

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Навчально-науковий центр заочної форми навчання  
(повна назва)

Кафедра Мікроелектроніки, електронних приладів та пристроїв  
(повна назва)

## АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

другий (магістерський)  
(рівень вищої освіти)

Застосування методів Проні у обробці біомедичних даних

(тема)

Виконав: студент 2 курсу, групи ЕППзм18-1

Ульянко В.О.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність 171 Електроніка

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма «Електронні приладі та пристрої

(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Грицунов О.В.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри

\_\_\_\_\_

(підпис)

Бондаренко І.М.

(прізвище, ініціали)

2019 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Навчально-науковий центр заочної форми навчання

Кафедра Мікроелектроніки, електронних приладів та пристроїв

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 171 «Електроніка»

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма «Електронні прилади та пристрої»

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри \_\_\_\_\_

(підпис)

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

## ЗАВДАННЯ НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

Студентові Ульянко Валерію Олександровичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування методів Проні у обробці біомедичних даних

затверджена наказом по університету від 15 жовтня 2019 р. № 203Стз

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 16 12 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи Змоделювати фільтр нижніх частот для обробки двовимірних цифрових сигналів у частотній області з такими параметрами:

3.1 Розмір матриці 640x480.

3.2 Вид вікна прямокутне та гауссове

3.3 Ширина вікна 0,1; 0,2 та 0,5 від частоти Найквіста

3.4 Інтерфейс виводу віконний

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі

4.1 Математичні основи обробки сигналів

4.2 Цифрова фільтрація одно і двовимірних послідовностей дискретних функцій

4.3 Застосування алгоритма поліпшення зображень викривлених шумами

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій (слайдів) \_\_\_\_\_

5.1 Вступ.

5.2 Основні рівняння розрахункової моделі.

5.3 Алгоритм програми.

5.4 Результати моделювання.

5.5 Висновки

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

| № | Назва етапів роботи                                   | Терміни виконання етапів роботи | Примітка |
|---|---|---------------------------------|----------|
| 1 | Огляд літературних джерел за темою роботи             | 01.11.19 – 08.11.19             | Виконано |
| 2 | Аналіз методів розв'язання проблеми                   | 14.11.19 – 19.11.19             | Виконано |
| 3 | Розробка математичного апарату                        | 21.11.19 – 26.11.19             | Виконано |
| 4 | Складання алгоритму та написання                      | 28.11.19 – 02.12.19             | Виконано |
| 5 | Підготовка пояснювальної записки та роботи на кафедрі | 04.12.19 – 16.12.19             | Виконано |
|   |   |                                 |          |
|   |   |                                 |          |
|   |   |                                 |          |

Дата видачі завдання 05 09 2019 р.

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ проф. кафедри МЕЕПІ Грицунов О.В.  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка вміщує: 65 с., 11 рис., 2 табл., 3 додатки, 21 джерел.

СИГНАЛ, ШУМ, БІОМЕДИЧНА ІНФОРМАЦІЯ, ПЕРЕТВОРЕННЯ СИГНАЛІВ, НИЗЬКОЧАСТОТНИЙ ФІЛЬТР

Об'єкт дослідження – викривлений шумами біомедичний сигнал.

Мета роботи – розробка алгоритма поліпшення якості сигналу, що створюється на виході ЕКГ.

Метод дослідження – числове моделювання на ЕОМ.

Розроблено методику числового моделювання цифрової фільтрації дискретних сигналів, призначену для збільшення розбірливості сигналів ЕКГ. Запропоновано алгоритм фільтрації вхідного сигналу в частотній області з використанням віконних фільтрів. Написано програму, що реалізує даний алгоритм. Програма може використовуватись в мережі дистанційної освіти ХНУРЕ та інших вищих навчальних закладів.

Результати досліджень можуть бути використані при проведенні існуючих та постановці нових лабораторних робіт.

Прогнозні припущення про розвиток об'єкта дослідження – застосування інтерактивної графічної оболонки.

## ABSTRACT

Explanatory note contains: with 65, Fig 11, Table 2, annex 3, sources 21.

SIGNAL, NOISE, BIOMEDICAL INFORMATION, SIGNAL TRANSFORM,  
LOW FREQUENCY FILTER

The object of the investigation is a digital signal distorted by noise.

The aim of the work is to develop an algorithm for improving the quality of the image obtained at the ECG.

The method of investigation is numerical simulation on a computer.

A technique for numerical simulation of digital filtering of discrete signals is developed, designed to improve the intelligibility of signals of ECG. An algorithm for filtering the input signal in the frequency domain using window filters is proposed. A program is implemented that implements this algorithm. The program can be used in the distance education network of KNURE and other universities of radio engineering and electronic profile.

The results of the research can be used in conducting existing and setting up new laboratory works.

Forecasting assumptions about the development of the object of research is the use of an interactive graphical shell.

## ЗМІСТ

|   |    |
|---|----|
| ВСТУП .....   | 6  |
| 1 МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ .....                                       | 9  |
| 1.1 Комплексний запис сигналів .....  | 9  |
| 1.2 Перетворення Фур'є .....  | 11 |
| 1.3 Дельта-функції .....  | 13 |
| 1.4 Симетричні і антисиметричні функції .....                                     | 17 |
| 1.5 Найважливіші співвідношення, пов'язані з перетворенням Фур'є .....            | 19 |
| 1.6 Прямокутний імпульс і його перетворення Фур'є .....                           | 22 |
| 1.7 Прилади з зарядовим зв'язком .....  | 23 |
| 2 ЦИФРОВА ФІЛЬТРАЦІЯ ОДНО І ДВОВИМІРНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ<br>ДИСКРЕТНИХ ФУНКЦІЙ..... | 25 |
| 2.1 Дискретні сигнали .....   | 27 |
| 2.2 Цифрові фільтри .....   | 29 |
| 2.3 Квантування сигналів в цифрових фільтрах .....                                | 31 |
| 2.4 Алгоритм лінійної цифрової фільтрації .....                                   | 32 |
| 3 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДА ПРОНІ ДЛЯ ОБРОБКИ БІОМЕДИЧНОЇ<br>ІНФОРМАЦІЇ .....           | 36 |
| 3.1 Вибір математичного методу розв'язання задачі .....                           | 37 |
| 3.2 Алгоритмічна реалізація фільтрації сигналів .....                             | 40 |
| 3.2.1 Основна програма .....  | 41 |
| 3.3 Методи Проні .....  | 44 |
| 3.4 Метод гармонійної інтерполяції.....   | 48 |
| 3.5 Метод найменших квадратів .....   | 56 |
| 3.6 Факторизація поліномів високих порядків .....                                 | 57 |
| ВИСНОВКИ .....  | 63 |
| ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ .....  | 64 |
| Додаток А Відомість атестаційної роботи .....                                     | 66 |
| Додаток Б Програма для обробки сигналів .....                                     | 67 |
| Додаток В Презентація доповіді .....  | 72 |

## ВСТУП

Одним із завдань сучасної електроніки є підвищення ефективності електронних систем, в першу чергу, інформаційних, в яких в тій чи іншій формі здійснюється передача або обробка інформації. До таких належать, наприклад, системи візуалізації та вимірювання параметрів руху різних об'єктів в просторі, електронна розвідка, накопичення інформації. У всіх перерахованих випадках корисна інформація витягується в процесі обробки сигналів. Саме тому шлях вирішення зазначеної проблеми полягає в подальшому вдосконаленні методів обробки сигналів.

Аналіз біомедичної інформації і обробка сигналів - дві взаємозалежні дисципліни. І в тій, і в іншій застосовуються ЕОМ або цифрові пристрої; в них можуть використовуватися перетворення Фур'є, цифрова фільтрація, обчислення щільності спектра потужності і т.д. Є багато спільних методів та засобів.

За своїм завданням обробка сигналів відноситься до теоретичного розділу електротехніки і має на меті ефективну розробку таких пристроїв, як ідентифікатори особистості в банківських і комунікаційних системах, пристрої обробки радарних сигналів, пристрої обробки відеосигналів і т. п. Обробка сигналів пов'язана з розробкою спеціального обладнання для вивчення електричних сигналів.

Залежно від призначення конкретної системи доводиться стикатися з різними видами пристроїв обробки, так само як і з різними видами самих сигналів. Так, у багатьох системах радіотелеметрії, передачі мовної інформації, зображень і т.п. повідомлення є відрізки реалізації безперервних випадкових процесів, тобто є безперервними. При цьому в тих випадках, коли при передачі не проводиться тимчасова дискретизація цих повідомлень (що, навпаки, має місце, наприклад, в системах з кодово-імпульсною модуляцією), сигнали, відповідні таким повідомленням, виявляються також безперервними, або аналоговими.

Під сигналом в радіотехніці розуміється те, що математики зазвичай називають функцією. Сигналом є впорядкована множина чисел, що несуть інформацію про деяке процесі. Зазвичай описується двома (одновимірний сигнал), трьома (двовимірний сигнал) або більше (багатовимірний сигнал) параметрами. Звісно ж як кінцевої або нескінченної сукупності точок. Одним з параметрів для всіх типів сигналів є значення рівня сигналу (його енергії) у всіх точках. В якості інших параметрів зазвичай виступають час (одновимірний сигнал), просторові координати (двовимірний і багатовимірні сигнали). Значення всіх параметрів можуть бути безперервними або дискретними. Таким чином, для кожної розмірності можна розрізнити  $2L$  сигналів, де  $L$  - розмірність сигналу. Наприклад, в одновимірному випадку існують сигнали, безперервні за часом і рівнем, дискретні за часом і рівнем, дискретні за часом і безперервні за рівнем, безперервні за часом і дискретні за рівнем. Перетворення безперервного за часом і рівнем сигналу в дискретний за часом і рівнем сигнал називається аналого-цифровим перетворенням (АЦП), зворотне перетворення - ЦАП. Так як ці питання виходять за рамки атестаційної роботи, в подальшому всі сигнали вважаються дискретними за часом і рівнем, тобто цифровими.

Методи аналізу часових рядів широко використовуються в різних областях науки і техніки. Їх можна застосовувати при аналізі великих обсягів даних, одержуваних в процесі обробки інформації з супутників або витягають із зведень таких економічних даних, як поточна біржова інформація. Основна відмінність полягає в тому, що обробка сигналів пов'язана з деталями таких алгоритмів, як алгоритми цифрової фільтрації і перетворення Фур'є, в той час як аналіз часових рядів - з їх застосуванням в задачах аналізу даних.

Використання цифрової обробки сигналів як важливої наукової дисципліни почалося з середини 60-х років, коли швидкодіючі цифрові електронні обчислювальні машини (ЕОМ) стали широко використовуватися для наукових і проектних робіт. Багато положень, що утворюють теоретичну базу цифрової обробки сигналів, такі як  $z$ -перетворення і перетворення Фур'є, були відомі інженерам і раніше. Однак в наступні роки вони отримали значний

розвиток, і цей розвиток безпосередньо пов'язано з успіхами обчислювальної техніки.

Впродовж останнього десятиріччя ознаменувалося значним прогресом у вдосконаленні ЕОМ. З кожним кроком у своєму розвитку ЕОМ вирішували усі нові і більш складні завдання, тим самим відкриваючи для себе нові можливі застосування і породжуючи зростаючі вимоги до своїх технічних характеристик. Вдосконалення ЕОМ благодатно відбилося на розвитку майже усіх наукових дисциплін, успіхи яких позначилися на становленні цифрової обробки зображень.

Метою даної атестаційної роботи є розробка алгоритму цифрової фільтрації біомедичних сигналів, одержуваних на виході електрокардіографу (ЕКГ).

## 1 МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

Для розробки алгоритму цифрової фільтрації необхідно спочатку ознайомитися з загальними математичними основами обробки дискретних функцій, одержуваних з датчиків зображень.

### 1.1 Комплексний запис сигналів

Комплексне число  $c$  будемо записувати у вигляді  $c = a + jb$ . Тут  $a$  дійсний,  $b$  - уявна частини  $c$ ; відповідні позначення:  $\operatorname{Re} c = a$ ,  $\operatorname{Im} c = b$ . число  $c^* = \operatorname{Re} c - j \operatorname{Im} c$  називається комплексно-сполученим.

Сума, добуток і частку комплексних чисел обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} (a + jb) + (g + jh) &= a + g + j(b + h); \\ (a + jb) \times (g + jh) &= ag - bh + j(ah + bg); \\ \frac{a + jb}{g + jh} &= \frac{a + jb}{g + jh} \times \frac{g - jh}{g - jh} = \frac{ag + bh}{g^2 + h^2} + j \frac{bg - ah}{g^2 + h^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

(в останньому випадку передбачається, що  $g^2 + h^2 \neq 0$ ). Абсолютна величина, або модуль комплексного числа  $c$  позначається  $|c|$ ; маємо

$$|c| = \sqrt{cc^*} \quad \text{або} \quad |a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (1.2)$$

бо  $cc^* = (a + jb) \cdot (a - jb) = a^2 + b^2$ . Зрозуміло, що

$$\left| \frac{a + jb}{g + jh} \right| = \frac{|a + jb|}{|g + jh|}, \quad (1.3)$$

якщо [1].

Наступна формула, відома під назвою співвідношення Ейлера:

$$e^{j\theta} = \exp(j\theta) = \cos\theta + j\sin\theta \quad (1.4)$$

буде постійно використовуватися. Для  $\theta = \pi$  співвідношення можна переписати у вигляді  $e^{j\pi} + 1 = 0$ . Ця формула, безумовно - одне з найкрасивіших виразів в математиці; воно встановлює зв'язок п'яти найпоширеніших величин.

Для комплексного числа  $(a + jb)$  можна ввести полярні координати за правилом

$$r = |a + jb|, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}; \quad \text{при цьому } a + jb = r \exp(j\theta) \quad [2].$$

Прикладом функції комплексної змінної може служити  $f(z) = z^2 + z + 1$  де  $z = x + jy$  ( $x$  і  $y$ -дійсні змінні). Її можна переписати у вигляді

$$f(x, y) = (x + jy)^2 + (x + jy) + 1 = (x^2 - y^2 + x + 1) + j(2xy + y). \quad (1.5)$$

Нехай  $f(z)$  - дрібно-раціональна функція від  $z$ , тобто відношення двох поліномів від  $z$

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}. \quad (1.6)$$

Якщо поліноми  $N(z)$  і  $D(z)$  не мають спільних коренів, то нулями  $f(z)$  називаються корені рівняння  $N(z) = 0$ . Корені рівняння  $D(z) = 0$  називаються полюсами  $f(z)$ . Полюси і нулі дрібно-раціональної функції визначають її з точністю до постійного множника. Іншими словами, якщо - нулі функції  $f(z)$ , а  $z_1^d, \dots, z_D^d$  - її полюси, то знайдеться таке число  $c$ , що

$$f(z) = c \prod_{i=1}^N (z - z_i^n) / \prod_{k=1}^D (z - z_k^d) \quad (1.7)$$

Добре відома основна теорема алгебри стверджує, що будь-який (відмінний від постійного) многочлен в полі комплексних чисел має нулі [3].

