УДК 510.62

М. Ф. БОНДАРЕНКО, д-р техн. наук, *С. Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО*

О ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДИКАТАХ

Пусть задано какое-нибудь непустое множество M, элементы которого будем называть векторами и обозначать строчными латинскими буквами. Предположим, что на множестве $M \times M$ задана какая-нибудь операция $a+b$ со значениями в множестве M, удовлетворяющая для всех a, b, c законам коммутативности $a+b=b+a$ **(1)** и ассоциативности $(a+b)+c=a+(b+c)$ **(2)**.

Предположим также, что на множестве M задана какая-нибудь операция $-a$ со значениями в том же множестве, удовлетворяющая для всех a и b закону обращения $(a+(-a))+b=b$ **(3)**.

Любое множество называют абелевой группой, а равенства (1)—(3) — аксиомами абелевой группы. Операцию $a+b$ будем называть сложением векторов $a+b$, а операцию $-a$ — обращением вектора a. Вектор $a+b$ назовем суммой векторов a и b. Вектор $-a$ назовем противоположным вектору a. Условимся писать $a+(-b)=a-b$. Закон обращения представим в виде $(a-a)+b=b$. Можно доказать, что вектор $a-a$ не зависит от выбора a. Назовем его нулевым вектором и обозначим символом 0. Имеем $a-a=0$, $0+a=a$.

Пусть также задано какое-нибудь множество G, элементы которого назовем коэффициентами и обозначим строчными греческими буквами. Предположим, что на множестве $G \times G$ задана какая-нибудь операция $\alpha+\beta$ со значениями в множестве G, удовлетворяющая для всех α, β, γ законам коммутативности $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ **(4)** и ассоциативности $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+j)$ **(5)**.

Предположим, кроме того, что на множестве G задана какая-нибудь операция $-\alpha$ со значениями в том же множестве, удовлетворяющая для всех α и β закону *аддитивного обращения* $(\alpha+(-\alpha))+\beta=\beta$ **(6)**.

Операцию $\alpha+\beta$ будем называть *сложением коэффициентов* α и β, а операцию $-\alpha$ — *аддитивным обращением коэффициента* α. Коэффициент $\alpha+\beta$ назовем суммой α и β, коэффициент $-\alpha$ — *противоположным* коэффициенту α. Условимся писать $\alpha+(-\beta)=\alpha-\beta$. Закон аддитивного обращения запишется в виде $(\alpha-\alpha)+\beta=\beta$. Можно доказать, что коэффициент $\alpha-\alpha$ не зависит от выбора α. Назовем его *нулевым коэффициентом* и обозначим символом 0. Имеем $\alpha-\alpha=0$, $0+\alpha=\alpha$.

Пусть, кроме того, на множестве $G \times G$ задана какая-нибудь операция $\alpha\beta$ со значениями в множестве G, удовлетворяющая для всех α, β, γ законам коммутативности $\alpha\beta=\beta\alpha$ **(7)**, ассоциативности $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ (8) и дистрибутивности $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$ (9).

Полагаем также, что на множестве $G_0 = G \setminus 0$ задана какая-нибудь операция α^{-1} со значениями в том же множестве, удовлетворяющая для всех $\alpha \in G_0$ и $\beta \in G$ *закону мультипликативного* обращения $(\alpha\alpha^{-1})\beta = \beta$ **(10)**.

Операцию $\alpha\beta$ будем называть умножением коэффициентов α и β, а операцию α^{-1} — мультипликативным обращением коэффициента α. Коэффициент α^{-1} назовем обратным коэффициенту α. Условимся, что $\alpha\beta^{-1} = \alpha/\beta$. Закон мультипликативного обращения запишем в виде $\alpha/\alpha\beta = \beta$. Можно доказать, что коэффициент α/α не зависит от выбора α. Назовем его *единичным коэффициентом* и обозначим символом 1. Имеем $\alpha/\alpha = 1$, $1 \cdot \alpha = \alpha$. Любое множество G с описанными выше свойствами называют *полем*, а равенства (4)—(10) — *аксиомами поля.*

Пусть на множестве $G \times M$ задана какая-нибудь операция αa *умножения коэффициента* α на вектор a со значениями во множестве M, удовлетворяющая для всех a, b и α, β следующим законам: *ассоциативности* $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ **(11)**, *дистрибутивности для коэффициентов* $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$ **(12)**, *дистрибутивности для векторов* $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha\beta$ **(13)** *и закону элиминации единицы* $1 \cdot a = a$ **(14)**.

