Н. Б. ВОРОНЦОВ, Л. И. МЕЛЬНИКОВА

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ПРЕДИКАТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА И ИСКЛЮЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_m$ — переменные (характеристики исследуемого объекта), принимающие значения соответственно из множеств $A_1, A_2, \dots, A_m$, где $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik_i}\}$ $i = 1, 2, \dots, m$.

Определение 1*. Конечным предикатом f называется отображение $f\colon A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m \to \{0, 1\}$ декартового произведения множеств $A_1, A_2, \dots, A_m$ в двухэлементное множество $\{0, 1\}$.

Определение 2. Предикатным уравнением называется соотношение

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \tag{1}$$

где f_1, f_2 — конечные предикаты.

Определение 3. Каноническим предикатным уравнением (КПУ) называется предикатное уравнение вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1. \tag{2}$$

Очевидно, что произвольное предикатное уравнение вида (1) легко преобразуется в эквивалентное ему каноническое уравнение

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \sim f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1. \tag{3}$$

* Все определения настоящей работы базируются на работах [1, 2].

О п р е д е л е н и е 4. Системой предикатных уравнений (СПУ) называется система канонических предикатных уравнений вида

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1; \\
&f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $f_1, f_2, \dots, f_n$ — конечные предикаты.

Система предикатных уравнений (4) при $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 2$ является системой уравнений алгебры логики (системой логических уравнений) [3]. Если же имеется $k_i > 2$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, то система (4) — система уравнений алгебры конечных предикатов [2, 4].

Очевидно, что система (4) может быть преобразована в эквивалентное ей каноническое уравнение

$$f_1(x_1, \dots, x_m) \wedge \dots \wedge f_n(x_1, \dots, x_m) = 1. \tag{5}$$

О п р е д е л е н и е 5. Корнем канонического предикатного уравнения (2) называется набор $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$, при котором $f(a_1, a_2, \dots, a_m) = 1$.

О п р е д е л е н и е 6. Решением канонического предикатного уравнения (2) называется множество D всех корней уравнения

$$D = \{(a_1, \dots, a_m) \in A_1 \times \dots \times A_m \mid f(a_1, \dots, a_m) = 1\}. \tag{6}$$

О п р е д е л е н и е 7. Решением системы предикатных уравнений (4) называется пересечение $D = D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_n$ **(7)**, где D_i—решение уравнения $f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1$ системы, $i = 1, 2, \dots, m$.

Очевидно, если D — решение системы (4), а D' — решение канонического уравнения (5), то $D = D'$. Эквивалентность системы (4) и уравнения (5), а также предикатных уравнений (1) и (2) понималась именно в смысле равенства их решений.

Пусть D — решение системы (4). Если $D = \varnothing$, говорят, что система не имеет решения или противоречива. Если же $D = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$, то система тождественна. В последнем случае уравнение (5) является тавтологией. Очевидно, что в общем случае система (4) имеет корни, но не всякий набор $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ является корнем.

При анализе методов решения используются следующие временные и пространственные характеристики: E_1 — время вычисления при выполнении всех действий последовательно. E_1 равно объему вычислений метода или общему числу операций, которые должны быть выполнены для нахождения решения; E_ω — время вычисления при максимально параллельном выполнении всех действий на заданном уровне параллелизма. E_ω обычно равно объему вычислений в одной из выделенных параллельных ветвей; W_ω — максимальное число параллельных ветвей при времени вычисления E_ω (ширина вычислительного процесса).

Другие полезные характеристики являются производными приведенных выше:

$$S_\omega = \frac{E_1}{E_\omega} \quad (8); \quad U_\omega = \frac{E_1}{W_\omega E_\omega} = \frac{S_\omega}{W_\omega} \quad (9),$$

где S_ω — ускорение вычислений при W_ω параллельных ветвях по сравнению с последовательным вычислением; U_ω — плотность вычислений в W_ω ветвях. U_ω характеризует возможную эффективность использования W_ω параллельных процессов для реализации вычислений в параллельных ветвях. Очевидно, что $U_1 = 1$, а $U_\omega \leqslant 1$ при $\omega > 1$.

Перейдем к анализу эффективности распараллеливания метода полного перебора [3], который состоит в переборе всех возможных наборов значений переменных $x_1, x_2, ..., x_m$ из $A_1 \times \times A_2 \times ... \times A_m$ и вычислении на каждом из наборов $(a_1, a_2, ..., a_m)$ значения КПУ (2). Другими словами, вычисление строится непосредственно в соответствии с определением 6.

Достоинством метода полного перебора является возможность максимально параллельного отыскания решения КПУ, так как число параллельных процессов, которые могут быть запущены, определяется как

$$W_\omega^{(1)} = |A_1 \times A_2 \times ... \times A_m| = k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_m. \quad (10)$$

При этом время $E_\omega^{(1)}$ вычисления в каждой из $W_\omega^{(1)}$ параллельных ветвей равно времени вычисления значения предиката f на одном наборе и одинаково во всех параллельных ветвях. Следовательно, $S_\omega^{(1)} = W_\omega^{(1)}$ и $U_\omega^{(1)} = 1$, так как $E_1^{(1)}$ может быть определено как $E_1^{(1)} = W_\omega^{(1)} E_\omega^{(1)}$.

Основным недостатком метода полного перебора является экспоненциальный рост объема вычислений с ростом числа переменных, так как

$$E_1^{(1)} = l^m E_\omega^{(1)} \quad (11)$$

при $k_1 = k_2 = ... = k_m = l$.