## 1.2 Перетворення Фур'є

Перетворення Фур'є - основний метод, який використовується в дипломній роботі.

Форма перетворення Фур'є, переводить тимчасову функцію  $x(t)$  в частотну функцію  $X(f)$  за допомогою інтегрального співвідношення

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (1.8)$$

Іноді його записують у вигляді

$$X(f) = F[x(t)]. \quad (1.9)$$

Вихідна незалежна змінна  $t$  для часу, що вимірюється, як правило, в секундах, змінюється в інтервалі  $(-\infty, \infty)$ . Одиницями виміру нової незалежної змінної служать герци, що позначаються Гц. Інтервалом її зміни також буде  $(-\infty, \infty)$ . Замість  $f$  будемо використовувати змінну  $\omega$ ; співвідношення між ними визначається рівністю  $\omega = 2\pi f$ . Величина  $\omega$  порівнюється в радіанах за одиницю часу.

Розмірності  $\omega$  і  $f$  однакові і рівні  $1/t$ . Як буде видно з подальшого, в деякому відношенні функція  $X(f)$  має властивості, схожі на «звернення» відповідних властивостей  $x(t)$ , і назад.

Для довільної функції  $x(t)$  не завжди існує функція  $X(f)$ . Можна навести цілі класи функцій, які не мають перетворення Фур'є. На практиці це не так уже й важлива проблема. Всі функції, які зустрінуться в цій роботі, таке перетворення матимуть.

Перетворення Фур'є зворотньо. Дане вище визначення може бути звернено

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (1.10)$$

Це співвідношення іноді записується у вигляді

$$x(t) = F^{-1}[X(f)] \quad (1.11)$$

Результат цього перетворення краще позначати  $x(t)$ , оскільки трапляються випадки, в яких вихідна функція  $x(t)$  і результат  $x(t)$  обернення перетворення Фур'є функції  $x(t)$  незначно відрізняються. Користуючись математичною термінологією, можна сказати, що  $x(t)$  і  $x(t)$  рівні майже всюди. Ця проблема для функцій тих типів, які будуть розглядатися нижче, великого значення не має [4, 5, 6].

Якщо замість змінної  $f$  використовується змінна  $\omega$ , то наведене вище рівняння набуде вигляду

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (1.12)$$

### 1.3 Дельта-функція

З перетворенням Фур'є тісно пов'язане поняття дельта-функції. Дельта-функцію  $\delta(t)$  можна спробувати уявити собі як функцію, графік якої має нескінченну висоту, нульову ширину і площу, рівну одиниці. Такий опис можна вважати суворим в математичному сенсі. З точки зору використання дельта-функцій корисними будуть наступні два зауваження:

- вони призначаються для використання в інтегралах;
- повинні апроксимувати послідовністю функцій, межа якої володіє відповідними властивостями [7].

Перше твердження призводить до наступного математично більш суворого визначенню дельта-функції

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt \quad (1.13)$$

Відзначимо, що ліва частина цієї рівності постійна. Тому застосування дельта-функції і інтегрування в правій частині можуть представлятися у вигляді процесу, що дає значення  $x(t)$  при певному значенні  $t_0$ .

В послідовності, про яку йшла мова в другому твердженні, можна взяти послідовність ( $i = 1, 2, \dots$ )

$$d_i(t) = \begin{cases} i, \text{ якщо } -\frac{1}{2i} \leq t < \frac{1}{2i}; \\ 0, \text{ в протилежному випадку.} \end{cases} \quad (1.14)$$

Графік цієї функції має висоту  $i$ , ширину  $1/i$  і обмежує площу, рівну 1.

Визначаємо послідовність  $x_i(t)t_0$  за допомогою інтеграла

$$x_i(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) d_i(t-t_0) dt \quad (1.15)$$

Очевидно, що

$$x_i(t_0) = i \int_{t_0-(2i)^{-1}}^{t_0+(2i)^{-1}} x(t) dt \quad (1.16)$$

Для досить хорошої функції  $x(t)$  і при досить великому  $i$  цю функцію можна апроксимувати на малому інтервалі  $t_0 - (2i)^{-1}$ ,  $t_0 + (2i)^{-1}$  її значенням в центрі інтервалу. В цьому випадку попереднє співвідношення можна записати у вигляді

$$x_i(t_0) \cong ix(t_0) \int_{t_0-(2i)^{-1}}^{t_0+(2i)^{-1}} dx = ix(t_0) x \Big|_{t_0-(2i)^{-1}}^{t_0+(2i)^{-1}} = x(t_0) \quad (1.17)$$

Якщо наведені вище міркування формалізувати, то вийде доказ того факту, що послідовність  $x_i(t_0)$  сходиться до межі  $x(t_0)$  [8].

Міркування такого типу застосовуються щоразу, коли необхідна формалізація. Зауважимо, що функція  $d_i(t)$ , наведена вище, визначається не єдиним способом. Є чимало послідовностей, які відповідають меті так само добре. Розглянемо, наприклад, послідовність  $e_i(t)$ , певну наступним чином

$$e_i(t) = \begin{cases} -|t|^2 + i, & |t| \leq i^{-1}; \\ 0, & |t| > i^{-1}. \end{cases} \quad (1.18)$$

Графіки цих функцій представляють собою рівнобедрені трикутники з висотою  $i$  і основою  $2/i$ .

Надалі такі послідовності і граничні переходи розглядатися не будуть. Замість них завжди буде використовуватися визначення через інтеграл.

Продемонструємо використання дельта-функції в області частот. Припустимо, що потрібно отримати зворотне перетворення функції  $\delta(f - f_0)$ . Його можна записати і обчислити таким чином:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) \exp(j2\pi ft) df = \exp(j2\pi f_0 t) \quad (1.19)$$

Таким чином, дельта-функція виділяє значення показовою функції при певному значенні  $f_0$ . Отримане зворотнє перетворення являє собою комплексну функцію часу. Якщо застосувати співвідношення Ейлера, то результат можна переписати у вигляді

$$\exp(j2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t) \quad (1.20)$$

Безпосередньо з цієї рівності можна визначити перетворення Фур'є  $\cos(2\pi f_0 t)$  і  $\sin(2\pi f_0 t)$ . Для цього спочатку знаходять перетворення Фур'є функції  $\delta(f + f_0)$  [9, 10]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f + f_0) \exp(j2\pi ft) df = \exp(-j2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t) - j \sin(2\pi f_0 t) \quad (1.21)$$

Тепер розглянемо зворотнє перетворення Фур'є суми двох дельта-функцій

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \exp(j2\pi ft) df = \\ = \frac{1}{2} (\cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)) + \frac{1}{2} (\cos(2\pi f_0 t) - j \sin(2\pi f_0 t)) = \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Значить, перетворення Фур'є  $\cos(2\pi f_0 t)$  є сума двох дельта-функцій  $\delta(f - f_0)$  і  $\delta(f + f_0)$ , кожна з яких береться з множником  $1/2$ . Зауважимо, що функції - дійсні, тут  $j$  не фігурує.

На рисунку. 1.1 зображено таке перетворення Фур'є. Дельта-функції позначимо стрілками, оскільки на графіку нескінченну висоту зобразити неможливо. При цьому їх множники помістимо поруч зі стрілками по одну сторону від них.

Цей графік показує, що косинус в тимчасовій області переходить в суму двох дельта-функцій в області частот, причому дельта-функції розташовані у взятих з мінусом і плюсом частотах, які відповідають частоті косинуса. Таким чином, вся інформація про  $\cos(2\pi f_0 t)$  після перетворення в область частот сконцентрована в частотах  $\pm f_0$  Гц.

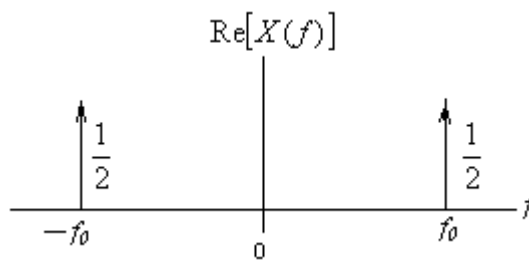


Рисунок 1.1 - Перетворення Фур'є косинуса

Подібна процедура, застосована до  $\sin(2\pi f_0 t)$ , дає

$$\frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j} \quad (1.23)$$

Порівняємо особливості перетворень  $\cos(2\pi f_0 t)$  і  $\sin(2\pi f_0 t)$ . Зазначимо наступне:

- перетворення  $\cos(2\pi f_0 t)$  дає чисто речовий результат, в той час як  $\sin(2\pi f_0 t)$  - чисто уявний;

- обидва перетворення мають вигляд двох дельта-функцій, розташованих в частотах  $f_0$  Гц і  $-f_0$  Гц;

- перетворення косинуса - парна, а перетворення синуса - непарна функції.

Розглянемо зворотне перетворення  $\delta(f)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) \exp(j2\pi ft) dt = \exp(0) = 1 \quad (1.24)$$

Очевидно, що перетворення Фур'є константи є дельта-функція в 0 Гц. Той же результат можна отримати, якщо в перетворенні Фур'є  $\cos(2\pi f_0 t)$  покласти значення  $f_0$  рівним нулю [11].

#### 1.4 Симетричні і антисиметричні функції

Функцію  $x(t)$  називають симетричної (або парної), якщо

$$x(t) = x(-t) \quad (1.25)$$

Подібно до цього, функцію  $x(t)$  називають антисиметричною або непарною, якщо

$$x(t) = -x(-t) \quad (1.26)$$

Будь-яку дійсну функцію можна представити у вигляді суми двох функцій, одна з яких симетрична, а інша - антисиметрична. Якщо, наприклад,  $x_s(t)$  і  $x_a(t)$  - симетрична і антисиметрична складові функції  $x(t)$ , то визначити їх можна з співвідношень

$$x(t) = x_s(t) + x_a(t); \quad x(-t) = x_s(t) - x_a(t) \quad (1.27)$$

Вирішуючи ці рівняння, отримаємо

$$x_s(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}; \quad x_a(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad (1.28)$$

Якщо  $x(t)$  - поліном третього ступеня, тобто  $x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ , то  $x(-t) = a_0 - a_1t + a_2t^2 - a_3t^3$ , тому

$$x_s(t) = a_0 + a_2t^2; \quad x_a(t) = a_1t + a_3t^2 \quad (1.29)$$

Якщо функція  $x(t)$  записана у вигляді  $x_s(t) + x_a(t)$  і показова функція в перетворенні Фур'є - у вигляді  $(\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft))$ , ( визначення перетворення можна переписати таким чином

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x_s(t) + x_a(t)] \cdot [\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)] df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) \cos(2\pi ft) dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) \sin(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \sin(2\pi ft) dt. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Необхідно відзначити три додаткових факта:

- інтеграл від непарної функції по відрізку  $[-a, a]$ , де  $a$  - будь-яке позитивне число, дорівнює 0;
- добуток двох парних або двох непарних функцій є парна функція;
- добуток парної і непарної функцій є непарна функція.

З попереднього можна бачити, що добуток  $x_a(t)\cos(2\pi ft)$  і  $x_s(t)\sin(2\pi ft)$ -непарні функції, і значить, інтеграли від них рівні 0. тому

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (1.31)$$

Нарешті, якщо  $x(t)$  - парна функція, то  $x_a(t) = 0$  для всіх  $t$ , останній результат зведеться до рівності

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (1.32)$$

Причина полягає в тому, що перетворення парних функцій завжди дійсні і, крім того, можуть бути записані як косинус-перетворення. Обидві ці обставини постійно використовуються. Зокрема, перетворення симетричних функцій набагато простіше, так як їх перетворення - дійсні функції, які легше зобразити графічно [12, 13].

### 1.5 Найважливіші співвідношення, пов'язані з перетворенням Фур'є

Властивості перетворення Фур'є, які важливі для нас зведені в табл. 1.1 і 1.2. Вони складають лише малу частку всього класу теорем про перетворення Фур'є, але їх достатньо для вирішення поставленого завдання.

Нехай  $X(f)$  є перетворення Фур'є  $x(t)$  і потрібно знайти перетворення функції  $x(t - t_0)$ , тобто функції  $x(t)$ , зміщеної вправо на величину  $t_0$ . за визначенням таким перетворенням служить [14]

$$F[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (1.33)$$

Якщо зробити заміну змінної  $\tau = t - t_0$ , то  $d\tau = dt$ , і попередній вираз набуде вигляду

$$F[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp[-j2\pi f(\tau + t_0)] d\tau \quad (1.34)$$

Таблиця 1.1 - Перетворення Фур'є, функціональні співвідношення

| Функція |   | Перетворення Фур'є  |  |
|---------|---|---|--|
| 1.      | $x(t) = F^{-1}[X(f)]$<br>$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df$ | $X(f) = F[x(t)]$<br>$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$ |  |
| 2.      | $y(t)$  | $Y(f)$  |  |
| 3.      | $x(t)y(t)$<br>$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$             | $\int_{-\infty}^{\infty} X(\eta)Y(f-\eta)d\eta$<br>$X(f)Y(f)$         |  |
| 4.      | $x(t-t_0)$<br>$x(t)e^{j2\pi f_0 t}$                                       | $X(f)e^{-j2\pi f t_0}$<br>$X(f-f_0)$                                  |  |
| 5.      | $\frac{dx(t)}{dt}$  | $j2\pi f X(f)$  |  |
| 6.      | $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau$                                   | $\frac{1}{j\omega} X(f)$ в том случае, если $X(0) = 0$                |  |
| 7.      | $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$                                       | $\int_{-\infty}^{\infty}  X(f) ^2 df$ (равенство Парсенваля)          |  |

Таблиця 1.2 - Перетворення Фур'є, деякі пари перетворень

|    | $x(t)$  | $X(f)$  |
|----|---|---|
| 1. | $x(t) = \begin{cases} 1, -P/2 \leq t < P/2 \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$ | $\frac{\sin(\pi f P)}{\pi f}$   |
| 2. | $\cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t)$   | $\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$                                    |
| 3. | $\sin(2\pi f_0 t)$  | $\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$                                    |
| 4. | $x(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$                              | $\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$  |
| 5. | $x(t) = 1$ при всех $t$   | $\delta(f)$   |
| 6. | $x(t) = \delta(t)$  | $X(f) = 1$ при всех $f$   |
| 7. | $\exp(j2\pi f_0 t)$   | $\delta(f - f_0)$   |
| 8. | $\exp(-\frac{t^2}{2a^2})$   | $\sqrt{2\pi a^2} \exp\left(-\frac{(2\pi f a)^2}{2}\right)$                          |
| 9. | $\frac{2 \sin(2\pi B t)}{2\pi t}$   | $X(f) = \begin{cases} 1, -B \leq f < B \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$ |

Нескінченні межі при цьому не змінюються, оскільки вони зрушені лише на кінцеву величину  $t_0$ . Експонента з показником, що містить  $t_0$ , може бути винесена за знак інтегрування

$$F[x(t - t_0)] = \exp(-j2\pi f t_0) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau = \exp(-j2\pi f t_0) X(f) \quad (1.35)$$

тобто, після того як ця експонента винесена, залишається інтеграл, який є просто визначення перетворення [6, 8].

