УДК 681.51

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ К АНАЛИЗУ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

Ю.А. Романенков
(представил д.т.н., проф. В.М. Вартанян)

Рассмотрены методы анализа и синтеза динамических систем, позволяющие использовать математический аппарат теории управления в системах поддержки принятия решений. Предложены аналитические методы синтеза операторов принятия решения.

На сегодняшний день в классической теории управления для анализа электрических и механических систем регулирования разработана мощная и достаточно общая методика. Существуют эффективные методы анализа и синтеза систем, позволяющие оценивать качество регуляторов (управляющих устройств), а также устойчивость систем в целом.

При решении экономических, производственных задач управления в процессе анализа используют динамические модели, которые принципиально ничем не отличаются от моделей следящих систем.

На достаточно общем примере можно показать возможность и эффективность применения методов классической теории управления, в том числе аналитических методов анализа динамических систем.

Рассмотрим регулирование скорости производства отдельного продукта. Подразумевается, что этот продукт изготавливается, поступает на склад и отгружается по заказам потребителей. Продукт изготавливается непрерывно и регулирование выражается в приказах, в соответствии с которыми непрерывно изменяется дневной объем производства (или выпуск за другой период времени, принятый за единицу). Можно считать, что все процессы носят непрерывный характер, т.е. период изменения скорости заказов много больше периода принятия решений.

Целью системы управления (или системы поддержки принятия решений) является обеспечение заданного количества товара на складе, устойчивость системы по каналам управления и возмущения, а также минимизация затрат на изготовление и хранение продукции.

На рис. 1 представлена схема системы управления подобного рода, на которой обозначено: $g(t)$ – заданное значение уровня запасов (требуемое количество товара на складе); $y(t)$ – фактическое количество товара на складе; $\xi(t)=g(t)-y(t)$ – величина рассогласования (отклонение); $K(t)$ – оператор принятия решения (регулятор системы); $f(t)$ – скорость заказов; $u(t)$ – скорректированная скорость выпуска продукции; $\int$ – знак интегрирования.

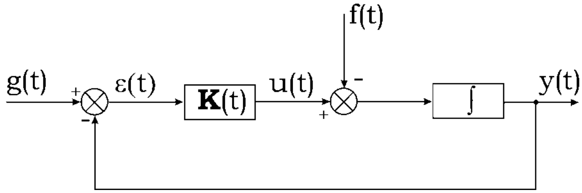

Рис. 1. Структурная схема системы управления скорости производства

Система управления такого вида описывается системой дифференциально-алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \xi(t) = g(t) - y(t); \\ \dfrac{dy}{dt} = u(t) - f(t); \\ u(t) = K(t)\{\xi(t)\} \end{cases} \tag{1}$$

или используя преобразование Лапласа и переходя от оригиналов временных функций к их изображениям в плоскости комплексной переменной s :

$$\begin{cases} \xi(t) = g(t) - y(t); \\ s \cdot y(t) = u(t) - f(t); \\ u(s) = K(s) \cdot \xi(s). \end{cases} \tag{2}$$

Из системы уравнений (2) можно найти передаточные функции по управлению и возмущению:

$$\begin{aligned} W_g(s) &= \frac{y(s)}{g(s)} = \frac{K(s)}{s + K(s)}; \\ W_f(s) &= \frac{y(s)}{f(s)} = \frac{-1}{s + K(s)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Будем искать оператор принятия решений $K(s)$ в виде:

$$K(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}, \qquad n \geq m, \tag{4}$$

где $b_i(i = 0,m)$, $a_j(j = 0,n)$ – коэффициенты передаточной функции регулятора.

Рассмотрим простейший регулятор первого порядка с передаточной функцией вида

$$K(s) = \frac{k}{Ts + 1}. \tag{5}$$

Тогда имеем:

$$
W_g(s) = \frac{k}{Ts^2 + s + k};
$$
$$
W_f(s) = -\frac{Ts + 1}{Ts^2 + s + k}. \tag{6}
$$

Устойчивость системы определяется корнями знаменателя передаточной функции. Согласно критерию Гурвица для непрерывных систем, корни характеристического уравнения $Ts^2 + s + k = 0$ имеют отрицательные вещественные части (т.е. обеспечивают устойчивость) при положительных значениях параметров T и k.

Исходя из специфики задач управления данного типа, переходные процессы в системе должны носить апериодический характер, т.е. корни характеристического уравнения должны быть неотрицательными и действительными. Таким образом, параметры T и k необходимо выбирать, исходя из условий:

$$
\begin{cases} k > 0; \\ T \le \dfrac{1}{4k}; \\ T > 0. \end{cases} \tag{7}
$$

Выберем передаточную функцию регулятора, удовлетворяющую этим условиям:

$$
K(s) = \frac{25}{0.01s + 1}. \tag{8}
$$

Таким образом, можно получить дифференциальное уравнение принятия решения, по которому необходимо изменять программу выпуска в зависимости от отклонения $\xi(t)$:

$$
\frac{u(s)}{\xi(s)} = \frac{25}{0.01s + 1};
$$
$$
u(t) + 0.01\frac{du(t)}{dt} = 25\xi(t). \tag{9}
$$

Естественно, что выбор параметров регулятора не является однозначным и зависит от требований, предъявляемых к системе, среди которых может фигурировать и оптимальность по различным критериям (точность, быстродействие и т.д.)

