

УДК 681.007.05/618.3.019

В. А. ЛЮБЧЕНКО, Е. П. ПУТЯТИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НОРМАЛИЗАЦИИ ПЕРСПЕКТИВЫ

В системах технического зрения одной из важнейших задач распознавания является нормализация геометрических искажений. При небольших расстояниях камеры до объекта можно допустить, что входное изображение искажено действием только аффинной группы. Однако ряд технических задач выходит за рамки аффинной группы (аэрофотосъемка, видеосъемка поверхности Земли и т.д.). Для этих задач используют математические модели, которые основываются на проективных преобразованиях.

Нормализация полной проективной группы преобразований достаточно трудоемкая задача, поэтому рассмотрим преобразования, которые она в себе содержит.

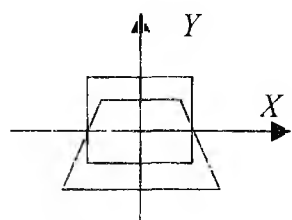


Рис. 1

Известно, что аффинное преобразование является подгруппой проективной группы и, следовательно, все подгруппы аффинной группы являются также подгруппами проективной группы (поворот, косой сдвиг, масштаб). Поэтому представляют особый интерес простейшие подгруппы проективной группы, которые не являются подгруппами аффинной группы. Такими преобразованиями являются преобразования перспективы, в частности, параболическая гомология относительно оси ординат $\Pi(1)$ [1]. На рис. 1 представлен частный случай этого преобразования.

Формулы связи координат имеют вид $X = \frac{x}{\lambda y + 1}$, $Y = \frac{y}{\lambda y + 1}$, где λ – параметр преобразования, x, y – координаты квадрата (эталона).

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Известно [1], что $\det A$ дает информацию о преобразовании каждой точки изображения, а $|\det A|$ – коэффициент сжатия этой точки:

$$\det A = \frac{1}{(\lambda y + 1)^3}.$$

Если входные $B(x, y)$ и эталонные $B_0(x, y)$ изображения отличаются только преобразованиями перспективы, которые не выводят изображения за пределы поля зрения D , то для преобразования $\Pi(1)$ выполняется условие

$$\iint_D B(x, y) \partial x \partial y = \iint_D \frac{B_0(x, y) \partial x \partial y}{(\lambda y + 1)^3}.$$

Следящий функционал типа

$$\Phi(B) = \iint_D B(x, y) \partial x \partial y - \iint_D \frac{B_0(x, y) \partial x \partial y}{(\lambda y + 1)^3}, \quad (1)$$

можно использовать для нормализации перспективы.

Следует отметить, что функционал $\Phi(B)$ для эталонных преобразований равен нулю.

Перейдем от эталонного изображения к ограничениям на прямые $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$, где ℓ_1 – прямая проходящая параллельно оси абсцисс через нижнюю точку изображения, ℓ_n – через верхнюю точку

изображения и найдем их образы на входном изображении l'_1, l'_2, \dots, l'_n . Поскольку $\det A$ преобразования $\Pi_y(1)$ не зависит от абсциссы, то все точки некоторой линии l_i имеют одинаковый коэффициент сжатия по отношению к ее образу l'_i , т.е. по прямой l_i осуществляется сжатие с коэффициентом k_i . Следовательно, семейство прямых l_1, l_2, \dots, l_n отличаются от прямых l'_1, l'_2, \dots, l'_n коэффициентами k_1, k_2, \dots, k_n соответственно. Очевидно, что $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ или $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$.

Рассмотрим функцию

$$f(\lambda y) = \left| \frac{1}{(\lambda y + 1)^3} \right|.$$

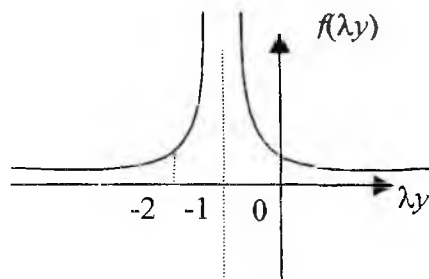


Рис. 2

График этой функции представлен на рис. 2.

Учитывая рис. 2 и геометрический смысл модуля детерминанта, соответствующего преобразованию $\Pi_y(1)$, можно сделать следующие выводы.

1. Изображения, находящиеся на участках $\lambda\psi \in (-\infty; -2)$ и $(0; \infty)$, будут уменьшаться. На рис. 3: исходное изображение – фигура ABCD, а преобразованное с параметром $\lambda=0,5$ – фигура A'B'C'D' (участок $\lambda\psi \in (-\infty; -2)$). На рис. 5: исходное изображение – фигура ABEF, а преобразованное с параметром $\lambda=0,5$ – фигура A'B'EF (участок $\lambda\psi \in (0; \infty)$).