Таким чином, запізнення в тимчасовій області відповідає множення на комплексну експоненту в області частот. Ця теорема про перетворення Фур'є - найбільш важливий факт, який використовується в роботі з вибірковими даними.

## 1.6 Прямокутний імпульс і його перетворення Фур'є

Перетворення першої з функцій в табл. 1.2 також заслуговує особливого розгляду. Позначимо її  $u(t)$  і визначимо на тимчасовій прямій співвідношенням

$$u(t) = \begin{cases} 1, & -P/2 \leq t \leq P/2 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (1.36)$$

Графік цієї функції має вигляд симетричного відносно осі  $u(t)$  прямокутника, що має ширину  $P$ . Отримати перетворення Фур'є цієї функції нескладно

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \int_{-P/2}^{P/2} \exp(-j2\pi ft) dt = -\frac{1}{j2\pi f} \exp(-j2\pi ft) \Big|_{-P/2}^{P/2} = \frac{\sin(\pi f P)}{\pi f} \quad (1.37)$$

Перетворення виявляється парною функцією, що представляють собою дві непарні функції  $\sin(\pi f P)$  і  $1/(\pi f)$ . Максимальне значення досягається при  $f = 0$ . Його можна обчислити за правилом Лопітала [15, 16]

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi f P)}{\pi f} = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{d}{df} (\sin(\pi f P)) \left( \frac{d}{df} (\pi f) \right)^{-1} = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{\pi P \cos(\pi f P)}{\pi} = P \quad (1.38)$$

Перші перетворення нульового рівня відбуваються при  $\pi f P = \pm \pi$ , тобто при  $f = \pm P^{-1}$ . Тому ширина центрального виступу дорівнює  $2P^{-1}$ , і значить, ширина в області частот обернено пропорційна ширині в тимчасовій області. Ця властивість взаємної оборотності двох інтервалів найкраще видно для інших трьох перетворень, наведених в табл. 1.2.

У п'ятому рядку таблиці константа, що дорівнює одиниці на усій нескінченній тимчасовій області, перетворюється в дельта-функцію на

частотній області. Остання має нескінченно малу ширину.

Як показує шостий рядок таблиці, дельта-функція на тимчасовій області, що має нескінченно малу ширину, перетворюється в постійну функцію в області частот, що має нескінченний носій.

Як видно з восьмого рядку, колоколообразная крива в тимчасовій області переходить в колоколообразную криву в частотній області. Якщо взяти точки перегибу на кожній з цих кривих, то відстань між ними для кривої в тимчасовій області одно  $2a$ , а відстань для кривої в частій області дорівнює  $(\pi a)^{-1}$ , ці дві відстані обернено пропорційні.

### 1.7 Прилади з зарядовим зв'язком

Прилади з зарядовим зв'язком (ПЗЗ) знаходять все більш широке застосування в науці, промисловості і сфері послуг в якості простих мініатюрних фото- і відеокамер. Принцип дії ПЗЗ ілюструється рисунком 1.2. Тонкий шар кремнію р-типу покритий ізолюючим шаром і матрицею електродів. Електроди з'єднані в групи по три. Коли до електрода прикладена позитивна напруга, з напівпровідника під ним виштовхуються дірки. Утворюється область, виснажена дірками (колодязь). Світло утворює електронно-діркові пари, електрони з яких спочатку накопичуються в колодязях. Шляхом періодичної зміни напруги на електродах електрони з колодязів виштовхуються до краю матриці, на сигнальний електрод. Кількість їх (струм електрода) змінюється в залежності від освітленості кожного колодязя.

Відеосигнал з матриці фоточутливих елементів зчитується послідовно (спочатку за стовпцями, потім по рядках). Величина заряду, який прийшов на сигнальний електрод, пропорційна освітленості відповідного колодязя. В цілому алгоритм зчитування ПЗЗ зрозумілий рисунок. 1.3.

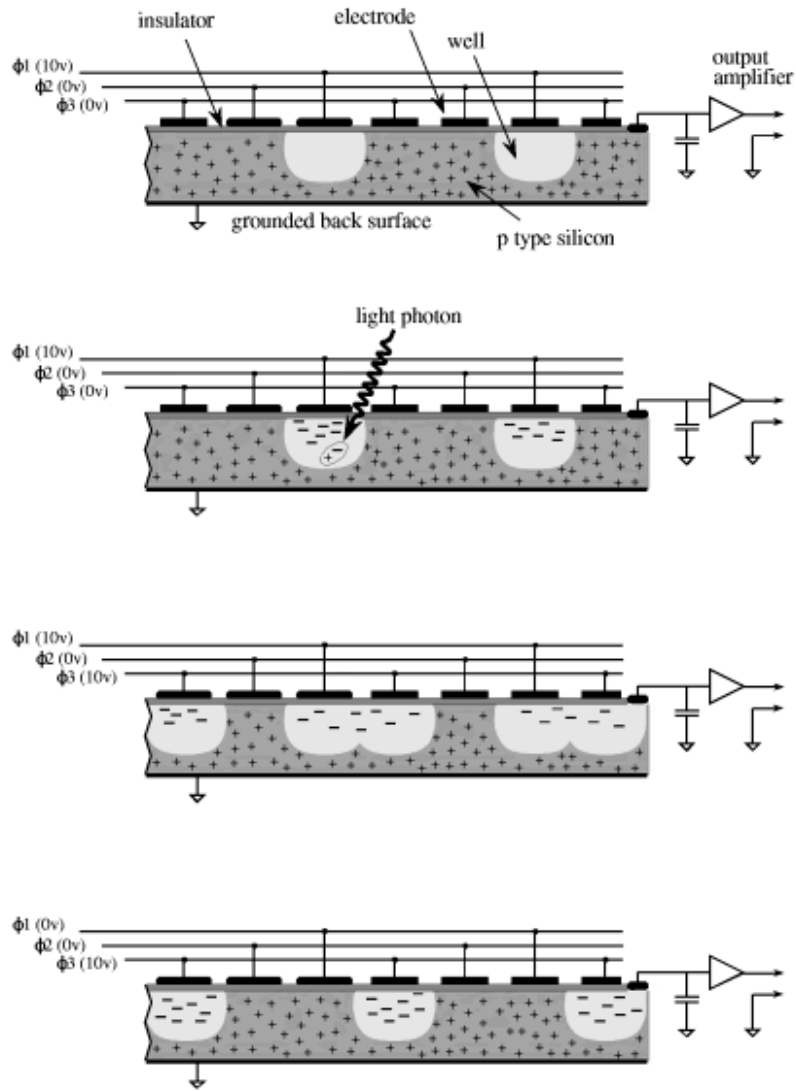


Рисунок 1.2 - Принцип роботи приладу з зарядовим зв'язком

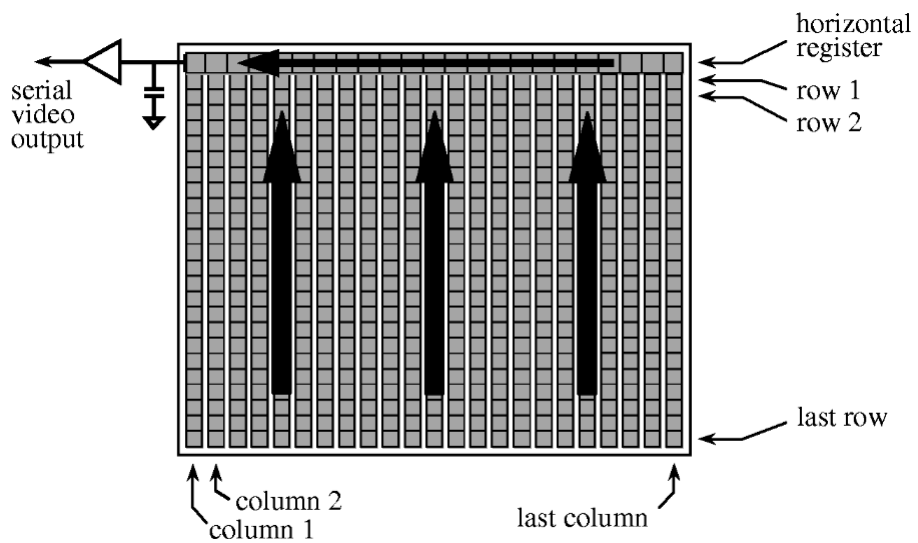


Рисунок 1.3 - Принцип зчитування відеосигналу

## 2 ЦИФРОВА ФІЛЬТРАЦІЯ ОДНО І ДВОВИМІРНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ДИСКРЕТНИХ ФУНКЦІЙ

Цифрові фільтри виконують ті ж функції, що і аналогові фільтри, і використовуються в тих випадках, коли аналоговий підхід ускладнений або взагалі непрактичний. Застосування цифрових фільтрів забезпечує ряд безсумнівних технічних переваг, таких як кращу відтворюваність, надійне функціонування, легку перебудову характеристик, здатність використання однієї апаратної реалізації в режимі поділу часу для фільтрації багатьох сигналів. Вже ці переваги в багатьох випадках визначають кращий вибір цифрової фільтрації замість аналогової.

Однак є й інші важливі переваги цифрової обробки зображень: можливість її апаратної реалізації на базі великих інтегральних схем (ВІС). Цифровий спектральний аналіз отримав помітний розвиток після ведення швидкого перетворення Фур'є (ШПФ). Алгоритми ШПФ знайшли широке застосування в різних наукових дисциплінах, забезпечуючи точність і роздільну здатність при спектральному аналізі, немислиму при аналоговій реалізації.

Розвиток цифрової обробки зображень можна проілюструвати на прикладах з біомедичних застосувань, сейсмічних і геофізичних досліджень, розпізнавання образів, радіолокаційного та ультразвукового виявлення, геологічних досліджень і досліджень відеоінформації, управління і передачі даних та ін. У багатьох з цих застосувань потрібні процесори для обробки сигналів з великою швидкістю або для обробки в реальному масштабі часу. У той же час ці процесори повинні бути економічно порівнянні з процесорами, широко вживаними на практиці.

У системах передачі дискретних повідомлень, коли кожне з них являє собою комбінацію кінцевого числа елементів деякого кінцевого обсягу, кожному елементу алфавіту ставиться у відповідність певний сигнал. Набір таких сигналів називають ансамблем дискретних сигналів, а саму систему передачі

інформації - цифровий. Щоб уникнути термінологічних непорозумінь зауважимо, що в даному випадку терміни «дискретний» і «цифровий» ніяк не пов'язані з дискретизацією оброблюваних вхідних процесів, що мають місце в пристроях дискретної обробки, оскільки розглянуті сигнали описуються функціями безперервного часу.

Незалежно від реалізації пристрою обробки алгоритм оптимального прийому сигналів передбачає, як правило, процедуру в тому чи іншому сенсі оптимальної лінійної фільтрації. При прийомі сигналів в радіолокаційних і радіонавігаційних системах і в системах передачі дискретних повідомлень цю процедуру можна виконати за допомогою пристроїв взаємно-кореляційної обробки, проте необхідність жорсткої синхронізації моментів включення генераторів опорних сигналів таких пристроїв з моментами приходу корисних сигналів змушує в багатьох прагнути до використання узгодженої фільтрації [8]. Необхідність реалізації узгоджених фільтрів виявляється особливо актуальною в зв'язку з великим інтересом, що проявляється в даний час до застосування складних шумоподібних сигналів, оскільки узгоджена фільтрація дозволяє істотно скоротити час затримання сигналу з невідомим моментом приходу і доплеровским зміщенням частоти [12]. Однак саме в цьому випадку побудова узгодженого фільтра представляє найбільш складне технічне завдання.

Аналогові погоджені фільтри, що використовують багатовідвідні неспотворюючі або дисперсійні лінії затримки, мають ряд істотних недоліків, пов'язаних з великим загасанням сигналу в лінії, нестабільність затримки, трудність здійснення мікромініатюризації [13]. Перспективніші фільтри, що створюються на основі використання поверхневих акустичних хвиль [14], проте порівняно мала допустима тривалості оброблюваних сигналів (десятки мікросекунд), а також складність перебудови параметрів таких фільтрів обмежує сферу їх застосування. Недоліки аналогових методів обробки проявляються і при реалізації таких традиційних процедур, як різні види частотної селекції (фільтри низьких або високих частот, смугові, режекторні фільтри і т.п.), коли нестабільність параметрів, необхідна прецизійність,

труднощі перебудови, складність мікромініатюризації роблять у багатьох випадках скрутним, а іноді і практично неможливим (наприклад, в області інфранизьких частотах) використання аналогової техніки. Значно більші можливості мають пристрої дискретної обробки безперервних вхідних процесів.

## 2.1 Дискретні сигнали

Розрізняють два види дискретної обробки, яка передбачає тимчасову дискретизацію безперервного вхідного сигналу: цифрову (ЦО), при якій використовується процедура аналого-цифрового перетворення (АЦП) безперервного вхідного сигналу, і дискретно-аналогову (ДАО), при якій використовується аналогова обробка вибіркового значення цього сигналу.

Термін «дискретно-аналогова обробка» вимагає деяких пояснень. У реальних пристроях ширина спектра адитивного сигналу, а в гіпотетичному випадку «білого» шуму ця смуга нескінченно велика. У цих умовах дискретна обробка взагалі має сенс лише при обмеженні смуги частот вхідного процесу, що здійснюється за допомогою спеціального вхідного аналогового фільтра. До цього слід додати, що в багатьох випадках виявляється необхідним відновлення результату обробки в безперервній формі, що також зазвичай реалізується за допомогою аналогових фільтрів. Таким чином, в реальних радіосистемах ми завжди маємо справу не з дискретною обробкою в «чистому» вигляді, а з обробкою, що поєднує процедури дискретизації безперервних сигналів і аналогової фільтрації. Спільний розгляд цих процедур в даному разі також підпадає під поняття «дискретно-аналогова обробка», хоча в такому випадку цей термін, звичайно, розуміється більш широко.

Як вже зазначалося, на відміну від ЦО, де вибіркові значення безперервного вхідного сигналу за допомогою АЦП перетворюються в кодові комбінації, при ДАО зберігаються всі градації вибіркового значень (в межах реалізованого динамічного діапазону) вхідного сигналу, а їх обробка

проводиться методами аналогової техніки (зважування, підсумовування і т.д.). При цьому слід зазначити, що ЦО, володіючи рядом незаперечних переваг, має і суттєві недоліки, пов'язані перш за все з обмеженим швидкодією і порівняно великим енергоспоживанням. ДАО, володіючи багатьма достоїнствами ЦО (стабільність часу затримки вибіркового значення безперервного вхідного сигналу, простота перебудови, широкі можливості зміни тимчасового масштабу і т. п.), зберігає високу швидкодію аналогових пристроїв.

Сама ідея ДАО не є новою. По суті, висловлювані в різний час пропозиції про використання ланцюжків ключів і конденсаторів для затримки вибіркового значення сигналу в імпульсних системах [5], зокрема стосовно до побудови імпульсних гребінчастих фільтрів [6], були першими спробами створення дискретно-аналогових ліній затримки.

