Изд. «П.П. Сойкин», 1929. –47 с. **9.** *Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Об общей теории компараторной идентификации // Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал.–2008.–№2(69).–С. 13–22. **10.** *Артамонов И.Л.* Иллюзии зрения. –М.: Наука, 1964. –102 с. **11.** *Авербах М.И.* Офтальмологические очерки.–М.: Изд-во АН СССР, 1949. –788 с. **12.** *Майстровская Л.М.* Математические модели сенсорных систем и их технические приложения: дисс....канд. техн. наук.–Харьков, 1977. –145 с. **13.** *Румянцев М.В.* Видимость малых объектов // Проблемы физиологической оптики.–1949.–т. VII.–С. 163. **14.** *Подиновский В.В., Гаврилов В.М.* Оптимизация по последовательно применяемым критериям. –М.: Сов. радио, 1975. –192 с.

15. Теория выбора и принятия решений / *И.М. Макаров, Т.М. Виноградская, А.А. Рубчинский, В.Б. Соколов.* –М.: Наука, 1982.– 328 с. **16.** *Шавров А.В., Солдатов В.В.* Многокритериальное управление в условиях статистической неопределенности.– М.: Машиностроение, 1990. –159 с. **17.** *Шилов Г.Е.* Математический анализ (конечномерные линейные пространства).– М.: Наука, 1969. –432 с. **18.** *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. –М.-Л.: Гостехиздат, 1938. –136 с. **19.** *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. –М.: Мир, 1979. –581 с.

Поступила в редколлегию 26.01.2009.

УДК 519.7

Розробка теорії структурної метризації скінченномірного арифметичного простору / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал.– 2009.– №1(70).– С. 17–27.

У статті сформульовано й вирішено завдання про компараторну ідентифікацію метрики простору вихідних сигналів лінійного скінченномірного об'єкта. Установлені необхідні й достатні умови, що перевіряються експериментально, за яких можлива компараторна ідентифікація цієї метрики.

Іл.: 5. Бібліогр.: 19 найм.

UDC 519.7

Working out of the finite-dimensional arithmetic space structural metrization theory / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag.– 2009.– №1(70).– P. 17–27.

In article the problem about comparator identifications of the linear finite-dimensional object target signals space metrics is formulated and solved. Necessary and sufficient experimentally checked conditions at which comparator identification of this metrics is possible are established.

Fig.: 5. Ref.: 19 items.