Можно доказать, что для любого a имеет место равенство $0 \cdot a = 0$. При выполнении всех перечисленных законов множество называют *векторным пространством над полем* G. Аксиомы абелевой группы, аксиомы поля и законы (11)—(14), вместе взятые, называют *аксиомами векторного пространства*. Докажем, что закон коммутативности (1) выводится из остальных аксиом, поэтому исключим его из числа аксиом векторного пространства. Векторное пространство называют *конечномерным,* если в нем существует конечное число n векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, через которые можно представить в виде $x \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ **(15)** любой вектор x, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — подходящие коэффициенты. Если имеет место равенство (15), то говорят, что вектор выражается через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Ввиду (15) каждому вектору можно поставить в соответствие единственный набор $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ коэффициентов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, называемых *координатами вектора* x в базисе $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Обратно, каждому набору коэффициентов $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ соответствует единственный вектор x. Если вектор x имеет координаты $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, а вектор y — координаты $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, то вектор $x+y$ имеет координаты $(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots, \xi_n+\eta_n)$. Таким образом, сложению векторов соответствует сложение координат исходных векторов. Вектор αx имеет координаты $(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_n)$. Итак, умножению коэффициента на вектор соответствует умножение того же коэффициента на координаты исходного вектора.

Векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называют *линейно независимыми,* если ни один из них не выражается через совокупность остальных. Говорят, что линейно независимые векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ являются базисными в векторном пространстве M и образуют в нем **базис** $e_1, e_2, \ldots, e_n$, если через них можно выразить любой вектор из M. В этом случае говорят, что векторное пространство M *n-мерно*. Число n базисных векторов называют *размерностью векторного пространства,* которая не зависит от выбора базиса; из условия $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n = 0$ вытекают равенства $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ в том и только том случае, если векторы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ линейно независимы; если $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — базис векторного пространства M, то каждый вектор x выражается через базисные векторы p_i по формуле

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i P_i \tag{16}$$

с помощью единственно возможного набора коэффициентов $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Пусть M — какое-нибудь m-мерное векторное пространство над каким-нибудь полем G. *Линейным функционалом* на M назовем любую функцию $F{:}M \to G$, удовлетворяющую при произвольных x, y и α *законам аддитивности* $F(x+y) = F(x) + F(y)$ **(17)** и *однородности* $F(\alpha x) = \alpha F(x)$ (18).

Выразим произвольно выбранный вектор x через базисные векторы $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $x = \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_n p_n$. Здесь $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — координаты вектора x в базисе $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Для любого x имеем $F(x) = \xi_1 F(p_1) + \xi_2 F(p_2) + \ldots + \xi_n F(p_n)$, где F — произвольно выбранный линейный функционал на M. Обозначая $F(p_1) = \varkappa_1$, $F(p_2) = \varkappa_2, \ldots, F(p_n) = \varkappa_n$, последнее равенство запишем в виде $F(x) = \xi_1 \varkappa_1 + \xi_2 \varkappa_2 + \ldots + \xi_n \varkappa_n$ **(19)**.