У 60-х роках у зв'язку з великим інтересом до узгоджених фільтрів [7] і особливо до фільтрів, відповідним складним сигналам, були зроблені спроби їх створення на основі дискретно-аналогового способу обробки сигналів [8]. Однак відсутність відповідної елементної бази стало перешкодою широкому поширенню цих методів обробки.

Розроблені в США на основі МОП-транзисторів «пожежні ланцюжки» [9] і прилади з зарядовими зв'язками (ПЗС) [10] різко змінили ставлення до дискретно-аналогового методу обробки безперервних сигналів. До числа основних переваг ПЗС, що зумовили їх широке поширення, відносяться і простота і технологічність, найбільш висока в сучасній мікроелектроніці ступінь інтеграції (понад  $10^5$  елементів на одному кристалі - на порядок вище, ніж в БІС інших типів), найнижча споживана потужність (5 мкВт / біт в режимі передачі інформації - на порядок менше, ніж мінімальна потужність, споживана найбільш економічними МОП ІС [11], можливість регулювання часу затримки в широких межах при дуже високій швидкодії (до гігагерцевого діапазону по тактовій частоті) [12]. Високий динамічний діапазон (до 90 дБ), досягнутий в сучасних ПЗС, дозволяє використовувати їх практично в будь-яких умовах, з якими доводиться стикатися в сучасних радіосистемах. Діапазон застосувань

ПЗС в пристроях ДАО надзвичайно широкий - лінії затримки аналогових сигналів, мультиплексори, корелятори, узгоджені фільтри, різні пристрої на базі трансверсальних і рекурсивних фільтрів і т.д. [13].

Таким чином, з огляду на наявність нової елементної бази, перспективність якої сьогодні не викликає сумнівів, ДАО на ряду з ЦО можна розглядати як один із шляхів підвищення ефективності сучасних радіотехнічних систем.

Цікаво відзначити, що при спробах оптимізувати процедуру дискретної обробки часто в якості вихідних алгоритмів-протатипами розглядають алгоритми оптимальної аналогової фільтрації і знаходять відповідну їм дискретну апроксимацію [14]. У той же час не слід забувати, що саме по собі отримання згаданих алгоритмів-протатипами засноване на розгляді статистики багатовимірних виборок оброблюваних реалізацій безперервних випадкових процесів. Так при отриманні оптимальних алгоритмів виявлення і розрізнення сигналів, а також оцінки їх параметрів оптимальні стратегії прийняття рішень зводяться до обчислення відношення правдоподібності, що представляє собою відношення багатовимірних умовних щільностей ймовірностей аналізованого процесу [15]. Таким чином, з самого початку навіть при побудові алгоритмів аналогової обробки доводиться мати справу з вибірковими значеннями, рівними або значенням процесу в моменти тимчасової дискретизації, або коефіцієнтами розкладання процесу в будь-якому базисі, причому суть справи не змінюється при переході до функціоналом відносини правдоподібності, коли число розглянутих вибіркових значень спрямовується до нескінченності. Це призводить до необхідності вирішувати задачу побудови оптимальних алгоритмів дискретної обробки без проміжного етапу - розгляду алгоритмів аналогової обробки.

## 2.2 Цифрові фільтри

В даний час широко використовуються методи обробки радіотехнічних сигналів за допомогою мікроелектронних обчислювальних пристроїв і систем.

Розглянемо найбільш вивчений і впроваджений клас систем дискретної обробки сигналів - так звані лінійні стаціонарні цифрові фільтри. Виконуючи, подібно аналоговим ланцюгам, операцію частотної фільтрації, цифрові фільтри мають ряд істотних переваг. Сюди відносяться, наприклад, висока стабільність параметрів, можливість отримувати найрізноманітніші форми АЧХ і ФЧХ. Цифрові фільтри не вимагають налаштування і легко реалізуються на ЕОМ програмними методами. На рисунку 2.1 приведена основна структурна схема цифрової обробки сигналів.

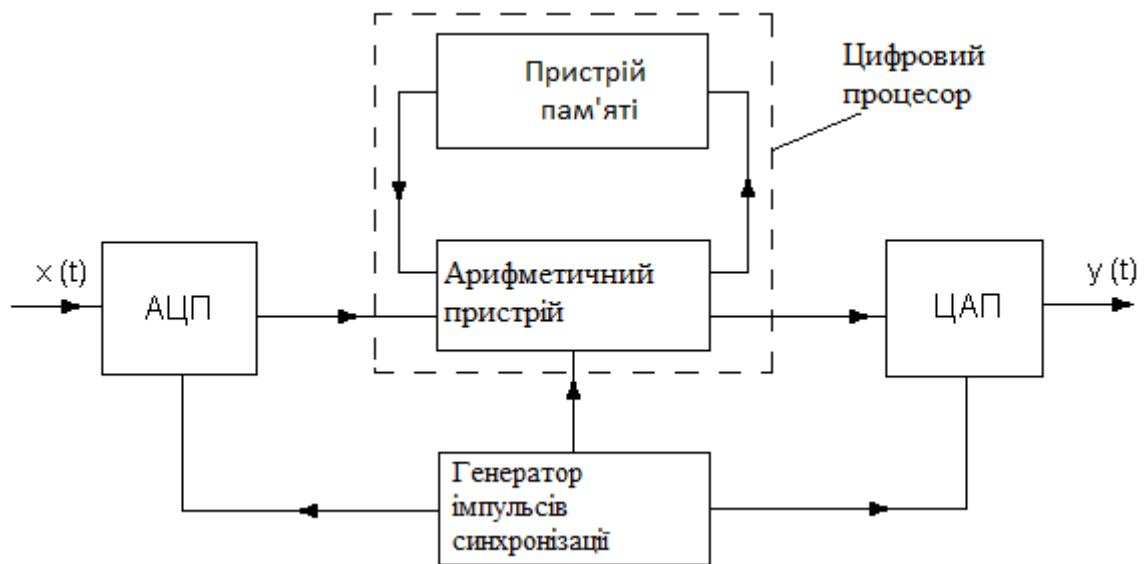


Рисунок 2.1 - Структурна схема цифрової обробки сигналів

Безперервний вхідний сигнал  $x(t)$  надходить в аналогово-цифровий перетворювач, керований синхронізуючими імпульсами від генератора, що задає частоту дискретизації. У момент подачі що синхронізує імпульс на виході АЦП виникає сигнал, що відображає результат вимірювання миттєвого значення вхідного коливання у вигляді двійкового числа з фіксованою кількістю розрядів. Залежно від особливості побудови пристрою цього числа відповідає або послідовність коротких імпульсів (передача в послідовному коді), або

сукупність рівнів напруги на сигнальних шинах окремих розрядів (передача в паралельному коді). Перетворений таким чином сигнал надходить в основний блок пристрою, так званий цифровий процесор, що складається з арифметичного пристрою та пристрою пам'яті. Арифметичний пристрій виконує над цифрами ряд операцій, таких як множення, додавання і зрушення в часі на задане число інтервалів дискретизації. У пристрої пам'яті може зберігатися певна кількість попередніх відліків вхідного і вихідного сигналів, які необхідні для виконання операцій обробки.

Цифровий процесор перетворить числа які в нього надходять з відповідно до заданим алгоритмом фільтрації і створює на виході послідовність двійкових чисел, що представляють вхідний сигнал. Якщо в подальшому необхідно мати інформацію в аналоговій формі, то використовується цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП). Однак цей пристрій може бути відсутній, якщо сигнали піддаються тільки цифровим перетворенням.

Основний технічний показник ЦФ - швидкодія - залежить як від швидкості протікання перехідних процесів з мікроелектронних компонентів, так і від складності алгоритму фільтрації. Якщо на початку 70-х років граничні частоти сигналів, що обробляються за допомогою ЦФ, становили кілька кілогерц, то досягнення сучасної мікроелектроніки безперервно розширюють цей діапазон. Цифрова фільтрація сигналів отримала новий стимул розвитку з появою відносно недорогих і надійних мікропроцесорів, а також пристроїв пам'яті, виконаних за технологією БІС.

### 2.3 Квантування сигналів в цифрових фільтрах

Специфіка будь-якого цифрового пристрою - уявлення сигналів у вигляді послідовності чисел с обмеженою розрядністю. Тому миттєве значення сигналу дискретизується за рівнем таким чином, що інтервалом дискретизації (мінімальної різниці між двома сусідніми рівнями) служить одиниця меншого двійкового розряду.

Точне значення відліку сигналу в двійковій формі має вигляд

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n 2^{-n}. \quad (2.1)$$

де  $\alpha_n = 0$  або  $1$ .

При обмеженні довжина числа  $x$  деякою кількістю розділів  $N$  замість точного значення виходів його округлення (машинне) уявлення

$$x = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n 2^{-n} + \beta_N 2^{-N}. \quad (2.2)$$

причому коефіцієнт  $\beta_N$  дорівнює або  $\alpha_n$ , або  $\alpha_n + 1$  в залежності від того, нуль або одиниця міститься в  $(N + 1)$ -м розряді.

У радіотехніці дискретні сигнали, рівні яких можуть брати лише рахункову множину значень, називаються квантовими сигналами. Квантування сигналів призводить до специфічної похибки при обробці, яка отримала назву шуму квантування. Шлях зниження цієї похибки - використання двійкових чисел з великою кількістю розрядів. Але при цьому неминуче знижується швидкодія ЦФ через збільшення часу виконання операцій над багаторозрядними числами. Тому на практиці в мікропроцесорних системах для цифрової обробки сигналів і дискретного управління застосовують виконавчі числа з кількістю розрядів від 4 до 16.

## 2.4 Алгоритм лінійної цифрової фільтрації

Математична теорія цифрових фільтрів переносить на випадок дискретних сигналів всі основні положення теорії лінійних систем, що перетворюють безперервні сигнали. Це стосується як одно так і двовимірних вихідних послідовностей.

Як відомо, лінійна стаціонарна система перетворює безперервний вхідний сигнал  $x(t)$  таким чином, що на її виході виникає сумнів  $y(t)$ , що дорівнює згортку функції  $x(t)$  і імпульсної характеристики  $h(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (2.3)$$

Лінійний цифровий фільтр, за визначенням, є дискретна система (фізичний пристрій або програма для ЕОМ), яка перетворює послідовність  $\{x_k\}$  числових відліків вхідного сигналу в послідовність  $\{y_k\}$  відліків вихідного сигналу

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \Rightarrow (y_0, y_1, y_2, \dots). \quad (2.4)$$

або скорочено

$$\{x_k\} \Rightarrow \{y_k\}.$$

Лінійний цифровий фільтр має ту властивість, що сума будь-якого числа вхідних сигналів, помножених на довільні коефіцієнти, перетворюються в суму його відгуків на окремі складові, тобто з відповідностей

$$\{x_k^{(1)}\} \Rightarrow \{y_k^{(1)}\}, \dots, \{x_k^{(N)}\} \Rightarrow \{y_k^{(N)}\}$$

впливає, що

$$\alpha_1 \{x_k^{(1)}\} + \dots + \alpha_N \{x_k^{(N)}\} \Rightarrow \{\alpha_1 y_k^{(1)} + \dots + \alpha_N y_k^{(N)}\}. \quad (2.5)$$

при будь-яких коефіцієнтах  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ .

Для того щоб узагальнити формулу (2.3) на випадок дискретних сигналів, вводять поняття імпульсної характеристики ЦФ. За визначенням, вона являє

собою дискретний сигнал  $\{hk\}$ , який є реакцією ЦФ на «одичний імпульс» (1, 0, 0, 0, ...)

$$(1, 0, 0, 0, \dots) \Rightarrow (h_0, h_1, h_2, h_3, \dots). \quad (2.6)$$

Лінійний ЦФ стаціонарний, якщо при зсуві вхідного одичного імпульсу на будь-яке число інтервалів дискретизації імпульсна характеристика зміщується таким же чином, не змінюючись за формою. наприклад

$$\begin{aligned} (0, 1, 0, 0, \dots) &\Rightarrow (0, h_0, h_1, h_2, \dots); \\ (0, 0, 1, 0, \dots) &\Rightarrow (0, 0, h_0, h_1, \dots); \\ (0, 0, 0, 1, \dots) &\Rightarrow (0, 0, 0, h_0, \dots). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Розглянемо, яким чином з властивостей лінійності і стаціонарності впливає найбільш загальний алгоритм лінійної цифрової фільтрації. Нехай  $\{xk\} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$  - деякий сигнал на вході ЦФ з відомою імпульсною характеристикою. Використовуючи співвідношення (2.7), можна записати  $m$ -й відлік вихідного сигналу  $\{yk\}$

$$y_m = x_0 h_m + x_1 h_{m-1} + \dots + x_m h_0 = \sum_{k=0}^m x_k h_{m-k}. \quad (2.8)$$

Формула (2.8), яка відіграє провідну роль в теорії лінійної цифрової фільтрації, показує, що вихідна послідовність є дискретна згортка вхідного сигналу і імпульсної характеристики фільтра. Сенс цієї формули простий, в момент кожного відліку в ЦФ проводить операцію зваженого підсумовування всіх попередніх значень вхідного сигналу, причому роль послідовності вагових коефіцієнтів грають відліки імпульсної характеристики. Іншими словами, ЦФ володіє деякою «пам'яттю» по відношенню до минулих вхідних впливів.

Практичний інтерес представляють лише фізично реалізовані ЦФ, імпульсна характеристика яка не може стати відмінною від нуля в відлікових точках, що передуючих моментах подачі вхідного імпульсу. Тому для фізично реалізованих фільтрів коефіцієнти  $h_{-1}$ ,  $h_{-2}$ , ... звертаються в нуль і підсумовування в (2.8) можна поширити на всі позитивні значення індексу  $k$

$$y_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k h_{m-k}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Таким чином, з розглянутого матеріалу випливає, що оптимальною для дипломної роботи є цифрова фільтрація зображень в частотній області з використанням алгоритму віконного зважування.

### 3 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДА ПРОНІ ДЛЯ ОБРОБКИ БІОМЕДИЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

У атестаційній роботі для обробки моделювання сигналів використовується програмне забезпечення, написане на алгоритмічній мові високого рівня Fortran-90 [16]. Для налагодження програм використовувався персональний комп'ютер IBM / PC.

Під час користування мови програмування Fortran не випадково. Ця мова вже тривалий час використовується для програмування різних чисельних завдань. Тому методика програмування на Fortran добре вивчена і налагоджена, що дозволяє значно скоротити процес складання і налагодження програм. Головним фактором, який сприяв вибору цієї мови, стало те, що ця мова дозволяє працювати з комплексними числами, а також має ряд функцій, що дозволяють робити математичні дії над, як вже вказано комплексними числами.

Архітектура мови Fortran дозволяє створювати розгалужену систему підпрограм, оформлених як окремі файли. Що дозволяє розбивати основну вирішувану задачу на окремі підзадачі і вирішувати їх незалежними частинами. Така організація має ряд переваг: по-перше, в процесі налагодження набагато легше і простіше працювати з невеликою програмою, так як невеликі програми найбільш частіше сприймаються користувачем. По-друге, можливе налагодження і запуск однієї підпрограми, не зачіпаючи інші програми, що дає можливість організації тестування результатів виконання програми на різних питаннях її рішення. По-третє, кожне завдання можна вирішити, використовуючи різні методи, тому для вирішення однієї задачі можливе складання декількох програм. При налагодженні або тестуванні, використовуючи архітектуру мови Fortran, можна швидко змінювати склад пакета та його структуру.