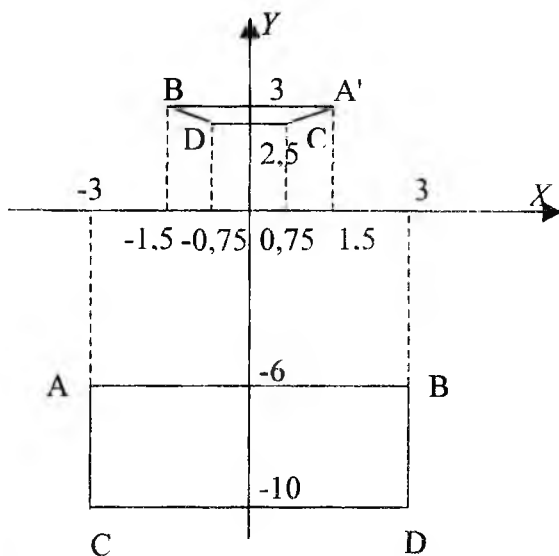


Рис. 3

2. Изображения, находящиеся на участках $\lambda\psi \in (-2; -1)$ и $(-1; 0)$ – увеличиваются в размерах. На рис. 4: исходное изображение фигура ABCD, а преобразованное с параметром $\lambda=0,5$ – фигура A'B'C'D'. На рис. 5: исходное изображение – фигура EFC D, а преобразованное с параметром $\lambda=0,5$ – фигура EFC'D'.

3. На прямой $\lambda\psi = -1$ преобразование не существует.

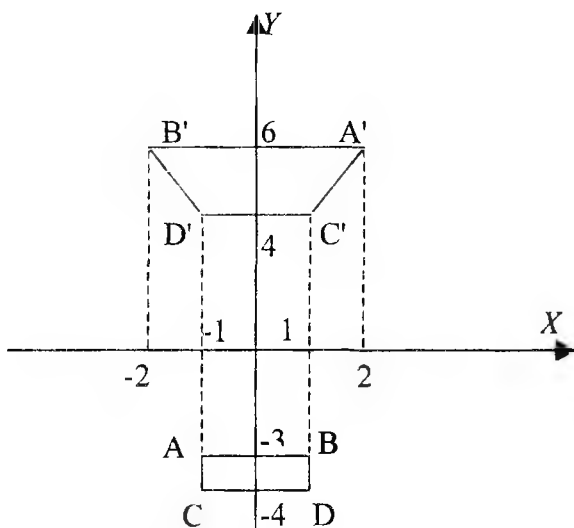


Рис. 4

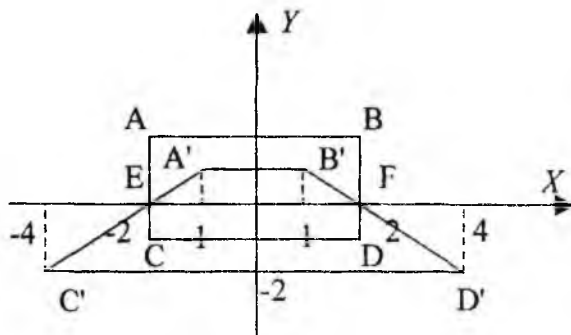


Рис. 5

4. На прямой $\lambda\psi = -2$ изображение не изменит своих размеров. На рис. 4: исходное изображение отрезок CD, а преобразованное с параметром $\lambda=0,5$ – отрезок C'D'.

5. На прямой $\lambda\psi = 0$ изображение также не изменит своих размеров и останется неподвижным. На рис. 5 исходное изображение отрезок EF; преобразованное с параметром $\lambda=0,5$ – тот же отрезок EF, т.е. имеет место преобразование само в себя.

6. Преобразование определяется началом координат, параметром λ , осью преобразования.

Поскольку параметр перспективы зависит от расположения относительно центра преобразования, представляет интерес изучение влияния смещения изображений на вид преобразования. Предположим, что все преобразования рассматриваются в области, где они обратимы.