Коэффициенты $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ определяются исключительно видом линейного функционала F, они не зависят от выбора вектора x. Любой линейный функционал F может быть представлен в форме (19) при подходящем выборе коэффициентов $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$. Любая функция $F{:}M \to G$, которую можно представить в форме (19) при произвольном выборе коэффициентов $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, есть линейный функционал. Линейный функционал F полностью определяется набором коэффициентов $(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n)$. Таким образом, выражение (19) представляет собой общий вид линейного функционала F в базисе $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Выражение (19) задает множество всех решений относительно переменной F системы логических уравнений:

$$\forall x \vee y (F(x+y) = F(x) + F(y)) = 1;$$

$$\forall x \vee a (F(\alpha x) = \alpha F(x)) = 1.$$

В результате сложения любых линейных функционалов одного и того же аргумента и умножения произвольного коэффициента на любой линейный функционал снова получаем линейный функционал того же аргумента.

Коэффициенты $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, фигурирующие в выражении (19), можно рассматривать в качестве координат некоторого вектора k

в базисе $(p_1, p_2, ..., p_n)$. Для выражения, стоящего в правой части равенства (19), введем кратное обозначение xk, называя это выражение *произведением векторов* x и k в базисе $(p_1, p_2, ..., p_n)$. Имеем $xk = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + ... + \xi_n x_n$ **(20)**.

Два набора векторов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $(b_1, b_2, ..., b_n)$ назовем взаимными в базисе $(p_1, p_2, ..., p_n)$, если

$$a_i b_i = \begin{cases} 0, \text{ если } i = j \\ 1, \text{ если } i \neq j, \end{cases}$$

где $i, j, \in \{1, 2, ..., n\}$. При любом базисе $(p_1, p_2, ..., p_n)$ для каждого набора линейно независимых векторов существует взаимный набор векторов. Линейные функционалы $F_1(x) = xk_1$, $F_2(x) = xk_2, ..., F_n(x) = xk_n$ называют *линейно независимыми*, если линейно независимы векторы $k_1, k_2, ..., k_n$. Линейная независимость линейных функционалов $F_1, F_2, ..., F_n$ равносильна следующему утверждению равенств: $\alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + ... + \alpha_n F_n(x) = 0$ и выполняется для всех в том и только том случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$.

Произведение векторов в произвольном фиксированном базисе при любых x, y, z и α удовлетворяет законам коммутативности $xy = yx$ **(21)**, ассоциативности $(\alpha x)y = \alpha(xy)$ **(22)** и дистрибутивности $(x+y)z = xz + yz$ **(23)**.

Введенное здесь произведение векторов не следует отождествлять со скалярным произведением векторов. Это — разные понятия. Произведение векторов беднее свойствами, чем скалярное произведение векторов. Оно обладает не всеми свойствами скалярного произведения.

Пусть на декартовом квадрате произвольного m-мерного векторного пространства M над некоторым полем G задан какой-нибудь предикат E. Базис $(p_1, p_2, ..., p_m)$ векторного пространства M произвольно фиксирован. Предикат E назовем линейным, если он для любых x и y может быть выражен в виде $E(x, y) = D(F(x), F(y))$ **(24)**, где $F(x) = (xk_1, xk_2, ..., xk_n)$ **(25)**.

Здесь $k_1, k_2, ..., k_n$ — какие-нибудь линейно независимые векторы; D — предикат равенства, заданный на декартовом квадрате всех наборов, составленных из n коэффициентов. Имеется в виду, что $n \leqslant m$. Предикат E назовем *аддитивным*, если для любых x_1, x_2, y_1, y_2 из условия $E(x_1, y_1) = E(x_2, y_2) = 1$ следует $E(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = 1$. Предикат E назовем однородным, если для любых x, y и α из условия $E(x, y) = 1$ следует $E(\alpha x, \alpha y) = 1$. Предикат E назовем n-мерным, если существует набор векторов $(e_1, e_2, ..., e_n)$ такой, что равенство

$$E(x, \sum_{i=1}^{n} F_i(x) e_i) = 1 \qquad (26)$$

выполняется для каждого x при единственном наборе коэффициентов $(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x))$. Здесь $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — это некоторые функции, заданные на множестве M со значениями в множестве G.

Поступила в редколлегию 06.04.88