У попередніх розділах згадувалося, що рішення поставленого завдання проводиться в комплексній формі. Як відомо, число в комплексній формі займає найбільшу кількість осередків пам'яті машини. Якщо взяти до уваги те, що для

роботи моделі потрібен великий обсяг даних, а в самому процесі моделювання виникає ще більша кількість даних, то стає зрозумілим, що для рішення такої задачі можливе лише на машині з великим об'ємом пам'яті. Отже обсяг пам'яті є основним критерієм при виборі ЕОМ. Крім того, машина повинна мати дуже велику швидкодію, так як дискретні двовимірні перетворення Фур'є вимагають великого числа математичних дій. Циклічність даного методу вимагає великих тимчасових витрат. ЕОМ з об'ємом оперативної пам'яті 512 Мбайт і процесором Pentium III повністю задовольняє цим вимогам.

На жаль, слід зазначити, що стандартна мова Fortran має досить істотний недолік - повна відсутність графічних засобів. Для усунення цього недоліка розробники трансляторів, зокрема, фірма Microsoft, розширили стандарт мови шляхом додавання графічних функцій (примітивів) з бібліотеки мови C ++. В результаті з'явилася можливість використовувати апаратні графічні засоби персональної ЕОМ з IBM-сумісної архітектурою, але мова перестала бути машинно-незалежним. З двох можливостей (або графіка, або машинна незалежність) в даній атестаційній роботі була обрана графіка, так як вищевказані ЕОМ в даний час найбільш поширені, а графічна форма виведення інформації істотно покращує її сприйняття.

### 3.1 Вибір математичного методу розв'язання задачі

Як впливає з попередніх розділів, з математичної точки зору алгоритм моделювання обробки сигналів є досить простим і складається з трьох основних дій. Це, по-перше, пряме двовимірне дискретне перетворення Фур'є вихідної функції  $F(m_x, m_y)$

$$C(n_x, n_y) = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{m_y=-N_y/2+1}^{+N_y/2} \sum_{m_x=-N_x/2+1}^{+N_x/2} F(m_x, m_y) \times \exp\left(-\frac{2\pi i n_x m_x}{N_x}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i n_y m_y}{N_y}\right), \quad (3.1)$$

де  $C(n_x, n_y)$  – одержувані Фур'є-гармоніки зображення;

$N_x$  – розмір зображення по осі  $x$  в пікселях;

$N_y$  – розмір зображення по осі  $y$  в пікселях.

Далі слід фільтрація отриманих гармонік  $C(n_x, n_y)$  низькочастотним, високочастотним або смуговим фільтром в обох або одному напрямках. Відфільтровані гармоніки піддаються зворотному двовимірному дискретному перетворенню Фур'є (синтезу)

$$F(n_x, n_y) = \sum_{m_y=-N_y/2+1}^{+N_y/2} \sum_{m_x=-N_x/2+1}^{+N_x/2} C(m_x, m_y) \times \exp\left(\frac{2\pi i n_x m_x}{N_x}\right) \exp\left(\frac{2\pi i n_y m_y}{N_y}\right). \quad (3.2)$$

На екрані монітора відображається отримане перетворене зображення.

Незважаючи на гадану простоту, також є ряд проблем, які необхідно подолати в ході реалізації методики поліпшення зображень. Однією з них є вибір алгоритму фільтрації гармонік сигналу. Існує безліч методів фільтрації [17], [18]. Найпростішим є віконне зважування з використанням відповідного частотного вікна [19]. Серед усіх відомих частотних вікон найбільш простими є прямокутне і Гауссове [20]. Перше полягає в зануленні всіх гармонік, частоти яких в одному і іншому напрямках виходять за межі вікна, коли гармоніки, частоти яких лежать в межах вікна, залишаються без змін. Схематично одне з таких вікон (низькочастотне) показано на рисунку 3.1 (а).



не стрибком, а поступово [рисунок. 3.1 (б)], в результаті чого зменшуються різні небажані крайові ефекти [20].

Недоліком віконного зважування є те, що реалізуються за його допомогою фільтри не є каузальних [19]. Це означає, що вони не задовольняють принципу причинності, тобто на обробленому зображенні ефекти, супутні зміни градації яскравості, можуть з'являтися раніше (вище або лівіше) самої градації. Прямокутний є найбільш відомим некаузальним фільтром [18]. Це пов'язано з тим, що імпульсна характеристика даного фільтра є функцією виду  $\sin(x) / x$ , яка, має «хвости» в обидві сторони від максимуму.

Некаузальність не є істотним недоліком при сучасній цифровій обробці сигналів, оскільки в цьому випадку весь кадр накопичується попередньо в пам'яті і принцип причинності ролі не грає, тому що всі зображення вже відомо. Вона складає певні незручності при моделюванні роботи телевізійних приймачів, наприклад, дослідженні спотворень зображення при неякісному налаштування відеопідсилювача. Тому серед шляхів подальшого удосконалення даної роботи треба зазначити ведення в її склад каузальних алгоритмів фільтрації сигналів.

### 3.2 Алгоритмічна реалізація обробки сигналів

Як зазначалося вище, завдання моделювання обробки сигналів в атестаційній роботі для зручності її рішення розбита на невеликі функціональні підзадачі. Рішення кожної підзадачі здійснюється за допомогою окремої підпрограми. І хоча кожна підпрограма вирішує свою, локальну задачу, на певному етапі сукупність рішень всіх підзадач дає нам рішення основного завдання. Тому всі ці окремі програмні одиниці можна об'єднати в єдиний програмний пакет.

До складу даного пакету входить основна програма IMAGE і дві підпрограми: VIDEOMOD для установки режиму відео дисплея і форматування екрану і PLOT для побудови розподілу яскравості складових в обробленому

зображенні. Крім того, спільно з цим програмним пакетом може використовуватися програма Microcal Origin фірми Microcal Software Inc. Призначенням її є побудова одновимірних графічних залежностей розподілу яскравості в обраних перетинах зображення на основі двовимірних вибірок, отриманих в результаті моделювання. Розглянемо алгоритм функціонування перерахованих програмних компонентів окремо (рисунок. 3.2 і Додаток Б).

3.2.1 Основна програма. На початку основної програми IMAGE визначаються параметри моделі (розмір і вид зображення, тип і ширина фільтра і т.п.) і задаються значення математичних констант. Проводиться установка режиму форматування екрану входом SETVMOD підпрограми VIDEOMOD і відео.

Наступним етапом є формування оброблюваних сигналів. Для цього використовуються різні методи, наприклад, виділення контурів об'єктів шляхом штучного підвищення амплітуд вищих гармонік і т.д.

В атестаційній роботі використовуються більш прості одновимірні сигнали, зокрема, кардіограми серцевої діяльності.

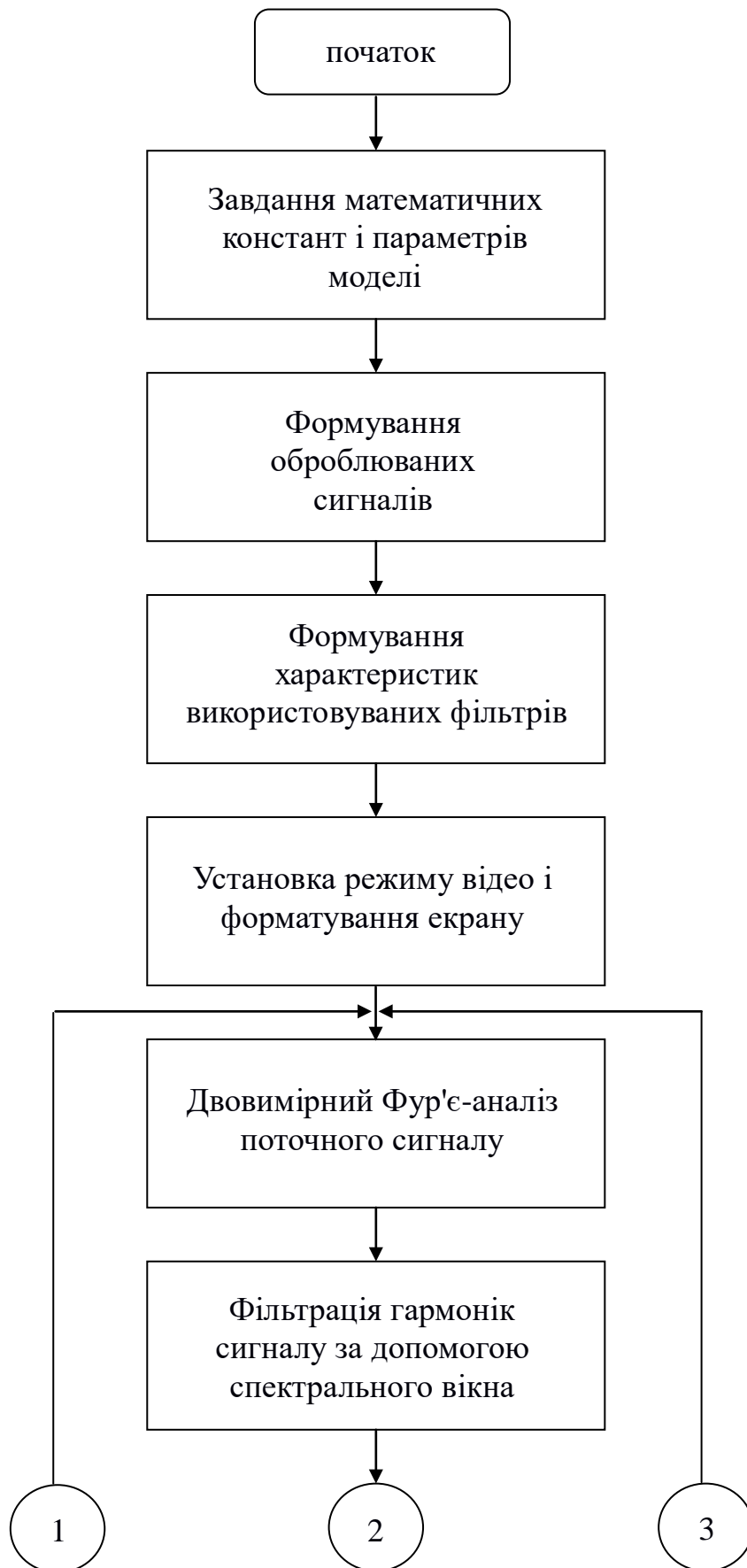
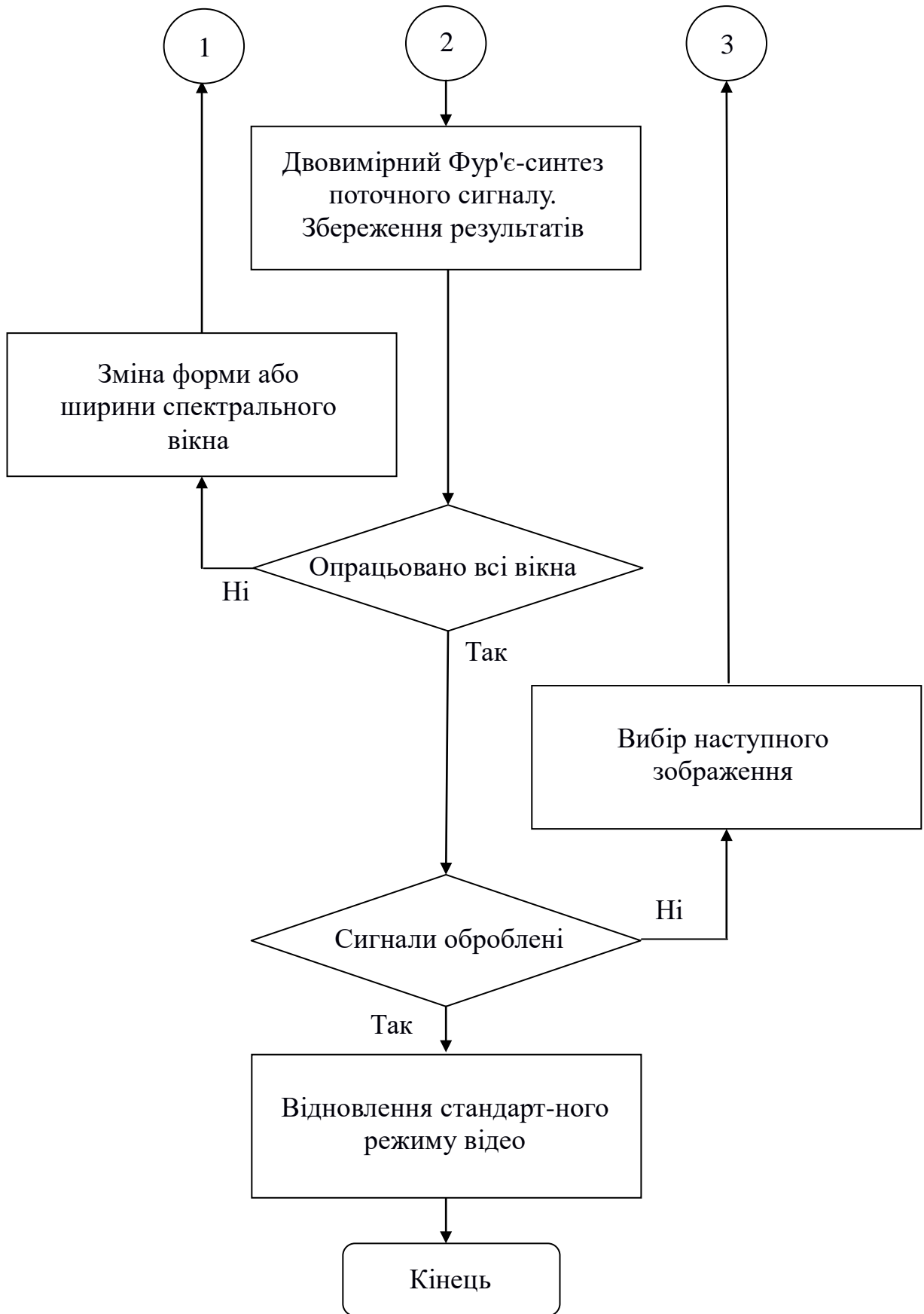


Рисунок 3.2 – Алгоритм обробки сигналів



Продовження Рисунка 3.2 – Алгоритм обробки сигналів

### 3.3 Методи Проні

З прикладної точки зору більш важливим є не спектральний, а гармонічний аналіз сигналів. Справді, частотна залежність спектральної щільності потужності не дозволяє визначити амплітуди і фази окремих гармонійних складових сигналу, а також реконструювати сигнал виходячи з його спектральної щільності потужності. Хоча в літературі описані алгоритми, що дозволяють відновити функцію по її спектральній щільності амплітуди на основі декількох вибірок, їх використання в даному випадку навряд чи виправдано.