Система построена таким образом, что колебания скорости выпуска и запасов товара на складе не могут быть исключены одновременно. Однако циклические изменения и того, и другого, повышают издержки в целом. Поэтому для оценки эффективности и построения оптимальной с точки зрения минимизации затрат системы управления необходимо задаться каким-либо критерием, характеризующим одновременно затраты на производство и хранение продукции.

Для определенности рассмотрим режим работы системы при гармонической нагрузке

$$f(t) = A\cos\omega t. \tag{10}$$

В этом случае планируемая скорость выпуска $u(t)$ и запасы товара на складе $y(t)$ будут также изменяться по гармоническому закону с той же частотой ω:

$$\begin{aligned} u(t) &= B\cos\omega t + C\sin\omega t\,; \\ y(t) &= D\cos\omega t + E\sin\omega t\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Очевидно, что с ростом амплитуды колебаний $u(t)$ и $y(t)$ издержки будут расти. Следовательно, критерий оптимальности можно записать в следующем виде:

$$J = k_1\left(B^2 + C^2\right) + k_2\left(D^2 + E^2\right), \tag{12}$$

где k_1 и k_2 – весовые коэффициенты, характеризующие конкретный способ изготовления и хранения продукции.

Так как функции $f(t)$, $u(t)$ и $y(t)$ связаны уравнением

$$\frac{dy}{dt} = u(t) - f(t), \tag{13}$$

то

$$D = -\frac{C}{\omega}; \quad E = \frac{B-A}{\omega}, \tag{14}$$

откуда

$$J = k_1\left(B^2 + C^2\right) + \frac{k_2}{\omega^2}\left(C^2 + (B-A)^2\right). \tag{15}$$

Минимальное значение функции издержек J достигается при значениях:

$$B = \frac{k_2 A}{k_1\omega^2 + k_2}; \quad C = 0. \tag{16}$$

Из выражения (16) следует, что при $\omega \to 0$ $B \to A$, а при $\omega \to \infty$ $B \to 0$. Это означает, что при малых частотах колебаний скорости заказов экономически более выгодно менять скорость выпуска продукции, а величину запасов поддерживать на одном уровне. При высоких же частотах колебаний заказов выгоднее допустить колебания запасов товара на складе, стабилизируя скорость выпуска.

Таким образом, система должна иметь частотную характеристику фильтра нижних частот с полосой пропускания, которую можно найти из уравнения:

$$J\Big|_{\substack{B=A\\C=0}} = J\Big|_{\substack{B=0\\C=0}}; \qquad \omega^* = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}. \tag{17}$$

На практике, зная численные значения весовых коэффициентов k_1 и k_2, можно легко подстроить регулятор $K(t)$ на частоту среза ω^*, изменяя коэффициент усиления k.

Возможно также управление по алгоритму:

$$\begin{cases} \omega_f < \omega^* \;\Rightarrow\; u(t) = K(t)\{\xi(t)\}; \\ \omega_f < \omega^* \;\Rightarrow\; u(t) = Const, \end{cases}$$

т.е. в зависимости от частоты изменения скорости заказов система переключается в один из двух режимов: «слежения» или «стабилизации».

Выводы. Рассмотренная модель системы производства и хранения является одной из простейших динамических моделей. Более сложные модели могут иметь в своей структуре звенья запаздывания, нелинейности и т.д. Однако широкий спектр методов синтеза позволяет анализировать подобные системы и добиваться эффективного управления.

Предложенные методы анализа производственных экономических систем являются наглядным средством поддержки принятия решений и позволяют аналитически оценивать влияние параметров системы на ее динамику и качество управления.

Преимуществом аналитических подходов к формированию правил принятия решений являются высокая наглядность, общность решения, возможность решения обратных задач управления.

Литература

1. *Экономико-математическое обеспечение управленческих решений в менеджменте / Под ред. В.М. Вартаняна. – Харьков: ХГЭУ, 2001. – 288 с.*
2. *Вартанян В.М. Технология символьно-численных вычислений при проектировании систем управления // Авиационно-космическая техника и технология. – Х.: ГАУ «ХАИ». – 1999. – Вып. 10 – С. 226 – 229.*
3. *Кучмиев В.Г., Романенков Ю.А. Графоаналитические методы планирования в линейных моделях производства // Экономика: проблемы теории и практики: Сб. науч. тр. – Д.: ДГУ, 2002. – Вып. 151. – С. 104-109.*