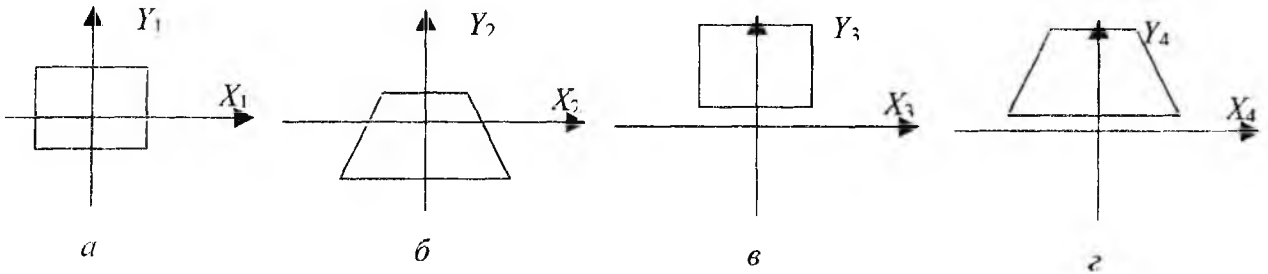


Рис. 6

Пусть изображения, представленные на рис. 6, а и б связаны формулами:

$$x_2 = \frac{x_1}{\lambda y_1 + 1} \quad y_2 = \frac{y_1}{\lambda y_1 + 1}.$$

Установим влияние перемещения на вид преобразования.

Сместим изображение в) вдоль оси преобразования на величину m , а изображение г) – на величину n (рис. 6) по отношению к изображениям а) и б) соответственно.

Тогда координаты изображений а) и в) имеют зависимость $x_3 = x_1; y_3 = y_1 + m$, а изображения б) и г) – $x_4 = x_2; y_4 = y_2 + n$.

Зависимость между координатами (x_4, y_4) и (x_3, y_3) следующая:

$$y_4 = y_2 + n = \frac{y_1}{\lambda y_1 + 1} + n = \frac{y_1 + \lambda y_1 n + n}{\lambda y_1 + 1}; \quad x_4 = x_2 = \frac{x_1}{\lambda y_1 + 1}$$

$$y_3 = y_1 + m \Rightarrow y_1 = y_2 - m; \quad y_4 = \frac{y_3 - m + \lambda(y_3 - m)n + n}{\lambda(y_3 - m) + 1} = \frac{y_3(1 + \lambda n) - m + \lambda mn + n}{\lambda y_3 + 1 - \lambda m}$$

$$x_4 = \frac{x_3}{\lambda(y_3 - m) + 1} = \frac{x_3}{\lambda y_3 + 1 - \lambda m}.$$

Следовательно, изображения рис. 6, в, г связаны преобразованием, матрица которого имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda & -m - n + \lambda mn \\ 0 & \lambda & 1 - \lambda m \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda = \frac{n-m}{nm}$, то

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1 - \lambda m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{m} & 0 \\ 0 & \frac{n-m}{nm} & \frac{m}{n} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{n}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n^2}{m^2} & 0 \\ 0 & \frac{n-m}{nm} & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим $\frac{n}{m} = a$; $\frac{n-m}{nm} = h$, т.е. матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Заметим, что полученная матрица есть элемент группы, который может быть разложен на комбинацию преобразований сжатия $D(a, a^2)$ и перспективы $P_j(k)$. Следовательно, можно выполнить последовательную нормализацию, основываясь на разложении матрицы.

Алгоритм 1

1. Для выбранной прямой эталонного изображения, параллельной оси абсцисс, найти соответствующую прямую входного изображения. Пусть они связаны коэффициентом сжатия a .
 2. Совместить оси абсцисс с этими прямыми для входного и эталонного изображений соответственно, тем самым осуществить переход к преобразованию с матрицей (2).
 3. Нормализовать сжатие путем воздействия на изображение преобразованием $D(a, a^2)$.
 4. Функционалом вида (1) нормализовать перспективу.
- Пусть теперь известна координата центра преобразования для ординат и не известна для абсцисс. Пусть изображения, представленные на рис. 7, а и рис. 7, б, связаны формулами:

$$x_2 = \frac{x_1}{\lambda y_1 + 1}, \quad y_2 = \frac{y_1}{\lambda y_1 + 1}.$$

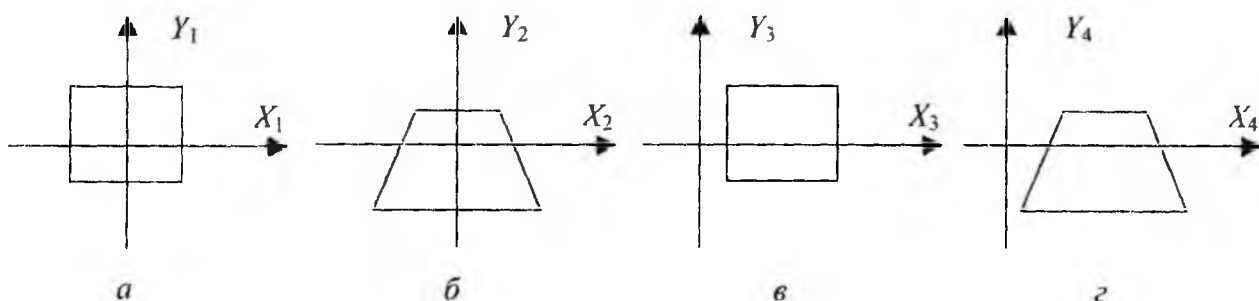


Рис. 7

Установим влияние перемещения вдоль оси абсцисс на вид преобразования. Предположим, что все преобразования рассматриваются в области, где они обратимы.