Дискретне перетворення Фур'є є найбільш поширеним класичним методом гармонійного аналізу. Особливості ДПФ, що впливають на якість виконуваного з його допомогою спектрального оцінювання, в тій же мірі позначаються і при гармонійному розкладанні. Використання ДПФ для гармонійного аналізу покладено в основу методу фундаментальної частоти, недоліки якого добре відомі. Для гармонійного розкладання дискретних функцій, які не ґрунтуються на припущенні про періодичність функції за межами тимчасової вибірки виникає проблема вибору альтернативних алгоритмів. До таких алгоритмів відносяться, зокрема, методи Проні.

Методи Проні є способом гармонійного аналізу функцій, заснованим, подібно вищеописаним авторегресійним алгоритмам, на параметричній моделі процесу. Однак від алгоритмів спектрального оцінювання вони відрізняються тим, що ця модель не вероятностна, а детермінована. Подібно Фур'є-аналізу, методи Проні полягають в заміні вихідної функції  $f(t)$  тригонометричним поліномом виду:

$$f(t) = \sum_{m=1}^M F_m e^{i\omega_m t} . \quad (3.4)$$

або, в дискретній формі, з використанням z- перетворення:

$$f_l = \sum_{m=1}^M F_m z_m^l, \quad (3.5)$$

де  $F_m$  – комплексна амплітуда  $m$ - й гармонійної складової;

$\omega_m$  – її комплексна кругова частота (уявна частина є коефіцієнтом загасання).

$z_m = \exp(i\omega_m \Delta t)$  – z-перетворення вихідної тимчасової послідовності.

Однак, на відміну від ряду Фур'є, частоти гармонік тут заздалегідь не відомі і знаходяться в процесі аналізу. Можливі два випадки:

- кількість  $M$  комплексних експонент в ряді (3.4) або (3.5) дорівнює половині кількості відліків комплексної функції  $L$  (довжини вибірки). Загальне число невідомих дорівнює кількості вихідних даних і має місце гармонійна інтерполяція функції, оскільки кожен член ряду характеризується двома невідомими параметрами (комплексна частота і комплексна амплітуда). Зауважимо, що для інтерполяції поруч Фур'є необхідно вдвічі менше відліків, так як частоти компонент заздалегідь задані;

- кількість членів ряду менше половини довжини вибірки. В даному варіанті можлива тільки гармонійна апроксимація вихідної функції, яка виконується методом найменших квадратів. Замість самої функції  $f(t)$  в лівій частині формули (3.2) при цьому з'являється її оцінка (estimation)  $f_e(t)$ :

$$f_l^e = \sum_{m=1}^M F_m z_m^l. \quad (3.6)$$

Алгоритм інтерполяції функції поруч (35) або вихідний метод Проні полягає у вирішенні лінійного матричного рівняння для коефіцієнтів характеристичного полінома з подальшою факторизацією цього полінома, в результаті чого знаходяться комплексні частоти  $m$ . Потім на основі отриманих базисних частот вирішується матричне рівняння для комплексних амплітуд  $F_m$  (також лінійне). Процедура інтерполяції завдяки своїй поетапності, таким чином, має досить простий вигляд.

На противагу гармонійної інтерполяції, спроба апроксимації тимчасової залежності поруч (3.6) приводить до нелінійних рівнянь, безпосереднє вирішення яких в даний час неможливо. В якості альтернативних заходів використовується змішаний субоптимальний підхід (так званий метод найменших квадратів Проні [14]). На першому етапі тимчасова функція піддається спектральному аналізу, наприклад, одним з авторегресійних методів. З отриманих коефіцієнтів лінійного передбачення формується поліном, який факторізується потім. Знайдені коріння  $zm$  визначають комплексні частоти  $m$  передбачуваних компонентів в гармонійному розкладанні оцінки функції (3.6). Не складає труднощів подальший розрахунок комплексних амплітуд  $F_m$  цих гармонік, так як відповідне матричне рівняння є вже лінійним.

Для гармонійного аналізу електромагнітних полів незважаючи на подібну складність слід по можливості використовувати саме метод найменших квадратів Проні. Справа в тому, що внаслідок властивої методу частинок зашумленості ВЧ-сигналу інтерполяція призводить до значних тимчасовим флуктуацій обчислених гармонійних параметрів. На точності моделювання це негативно позначається. Лише для майже монохроматичних сигналів з відношенням сигнал/шум вище 100 ... 120 дБ (наприклад, що генеруються магнетрон генераторами з високочастотними резонансними структурами) може бути доцільним застосування гармонійної інтерполяції, більш стійкою до поганої обумовленості вихідних даних.

Вибір не настільки очевидний при гармонійному розкладанні збудливого струму в методі комплексних амплітуд. Оскільки дана процедура є не засобом

аналізу результатів моделювання, а невід'ємною складовою частиною моделює алгоритму, необхідно забезпечити її надійне функціонування при довільних значеннях вихідних функцій. Найбільший відсоток аварійних завершень методу найменших квадратів Проні, як показує практика, відбувається на етапі спектрального аналізу вихідної вибірки за допомогою авторегрессионної моделі. Використання для цієї мети гармонійної інтерполяції суттєво підвищує надійність всього алгоритму. Розумним компромісом тут може бути описаний далі змішаний підхід, що поєднує гармонійну інтерполяцію і апроксимацію на різних етапах декомпозиції.

Існує по дві модифікації кожного з методів Проні, одна з яких незгасаючі, тобто чисто гармонійні функції, друга - використовує в якості базису розкладання затухаючі комплексні експоненти. З'ясуємо, яка з них більш прийнятна для використання в НВЧ-електроніці. Протягом перехідного процесу, коли амплітуди сигналів змінюються в часі, спектр сигналу краще апроксимується затухаючими або наростаючими (з негативними коефіцієнтами загасання) експонентами. Після досягнення стаціонарного режиму більш природною є модель незатухаючих експонент. Формально можна очікувати, що перша модифікація методів Проні повинна охоплювати обидва випадки, і в стаціонарному стані обчислені коефіцієнти загасання будуть прагнути до нуля. Однак з результатів, отриманих в роботі [14], бачимо, що при наявності адитивного шуму цього не відбувається, тобто для близько розташованих гармонійних складових розкладання по комплексним експонентам з урахуванням загасання виявляється істотно менш точним, ніж без урахування такого.

З практичної точки зору пріоритет слід віддати коректності аналізу сигналу в стаціонарному режимі, тому доцільним є розкладання по незгасаючим експонентам. Для підвищення точності аналізу вихідного спектра необхідно використовувати регулярно оновлювану вибірку даних мінімальної довжини при перехідному процесі. Це, зрозуміло, вступає в протиріччя з роздільною здатністю методу, однак занадто високий частотний дозвіл на

фронтах радіо імпульсів немає сенсу, так, як ширина спектральних складових сигналу тут порівняно велика. Дійсно, при збільшенні довжини часовій послідовності друга модифікація методу Проні апроксимує наростаючу (загасаючу) синусоїду групою з декількох близько розташованих гармонік. Якщо істотна точна форма спектра при перехідному процесі.

Розглянемо практичну реалізацію кожного з двох вищевказаних методів Проні (гармонійної апроксимації і гармонійної інтерполяції) більш детально.

### 3.4 Метод гармонійної інтерполяції

Алгоритм вихідного методу Проні має досить просту структуру, що складається з рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів характеристичного полінома, факторизації цього полінома і повторного рішення аналогічної системи для комплексних амплітуд. При розкладанні по загасаючим експонентам рівняння для коефіцієнтів характеристичного полінома

$$z^M + \sum_{m=1}^M a_m z^{M-m} \quad (3.7)$$

мають вигляд:

$$\sum_{m=1}^M a_m f_{l-m} = -f_l, \quad (3.8)$$

де порядок моделі  $M = L/2$ , а  $l$  змінюється від  $L/2$  до  $L-1$  включно. При розкладанні по незатухаючим експонентам характеристичний поліном записується як:

$$\sum_{m=1}^{M/2} a_m z^{M/2+m} + z^{M/2} + \sum_{m=1}^{M/2} a_m^* z^{M/2-m}, \quad (3.9)$$

а рівняння для його коефіцієнтів – у вигляді:

$$\sum_{m=1}^{M/2} a_m f_{l+m} + \sum_{m=1}^{M/2} a_m^* f_{l-m} = -f_l, \quad (3.10)$$

де  $l$  змінюється від  $L/3$  до  $2L/3-1$  включно. В даному випадку порядок моделі  $M$  дорівнює  $2L/3$ .

Оскільки в роботі [14] алгоритм гармонійної інтерполяції описаний лише в загальних рисах, а відповідна програма взагалі не приведена, заповнимо цю прогалину. При цьому обмежимося розкладанням по незгасаючим експонентам, як більш важливим для практичних цілей. Довжину вибірки  $L/3$  припускаємо кратної трьом. Функція  $f$  може бути речовій або комплексною. Для обох випадків необхідно замінити задану вибірку послідовністю з  $M$  комплексних експонент, де  $M$ , як зазначено вище, а також  $2L/3$ .

$$[\mathbf{z}] \mathbf{F} = \mathbf{f}, \quad (3.11)$$

де  $[\mathbf{z}]$  – квадратна ( $M \times M$ ) матриця значень  $z_{ml}$ , що має вигляд:

$$[\mathbf{z}] = \begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_M^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_M^1 \\ & & \dots & \\ z_1^{M-1} & z_2^{M-1} & \dots & z_M^{M-1} \end{pmatrix}; \quad (3.12)$$

де  $\mathbf{F}$  та  $\mathbf{f}$  – вектори значень  $F_m$  і  $f_l$  (тут  $l = 0 \dots M-1$ ).

Для речової функції  $f$  рівняння (3.2) і (3.8) не змінюються, але безлічі  $z_m$  і  $F_m$  можуть бути розділені на дві підмножини з  $M/2$  членів, кожна з яких є комплексним сполученням іншого. Щоб забезпечити уніфікацію алгоритму,

бажано розглядати спектр речової функції як двосторонній (тобто з позитивними і негативними частотами). Тому алгоритм гармонійної інтерполяції далі буде описаний тільки для комплексної вибірки, так як модифікація його для речової послідовності очевидна.

Першою стадією алгоритму є знаходження коефіцієнтів характеристичного полінома. Цей поліном з  $M$  нулями  $z_1 \dots z_M$  був записаний як:

$$\prod_{m=1}^M (z - z_m) = \sum_{m=0}^M a_m z^{M-m}, \quad (3.13)$$

де  $a_m$  - коефіцієнти многочлена (комплексні або речові, в залежності від типу функції  $f$ ) і  $a_0 = 1$ .

Використовуючи процедуру, застосовану для модифікованого методу найменших квадратів Проні, треба записати систему з  $M/2$  лінійних різницевих рівнянь для  $M$  коефіцієнтів  $a_1 \dots a_M$ :

$$\sum_{m=1}^{M/2} (a_{M/2-m} f_{l+m} + a_{M/2+m} f_{l-m}) = -a_{M/2} f_l, \quad (3.14)$$

де  $l = M/2 \dots L-M/2-1$ .

Додатковою умовою є комплексна спряженість коефіцієнтів:

$$a_m = a_M \cdot a_{M-m}^*, \quad (3.15)$$

це дозволяє в два рази зменшити кількість невідомих змінних.

Використовуючи нормалізовані коефіцієнти  $w_m = a_{M/2-m}/a_{M/2}$ , наводимо характеристичний поліном (3.10) до записаного раніше загального вигляду (3.6):

$$\sum_{m=1}^{M/2} w_m z^{M/2+m} + z^{M/2} + \sum_{m=1}^{M/2} w_m^* z^{M/2-m} . \quad (3.16)$$

(нормалізація тут не береться до уваги, оскільки істотні коріння цього полінома, а не його значення). При виведенні виразу (3.13) враховано, що відповідно за умовою (3.12)  $a_{M/2+m}/a_{M/2} = (a_{M/2-m}/a_{M/2})^*$ .

Система  $M/2$  лінійних різницевих рівнянь для  $M/2$  нормалізованих коефіцієнтів  $w_1 \dots w_{M/2}$  має вигляд, аналогічний (3.7):

$$\sum_{m=1}^{M/2} (w_m f_{l+m} + w_m^* f_{l-m}) = -f_l , \quad (3.17)$$

де  $l = M/2 \dots L - M/2 - 1$ .

Щоб перетворити (3.14) до придатної для вирішення форми, коефіцієнти  $w$  та  $f$  повинні бути явно виражені через їх реальні і уявні частини, тобто  $w = w_r + iw_i$ ;  $f = f_r + if_i$ . В результаті маємо:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{M/2} (f_{l+m}^r + f_{l-m}^r) w_m^r + \sum_{m=1}^{M/2} (-f_{l+m}^i + f_{l-m}^i) w_m^i = -f_l^r ; \\ \sum_{m=1}^{M/2} (f_{l+m}^i + f_{l-m}^i) w_m^r + \sum_{m=1}^{M/2} (f_{l+m}^r - f_{l-m}^r) w_m^i = -f_l^i . \end{cases} \quad (3.18)$$

Для вирішення системи (3.15) може бути рекомендований алгоритм гауссова виключення з частковим вибором ведучого елемента. У ітераційне уточнення, як правило, немає необхідності, оскільки вхідні функція зашумлена внаслідок флуктуацій моделі частинок.

Другим етапом алгоритму Проні, як зазначалося вище, є факторизація характеристичного полінома (3.10) з перебуванням всіх його нулів  $z_1 \dots z_M$ .

Типова довжина вибірки збудливого струму для нестационарних і спектральних моделей НВЧ-приладів дорівнює 63 ... 255 (тобто найближче

менше, ніж 26...28 значення, кратне 3). Тому порядок моделі  $M$  звичайно дорівнює 43...170. На жаль, оригінальні алгоритми Дженкінса-Траубе і Дженкінса працюють задовільно тільки з поліномами, ступінь яких не перевищує 50 і 100 відповідно.

Третім етапом методу гармонійної інтерполяції є рішення системи лінійних рівнянь (3.8). При розкладанні по незатухаючим комплексним експонентам знайдені нулі  $z_1 \dots z_M$  доцільно попередньо нормалізувати до одиничного модулю і потім відсортувати за частотою з видаленням кратних. Тому, порядок моделі  $M$  може бути зменшений. Гауссово виключення з частковим вибором ведучого елемента і без ітераційного уточнення тобто метод вирішення системи (3.8) - такий же, як на першому етапі.

