МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ НЕСТАЦІОНАРНИХ В'ЯЗКИХ ТЕЧІЙ У ОБЛАСТЯХ З РУХОМОЮ МЕЖЕЮ

Полковниченко Є.Ю.
Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: eoxa77@gmail.com

The problem of the numerical analysis of the unsteady flow of a viscous incompressible fluid in a bounded area with a moving boundary is considered. For its numerical analysis it is proposed to use the principle of superposition, the R-functions method with approximation of the uncertain component using the nonlinear Galerkin method.

При аналізі реальних течій в науці і техніці часто виникає проблема математичного моделювання і чисельного аналізу течій в'язкої нестисливої рідини. При цьому звичайною є ситуація, коли з плином часу змінюються не тільки характеристики потоку, але і сама область, в якій розглядається течія.

Розглянемо плоску нестаціонарну течію в'язкої нестисливої рідини в області $\Omega(t)$, форма якої змінюється з плином часу t. Нехай область $\Omega(t)$ є двозв'язною і її межа $\partial\Omega(t)$ складається з зовнішнього контуру $\partial\Omega_0$, який вважатимемо незмінним в часі, і внутрішнього контуру $\partial\Omega_1(t)$, форма якого з плином часу може змінюватися (рис. 1). Вважатимемо, що межі області є непроникними твердими стінками, зовнішня межа нерухома, а течію викликано обертанням «пропелера» з постійною кутовою швидкістю w. Потрібно визначити поле швидкостей (v_x, v_y) течії в області $\Omega(t)$.

Для функції струму $\psi(x, y, t)$, яка вводиться співвідношеннями

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

можна поставити наступну початково-крайову задачу:

$$-\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} \quad \forall(x, y) \in \Omega(t),\ t > 0, \tag{1}$$

$$\psi\big|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi\big|_{\partial\Omega_1(t)} = c(t), \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1(t)} = g(t), \tag{4}$$

де $\mathbf{Re}$ – число Рейнольдса, $c(t)$ – деяка невідома функція від t, $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до межі області $\Omega(t)$, Δ^2 – бігармонічний оператор.

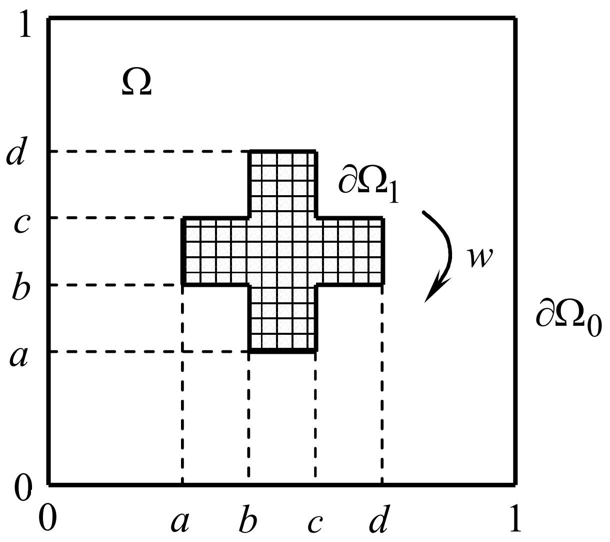

Рис. 1. Вигляд області $\Omega(t)\big|_{t=0}$

Функція $g(t)$ задається, виходячи із заданої на $\partial\Omega_1(t)$ швидкості рідини. Функцію $c(t)$ потрібно знайти з умови однозначності тиску в многозв'язній області, яке має вигляд

$$\oint\limits_{\partial\Omega_1(t)} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial \mathbf{n}} ds = 0,$$

де Δ – оператор Лапласа.

Позначимо $\partial\Omega(t) = \partial\Omega_0 \bigcup \partial\Omega_1(t)$. Для розв'язання задачі (1) – (4) скористаємося принципом суперпозиції і методом R-функцій. Структура розв'язку задачі (1) – (4) була побудована у вигляді

$$\psi(x,y,t) = -\frac{\omega \cdot g \cdot \omega_0}{\omega_0 + \omega_1} + \omega^2 \Phi_0 + c(t)\left[\frac{\omega_0}{\omega_0+\omega_1} - \omega D_1\left(\frac{\omega_0}{\omega_0+\omega_1}\right) + \omega^2 \Phi_1\right].$$

Тут Φ_0, Φ_1 – невизначені компоненти, $D_1 = \dfrac{\partial\omega}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial\omega}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial y}$, а функції $\omega = \omega(x,y,t)$, $\omega_0 = \omega_0(x,y)$, $\omega_1 = \omega_1(x,y,t)$ будуються за допомогою методу R-функцій і повинні відповідати умовам

$$\forall t \ge 0 \quad \omega = 0 \text{ на } \partial\Omega(t); \quad \omega > 0 \text{ у } \Omega(t); \quad \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1 \text{ на } \partial\Omega(t),$$

$$\omega_0 = 0 \text{ на } \partial\Omega_0; \quad \omega_0 > 0 \text{ у } \Omega(t) \bigcup \partial\Omega_1(t); \quad \frac{\partial\omega_0}{\partial\mathbf{n}} = -1 \text{ на } \partial\Omega_0,$$

$$\forall t \ge 0 \quad \omega_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega_1(t); \quad \omega_1 > 0 \text{ у } \Omega(t) \bigcup \partial\Omega_0; \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial\mathbf{n}} = -1 \text{ на } \partial\Omega_1(t).$$

Для апроксимації невизначених компонент в структурних формулах можна скористатися нелінійним методом Гальоркіна для нестаціонарних задач.