Пусть изображение в) смещено вдоль оси преобразования на величину m , а изображение г) – на величину n (рис. 7) по отношению к изображениям а) и б) соответственно.

Пусть изображение в) смещено вдоль оси абсциссы на некоторую величину m , а изображение г) – на величину n по отношению к изображениям а) и б) соответственно. (рис. 7). Следовательно, координаты изображений а) и в) имеют зависимость: $x_3 = x_1 + m$; $y_3 = y_1$, а изображения б) и г) – $x_4 = x_2 + n$; $y_4 = y_2$. Тогда зависимость между координатами (x_4, y_4) и (x_3, y_3) следующая:

$$x_1 = \frac{x_4 - \lambda y_4 m + (m - n)}{1 - \lambda y_1}, \quad y_3 = \frac{y_4}{1 - \lambda y_1}.$$

Преобразованию, связывающему изображения представленные на рис. 3 в) и рис. 3 г), соответ-

ствует матрица $K = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda m & m - n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$

Если $m=n$, то

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} = PY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = YP = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где P – матрица параболической гомологии, Y – косо́й сдвиг вдоль оси абсцисс. Очевидно, что множество матриц $K=PY=YP$ образует группу. Следовательно, нормализацию следящего типа можно проводить поэтапно.

Алгоритм 2

1. Для выбранной прямой параллельной оси абсцисс эталонного изображения найти соответствующую прямую входного изображения.
2. Поместить центры тяжести этих прямых на ось ординат, тем самым осуществить переход к преобразованию с матрицей (3).
3. Функционалом вида (1) нормализовать перспективу.
4. Нормализовать косо́й сдвиг любым известным способом [2].

В заключение рассмотрим случай, когда неизвестна ни ось, ни точка преобразования.

Для данного случая связь между координатами входного и эталонного изображения

$$X = \frac{-x - k\lambda + t - k - \lambda nk}{\lambda y - l - \lambda n}, \quad Y = \frac{y(\lambda(-1) + n - m - \lambda mn)}{\lambda y - l - \lambda n}$$

где t, k – параметры смещения относительно оси ординат; m, n – относительно оси абсцисс; l – параметр параболической гомологии при несмещенных изображениях. Матрица, соответствующая дан-

ному преобразованию, имеет вид: $K = \begin{pmatrix} -1 & k\lambda & t - k - \lambda nk \\ 0 & \lambda m - l & n - m - \lambda mn \\ 0 & \lambda & -l - \lambda m \end{pmatrix}$. Если выполнимы условия

$$\lambda = \frac{t - k}{nk} \text{ и } \lambda = \frac{n - m}{nm} \Rightarrow k = \frac{mt}{n} \text{ то } K = \begin{pmatrix} \frac{m}{n} & \frac{t(n - m)}{n^2} & 0 \\ 0 & \frac{m^2}{n^2} & 0 \\ 0 & \frac{(n - m)}{n^2} & 1 \end{pmatrix}$$

Введем обозначения: $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{t(n - m)}{n^2}$, $h = \frac{(n - m)}{n^2}$, тогда

$$K = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D(a, a^2) P_x(h) Y\left(\frac{b}{a}\right)$$

где $D(a, a^2)$ – сжатие, $P_x(h)$ – параболическая гомология, $Y\left(\frac{b}{a}\right)$ – косо́й сдвиг [2].

Алгоритм нормализации в этом случае имеет вид:

Алгоритм 3

1. Выполнить п.1-3. алгоритма 1.
2. Выполнить п.1-4. алгоритма 2.

Подводя итоги исследования, можно сделать выводы.

Для нормализации изображений, подверженных воздействию перспективы, получены математические модели, которые позволяют привести входные изображения к эталону при различных априорных данных:

- известный центр преобразования;
- известна только ось преобразования;
- неизвестный центр преобразования.

Чем больше априорной информации, тем проще процедура нормализация изображений. Приведены три варианта алгоритмов, сложность которых возрастает с уменьшением априорной информации.

Литература: 1. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. М.: Московский университет, 1969, 598 с. 2. Пуятин Е.П., Аверин С.И. Обработка изображений в робототехнике. М.: Машиностроение, 1990, 319 с.

Поступила в редколлегию 18.10.2000