Істотним недоліком вихідного алгоритму гармонійної інтерполяції є неповне використання аналізованої послідовності на його заключному етапі. При вирішенні системи (3.8) використовується не більше двох третин вихідної вибірки. Це виражається в підвищеній неточності оцінки амплітуди для зашумлених функцій. Прийнятним рішенням може бути заміна гармонійної інтерполяції  $f_l$  системою (3.8) на її гармонійну апроксимацію по всьому  $L$  точок вихідної послідовності:

$$([\mathbf{z}]^H [\mathbf{z}]) \mathbf{F} = [\mathbf{z}]^H \mathbf{f}, \quad (3.19)$$

де  $[\mathbf{z}]$  – тут прямокутна  $(L \times M)$  матриця значень  $z_{ml}$ , записана як:

$$[\mathbf{z}] = \begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_M^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_M^1 \\ & & \dots & \\ z_1^{L-1} & z_2^{L-1} & \dots & z_M^{L-1} \end{pmatrix}; \quad (3.20)$$

$\mathbf{f}$  – вектор значень  $f_l$  для  $l = 0 \dots L-1$ . Множення може бути переписано як  $(M \times M)$  ермітова матриця коефіцієнтів  $\alpha_{ij}$ :

$$[\alpha] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1M} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2M} \\ & & \dots & \\ \alpha_{M1} & \alpha_{M2} & \dots & \alpha_{MM} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

де

$$\alpha_{ij} = \sum_{l=0}^{L-1} (z_i^* z_j)^l. \quad (3.22)$$

З огляду на попереднє видалення кратних нулів, маємо:  $\alpha_{ij} = L$ , если  $j = i$ , инаچه:

$$\alpha_{ij} = \frac{(z_i^* z_j)^L - 1}{z_i^* z_j - 1}. \quad (3.23)$$

Метод Холецкого можна використовувати для вирішення системи  $M$  лінійних рівнянь (3.16).

Описана змішана модифікація алгоритму гармонійної декомпозиції відрізняється як від вихідного підходу, так і від узагальненого методу найменших квадратів Проні, оскільки на її першому етапі використовується інтерполяція, а на третьому - апроксимація вихідної функції. Це повинно забезпечити, по-перше, істотно кращу стабільність алгоритму при роботі з погано зумовленими послідовностями, ніж при використанні на першому етапі авторегрессионной моделі, по-друге - більшу точність розрахунку комплексних амплітуд гармонік для зашумлених функцій, ніж у вихідному підході. Проте, оскільки на кожній стадії будь-який з двох описаних модифікацій алгоритму гармонійної декомпозиції все ж можуть відбуватися помилки через погану обумовленості вихідної вибірки, важливо забезпечити його позитивне

функціонування, щоб уникнути випадкового аварійного завершення процесу моделювання. Одним із способів може бути інтерактивне зниження порядку моделі  $M$  на 2 з відповідним зменшенням довжини вибірки  $L$  на 3 до тих пір, поки буде отримано успішний результат. Звичайне для параметричних методів додавання шуму до вихідної вибірки тут не обов'язково, оскільки сам збудливий ток в моделях частинок завжди зашумлен. Проте, для забезпечення гарантованої стійкості алгоритму під час моделювання «холодної» системи,

У Додатку А наведено демонстраційна програма на Фортрані 90 для гармонійної інтерполяції комплексної вибірки. Функція `Number_Of_Harmonics` повертає кількість гармонійних компонент для аналізованої послідовності після видалення кратних нулів характеристичного полінома. Функції `Harmonic_Frequency` і `Harmonic_Amplitude` повертають відносну лінійну частоту і комплексну амплітуду будь-якого компоненти відповідно (в одиницях частоти дискретизації). Це спрощена версія професійної програми без інтерактивного зниження порядку моделі для погано обумовлених вибірок і описаної далі модифікації алгоритму факторизації полінома. Незважаючи на те, що внутрішні робочі області призначені для вибірки довжиною до 255 включно, максимальне значення  $L$  для даної версії одно 73.

Додаток А містить також фрагмент програми для заміщення гармонійної інтерполяції функції на третьому етапі алгоритму її гармонійної апроксимації. Цим фрагментом використовується підпрограма бібліотеки IMSL DLSLHF.

Якщо дану програму з інтерполяцією на третьому етапі застосувати до 64-точковою тест-послідовності з лінійні частоти і модулями амплітуд 0,1; 0,1; 1,0 і 1,0 і модулі комплексних амплітуд вихідних одиночних гармонік з відносними лінійними частотами -0,15; 0,10; 0,20; 0,21 відповідно відновлюються :

$$\begin{aligned}\omega_{15} / 2\pi &= -0,15001436\dots, & |F_{15}| &= 0,093785705\dots; \\ \omega_{22} / 2\pi &= 0,099987216\dots, & |F_{22}| &= 0,089861647\dots; \\ \omega_{25} / 2\pi &= 0,20004258\dots, & |F_{25}| &= 1,2376770\dots; \\ \omega_{26} / 2\pi &= 0,20996366\dots, & |F_{26}| &= 0,045267775\dots.\end{aligned}$$

Як видно, точність оцінки амплітуди не цілком задовільна. Однак, якщо на третьому етапі алгоритму інтерполяції замінити апроксимацією на повній довжині вибірки, модулі амплітуд стають рівними:

$$\begin{aligned}|F_{15}| &= 0,10145834\dots; \\ |F_{22}| &= 0,10638309\dots; \\ |F_{25}| &= 1,0475157\dots; \\ |F_{26}| &= 1,0619225\dots.\end{aligned}$$

Отже, як і передбачалося, що друга модифікація алгоритму значно краще підходить для гармонійного розкладання істотно зашумлених послідовностей. Можливість помітного дисбалансу потужностей в системі, як результату апроксимації збудливого струму, малоімовірна.

У вищеописаних розрахунках використано транслятор Compaq Visual Fortran Professional Edition v.6.5 для Intel 386 з вихідними налаштуваннями для конфігурації Win32 Debug.

Як і при спектральному аналізі, при гармонійній декомпозиції представляють інтерес оцінки залежності роздільної здатності алгоритму від кількості компонентів в групі з кількох близько розташованих гармонік. Рисунок 3.1 дає приклади подібних залежностей для вихідного підходу Проні. В спектрі комплексної вибірки довжиною  $L = 255$  присутня єдина група гармонік із середньою відносною лінійною частотою  $1/16$ , вона складається з  $h =$  від 2 до 8 еквідистантних комплексних експонент одиничної амплітуди з нульовими початковими фазами. Тут визначається як мінімальна відстань по частоті між сусідніми експонентами за умови, що наведений метод відновлює

амплітуди всіх гармонік з відносною помилкою не більше кількох відсотків. Крива 1 побудована для незашумленим вибірки. Крива 2 отримана для аналогічної вибірки, доповненої білим шумом з середньоквадратичним значенням -120 дБ від амплітуди гармоніки. Перевага алгоритму гармонійної інтерполяції перед звичайним розкладанням в ряд Фур'є очевидна, незважаючи на наближену оцінку цих залежностей.

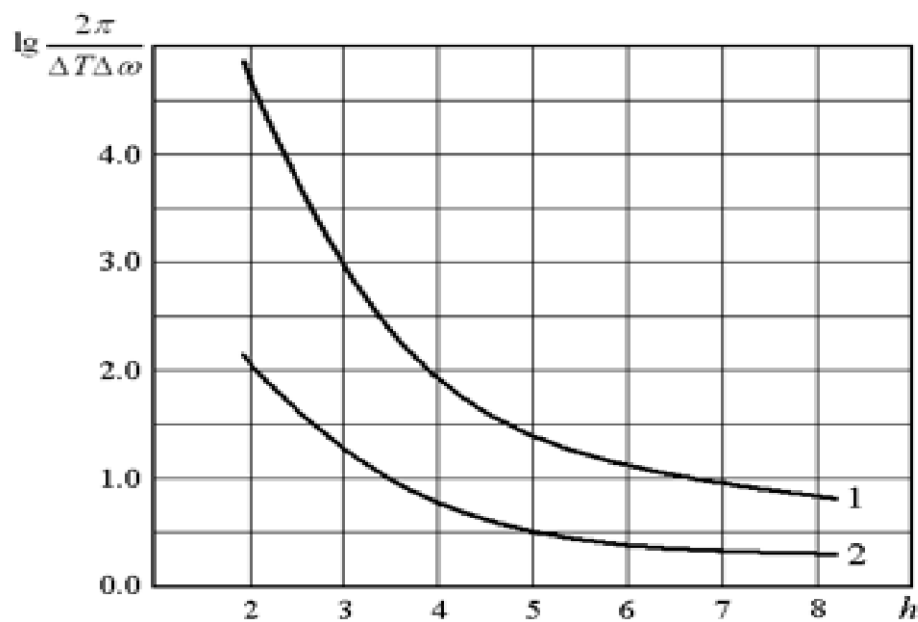


Рисунок 3.3 - частотний дозвіл вихідного методу Проні

### 3.5 Метод найменших квадратів

Коротко зупинимося на особливостях застосування методу найменших квадратів Проні для гармонійної декомпозиції функцій. Як зазначалося вище, алгоритм його також складається з трьох етапів, першим з яких є спектральний аналіз тимчасової вибірки вихідної функції. Для цього може використовуватися модифікований коваріаційний метод. Оскільки відсутність загасання

передбачає, що модулі всіх коренів  $zm$  характеристичного полінома (3.6) повинні дорівнювати одиниці, тому поліном виходить сполученої-симетричним. Знаходження його коефіцієнтів доцільно виконувати за допомогою спеціально розробленого Марпл алгоритму рішення симетричних коваріаційних нормальних рівнянь.

Другий етап полягає в факторизації отриманого характеристичного полінома (3.6) з комплексними або речовими коефіцієнтами. Як уже зазначалося, одними з кращих методів для цього є відповідно алгоритми Дженкінса і Траубе і Дженікса. Оскільки ряд застосувань спектрального підходу вимагають значень порядку моделі до 128...256, адаптація цих методів для роботи з многочленами великих ступенів описана в наступному підрозділі.

Третій етап методу найменших квадратів Проні (розрахунок комплексних амплітуд гармонійних складових) Полягає у вирішенні системи лінійних рівнянь, аналогічної (3.16), із симетрично ермітової матрицею, наприклад, шляхом розкладання Холецкого. Незважаючи на сполучення симетричність коефіцієнтів полінома (3.6), модулі деяких його коренів, особливо при великих порядках моделі, виявляються досить далекими від передбачуваності одиночного значення. Для запобігання помилок на даному етапі внаслідок переповнення розрядної сітки ЕОМ чи вірожденність матриці, перед його виконання можна провести нормування знайдених нулів полінома до одиночного модулю и подалі їх сортуваннях по частоті з віддаленням кратних (аналогічно до наведеного в Додатках А алгоритму віхідного методу Проні).

### 3.6 Факторизація полиномів високих порядків

При використанні методів Проні для гармонійного аналізу збудливого струму і високочастотного поля в нелінійних системах виникає необхідність в знаходженні коренів поліномів достатньо високих порядків. Однією з причин цього є нелінійна взаємодія між двома або більше сигналами, що створює безліч комбінаційних складових в спектрі збудливого струму і, відповідно, ВЧ-

поля сповільнює системи (ситуація посилюється наявністю в ЕС двох вироджених нормальних мод або двох зустрічних хвиль, кожен з яких має, взагалі кажучи, незалежні спектральні розкладання).

Іншим прикладом може бути дослідження проходження через підсилювальну систему широкосмугового сигналу зі складним спектром. Для задовільною апроксимації частотної обвідної такого сигналу необхідно синтезувати його з якомога більшої кількості гармонійних компонент на вході. Хоча в методі комплексних амплітуд гармонійний аналіз огинають на різних базових частотах ведеться незалежно один від одного, з урахуванням вищевказаного взаємодії з електронним потоком всіх сигналів, де вказаний спектр комплексної амплітуди кожної хвилі може стати досить складним.

Також, ще однією причиною використання високих порядків моделі є необхідність усунення спостерігається зміщення частотних оцінок при сильній зашумленості аналізованої функції. У літературі вказується, що вплив адитивного шуму на точність знаходження нулів характеристичного полінома можна зменшити, якщо вибрати порядок фільтра лінійного передбачення набагато більше числа комплексних експонент, фактично присутніх у вихідному сигналі. Дуже важливим цей фактор стає при використанні гармонійного розкладання для вибору базових частот в адаптивному методі комплексних амплітуд.

З урахуванням вищесказаного, максимальний порядок  $M$  методів Проні, що застосовуються в спектральних моделях, можна оцінити як 256. Вказана раніше методика автоматичного вибору порядку моделі зберігає свої переваги і при гармонійному аналізі.

У той же час, відомі реалізації методів Дженкінса-Траубе і Дженкінса не дозволяють досягти таких великих значень порядку. Комерційні варіанти цього алгоритму (наприклад, з пакету IMSL) працюють не більше ніж з 50 і 100 країнами відповідно. Спроба формально збільшити розміри робочих масивів, щоб розширити діапазон допустимих ступенів, без змін в алгоритмах не дає

позитивних результатів. При ступеня полінома більшою 50 або 100 точність визначення останніх нулів знижується.

Причини незадовільної роботи методів Дженкінса-Траубе і Дженкінса з поліномами високих порядків легко зрозуміти, якщо врахувати, що ці методи знижують порядок многочлена після знаходження кожного кореня. При цьому в коефіцієнтах скороченого многочлена накопичуються помилки округлення. Коріння полінома, як ми знаємо, дуже чутливі до зміни коефіцієнтів. Хоча програми знаходять останні нулі настільки ж точно, як і перші, проте це вже нулі не вихідного многочлена, а деякого іншого, спотвореного накопиченими похибками. При підстановці в початковий поліном вони не мінімізують його значення.

Мабуть, неможливо радикальне усунення описаного недоліку в рамках існуючих алгоритмів. Однак можна послабити його вплив, якщо підвищити точність розрахунку нулів. Помилки в коефіцієнтах накопичуватимуться повільніше і виявиться можливим факторизувати многочлена більш високих порядків. Достатнім є навіть зменшення похибки значення не кожного окремого кореня, а середньоквадратичної помилки по всіх нулях.

Кожен корінь тут знаходиться в результаті трьох вкладених циклів обчислень. Зовнішній цикл задає певну послідовність зрушень вектора шуканого нуля на комплексній площині. Перераховані ітерації утворюють два головних проходу. Проміжний цикл в межах заданої послідовності здійснює зрушення цього вектора на фіксовану величину. Нарешті, внутрішній цикл виконує ряд ітерацій по уточненню положення нуля зі змінним кроком. Тут же проводиться перевірка збіжності ряду шляхом порівняння модуля полінома на потрібній точці з межами помилки, можливої при обчисленні значення цього полінома. Якщо модуль не перевищує допустимої помилки, всі три цикли достроково припиняються і встановлюється ознака збіжності (тобто корінь вважається знайденим).

Тому, межі допустимої помилки не повинні бути занадто малими, оскільки в іншому випадку робота алгоритму буде часто завершуватися

аварійно з ознакою «збіжність НЕ досягнута». В оригінальних програмах вони беруться з 20-кратним запасом. Однак, пропонується використовувати два критерії збіжності. Вищеописаний вихідний критерій назвемо слабким, а новий - сильним. Сутність його полягає в тому, що ітерації по знаходженню поточного нуля припиняються тільки за умови, якщо модуль полінома на потрібній точці стає рівним гранично допустимої абсолютної помилки або меншим. Вона визначається як максимальне значення коефіцієнтів вихідного промасштабованого полінома, помножене на відносну помилку уявлення числа з плаваючою точкою тобто (мінімальне позитивне число, таке що  $1.0+ > 1.0$ ). В іншому випадку виконується повний набір ітерацій вихідного алгоритму, включаючи два головних проходу. Якщо при цьому досягається слабка збіжність, як знайденого значення нуля вибирається те, яке давало мінімальний модуль полінома серед всіх ітерацій. Якщо ж не була одержана навіть слабка збіжність - пошук коренів припиняється.

Зазначені доопрацювання алгоритмів Дженкінса-Траубе і Дженкінса дозволяють підвищити середню точність знаходження нулів поліномів за рахунок збільшення тривалості рахунку. В результаті факторизації многочленів з порядком 256, отриманих при спектральному аналізі тимчасових вибірок, спостерігається не більше декількох коренів, модуль полінома в яких перевищує середньоквадратичне значення коефіцієнтів. Час розрахунку при цьому зростає приблизно в два - три рази.

Оскільки, незважаючи на вищеописані доробки, після факторизації характеристичних поліномів великій мірі неправильно знайдені нулі все ж зустрічаються, має сенс проводити перевірку коренів з подальшим видаленням недостовірних (шляхом підстановки їх у вихідний многочлен). Якщо порядок моделі  $M$  обраний з запасом, невелике його зниження, як правило, несуттєво.

Для ілюстрації можливостей метода Проні на рис. 3.4 показано кардіограму здорової людини, а на рис. 3.5 – її спектр. На рис. 3.6 показано кардіограму при дефекті серцевого клапана, відповідний спектр наведено на рис. 3.7. Чітко видно різницю у складі спектральних гармонік.

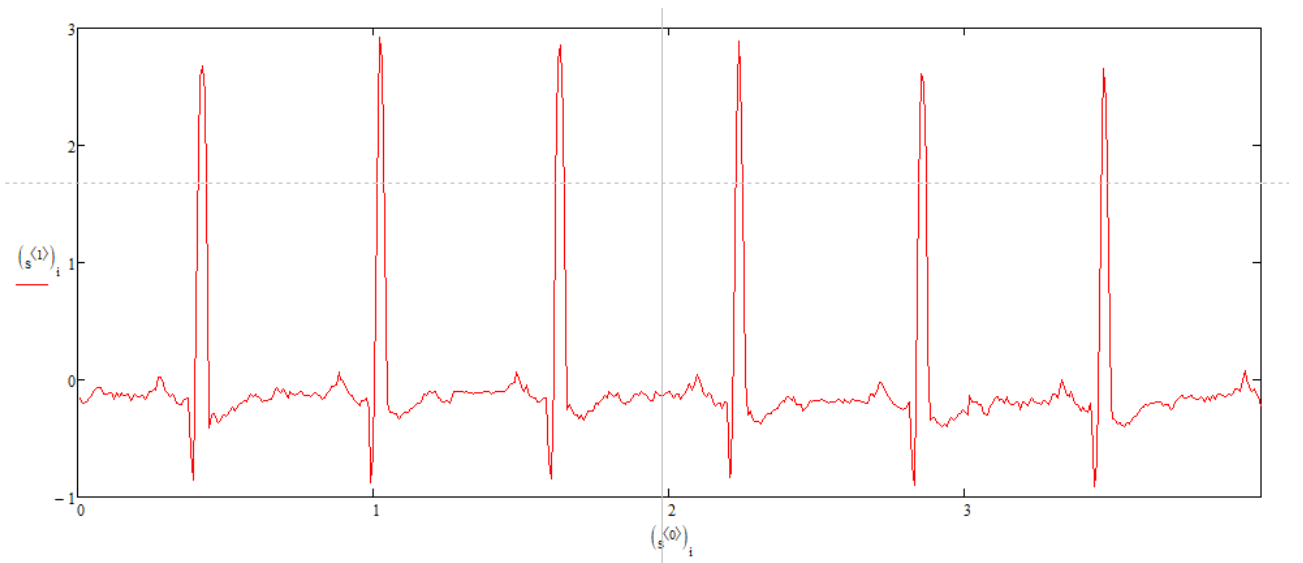


Рисунок 3.4 - Кардіограма здорової людини

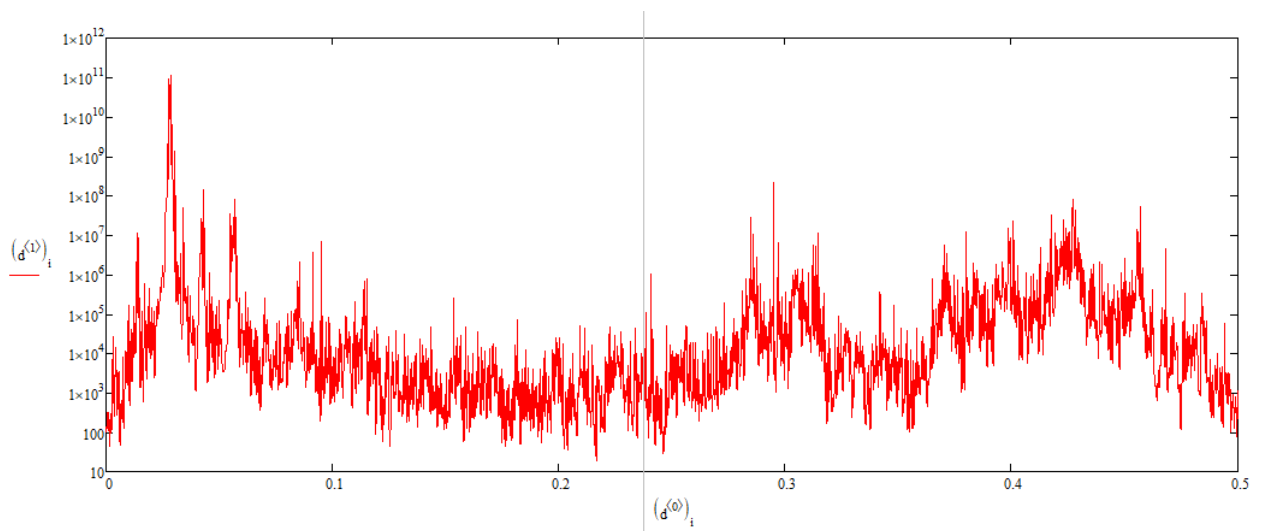


Рисунок 3.5 – Спектр кардіограми здорової людини

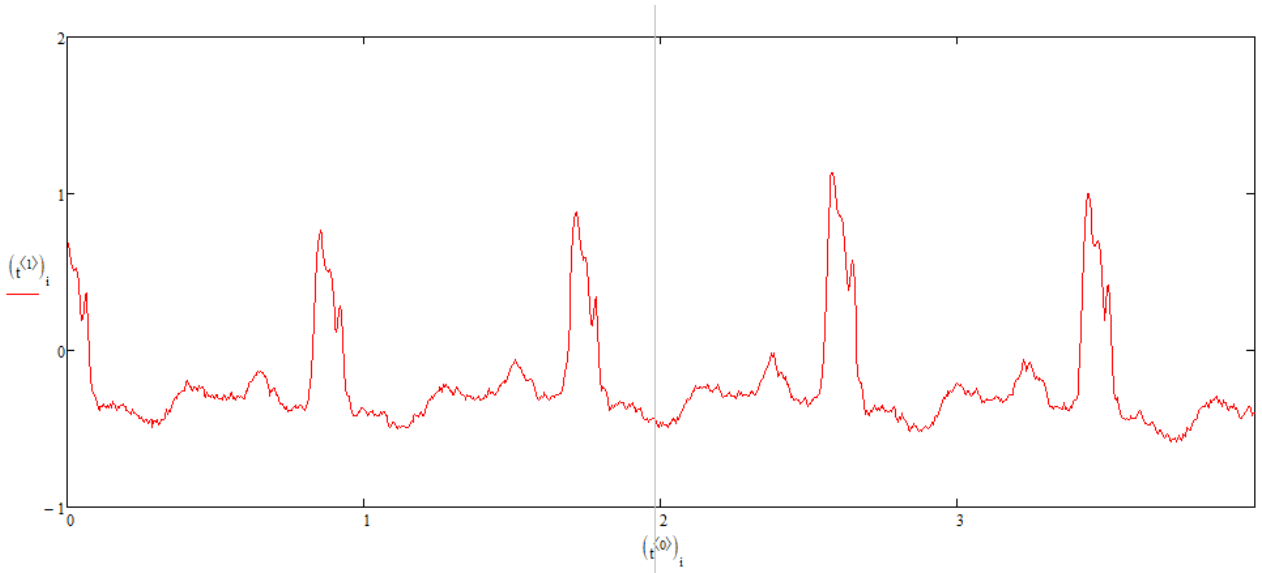


Рисунок 3.6 - Кардіограма при дефекті серцевого клапана

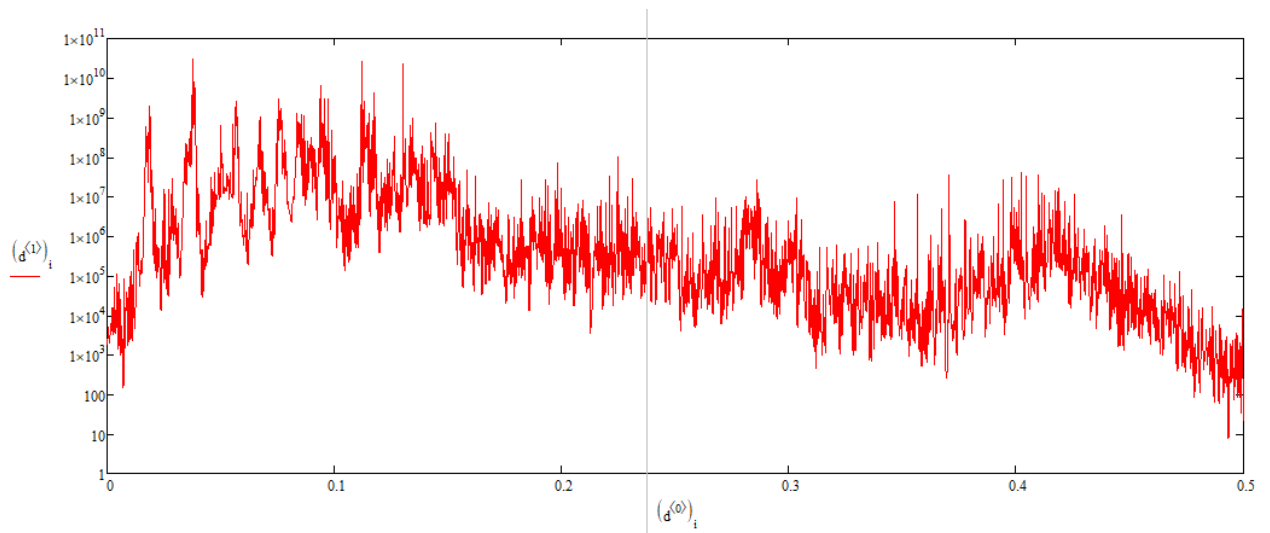


Рисунок 3.7 – Спектр кардіограми при дефекті серцевого клапана

## ВИСНОВКИ

Дослідження, виконані в атестаційній роботі, дозволяють створити якісно нову методику комп'ютерної обробки біомедичних сигналів, одержуваних на виході приладів ЕКГ.

Розроблено алгоритм поліпшення якості і роздільної здатності, заснований на застосуванні звичайних методів Проні, а також розраховані оптимальні параметри і характеристики фільтрів, що дозволяють домогтися найкращої розбірливості та інформативності спектрів.

Методика моделювання цифрової фільтрації одновимірних сигналів дозволяє наочно ілюструвати вплив різних гармонік в спектрі сигналу на вигляд вихідний функції фільтра. Простота роботи з програмною системою вигідно відрізняють її від різних універсальних пакетів інженерного призначення. Тому дана розробка може бути рекомендована для використання в навчальному процесі на кафедрі мікроелектроніки, електронних приладів і пристроїв факультету електронної техніки, зокрема, при створенні віртуального лабораторного макету для проведення лабораторних робіт по курсу «Пристрої обробки сигналів».

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Гоноровський І.С. Радіотехнічні ланцюги і сигнали. - М .: Радіо и связь, 1986. - 512 с.
2. Відніс Р., Еноксон Л. Прикладний аналіз часових рядів. - М .: Світ, 1982. - 428 с.
3. Корн Г., Корн Т. Довідник з математики для науковців та інженерів. - М .: Наука, 1984. - 832 с.
4. Рабинер Л.Р., Гоулд Б. Теорія і застосування цифрової обробки сигналів. - М .: Світ, 1978. - 848 с.
5. Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч.М. Застосування теорії чисел в цифровій обробці сигналів. - М .: Радио и связь, 1983. - 264 с.
6. Марпл-мл. С.Л. Цифровий спектральний аналіз та його додатки. - М .: Світ, 1990. - 584 с.
7. Баскаков І.С. Радіотехнічні ланцюги і сигнали. - М .: Вища. шк., 1984. - 487 с.
8. Smith SW The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. - San Diego, CA: California Technical Publ., 1999. - 650 p.
9. Нуссбаумер Г. Швидке перетворення Фур'є і алгоритми обчислення згорток. - М .: Радіо и зв'язок, 1985. – 248 с.
10. Макс Ж. Методи і техніка обробки сигналів при фізичних вимірюваннях: У 2 т. - М .: Мир, 1983. - Т. 1: Основні принципи і класичні методи. - 312 с.
11. Макс Ж. Методи і техніка обробки сигналів при фізичних вимірюваннях: У 2 т. - М .: Мир, 1983. - Т. 2: Техніка обробки сигналів. Застосування. Нові методи. - 256 с.
12. Самарський А.А. Теорія різницевого схем. - М .: Наука, 1983. – 616 с.
13. Грицунов А.В., Бондаренко І.Н., Бородин А.В., Копоть М.А., Свидерская Л.И. Спектральные модели СВЧ-приборов с продольным взаимодействием // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2019. – Вып. 197. – С. 56-63.
14. Шуп Т. Рішення інженерних задач на ЕОМ. - М .: Світ, 1982. – 238 с.

15. Турчак Л.І. Основи чисельних методів. - М.: Наука, 1987. – 320 с.
16. Плис А.І., Сливина Н.А. Лабораторний практикум з вищої математики. - М.: Вища. шк., 1983. - 208 с.
17. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинні методи математичних обчислень. - М.: Світ, 1980. - 280 с.
18. Бартенєв О.В. Фортран для професіоналів. Математична бібліотека IMSL (Ч. 1). - М.: Діалог-МПІ, 2000. - 448 с.
19. Радіотехнічні ланцюги і сигнали / Д.В. Васильєв, М.Р. Вітол, Ю.Н. Горшенков і ін. / Под ред. К.А. Самійло. - М.: Радио и связь, 1982. - 528 с.
20. Мудров А.Є. Чисельні методи для ПЕОМ на мовах Бейсік, Фортран і Паскаль. - Томськ: МП «РАСКО», 1991. - 272 с.
21. Іцхоки Я.С. Нелінійна радіотехніка. - М.: Сов. радіо, 1955. - 508 с.