Таким образом, метод полного перебора характеризуется, с одной стороны, очень хорошим распараллеливанием, а с другой — очень большим объемом вычислений. Последнее обусловливает ограничения на его практическую применимость.

Метод исключения переменных, рассматриваемый ниже, применяется для решения СПУ, заданных в формульном виде, и является обобщением эвристического метода из работы [5]. Основная идея метода исключения переменных состоит в определении множества возможных значений каждой переменной в корнях СПУ и затем в подстановке каждого из возможных значений переменной в другие уравнения СПУ с целью определения, является ли данное значение допустимым. Если ни одно из уравнений СПУ не обращается в противоречие $0=1$, то значение допустимо, и полученная после подстановки СПУ уже не содержит данной переменной. Далее определяется множество возможных значений другой переменной, выполняется подстановка этих значений и т. д. Определение множества возможных значений осуществляется либо исходя из структуры уравнений СПУ, либо исходя из области определения значений переменной.

Таким образом, характерной особенностью метода исключения переменных является образование в процессе вычисления совокупности СПУ Q и осуществление процессов удаления СПУ из Q и добавление новых СПУ в Q, что создает хорошие предпосылки для распараллеливания процесса вычислений на уровне отдельных СПУ из Q.

При описании метода исключения переменных множество Q обозначает текущую совокупность систем предикатных уравнений, D — решение исходной СПУ. С каждой системой S из Q в процессе вычисления связывается текущее (промежуточное) значение ее корня (корней), которое задается множеством вида

$$r=\{(x,\ a),\ (y,\ b),\ \ldots\}, \tag{12}$$

где $x,\ y,\ldots$ — различные переменные системы S; $a,\ b,\ldots,$ — значения переменных из области определения.

Если корень r вида (12) определяет окончательное значение корня (корней) системы S и некоторая переменная x_i не входит ни в одну из пар $(x,\ a),\ (y,\ b),\ldots$, то, следовательно, она может принимать любые значения из области ее определения и r определяет соответствующее множество корней.

Для достаточно строгого описания метода используется операция присваивания значений множествам. Например, $D:=\varnothing$ — множеству D присвоить значение пустого множества; $Q:=Q\cup Q'$ — множеству Q присвоить значение, равное объединению его прежнего значения с некоторым множеством Q'.

Нахождение решения по методу исключения переменных осуществляется в результате выполнения следующих шагов:

Шаг 1. $Q:=\{(S,\ r)\}$, $D:=\varnothing$, где S — исходная СПУ, $r=\varnothing$, D — решение S.

Шаг 2. Если $Q=\varnothing$, процесс вычисления окончен и D содержит решение исходной СПУ. В противном случае перейти к шагу 3.

Шаг 3. Из Q выбирается любая пара $(S,\ r)$ и $Q:=Q\setminus\{(S,\ r)\}$. Каждое уравнение СПУ S редуцируется путем применения тождеств:

$$A\vee AB\equiv A;\ A\vee A\equiv A;\ AA=A;\ A\vee 0\equiv A;\ A\cdot 0\equiv 0;$$

$$A\vee 1\equiv 1;\ A\cdot 1\equiv A;\ (A\vee B)\,C\equiv AC\vee BC;\ (A\vee C)(B\vee C)\equiv$$
$$\equiv AB\vee C, \tag{13}$$

причем каждое из уравнений, превратившееся в тавтологию $1=1$, исключается из S. В результате получается система S'. Если все уравнения системы S превратились в тавтологии (S' не содержит уравнений), то найден корень r, $D:=D\bigcup\{r\}$ и нужно перейти к шагу 2. Если какое-либо уравнение превратится в противоречие $0=1$, то, значит, система S не имеет корней и следует перейти к шагу 2. В противном случае — перейти к шагу 4.

Шаг 4. Среди уравнений СПУ S' ищется уравнение, имеющее вид

$$F \vee (x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x^{\sigma_k}) = 1, \qquad (14)$$

где F — произвольная формула (логическое выражение), x — одна из переменных системы S', а $x^{\sigma_1},\ldots, x^{\sigma_k}$ — узнавания. Заметим, что в случае алгебры логики $k\leqslant 2$, $x=x^1$ *и* $\overline{x}=x^0$.

Если среди уравнений S' не имеется уравнений вида (14), то следует перейти к шагу 5.

Если же среди уравнений S' имеется уравнение вида (14), то из S' формируется система S'' путем замены найденного уравнения вида (14) на уравнение $F=1$ **(15)**.

Далее к Q добавляются k новых пар:

$$Q:=Q\bigcup\{(S_1, r_1), (S_2, r_2), \ldots, (S_k, r_k)\}, \qquad (16)$$

где S_i образуется в результате подстановки значения переменной $x=\sigma_i$ во все уравнения системы S'', а $r_i=r\bigcup\{(x, \sigma_i)\}$, $i=1, 2,\ldots, k$. Перейти к шагу 3.

Шаг 5. Пусть в S' имеется переменная x, принимающая значения из множества определения $A=\{a_1, a_2,\ldots, a_l\}$. Тогда к Q добавляется l новых пар:

$$Q:=Q\bigcup\{(S_1, r_1), (S_2, r_2), \ldots, (S_l, r_l)\}, \qquad (17)$$

где S_i образуется из S' в результате подстановки значения $x=a_i$ во все уравнения S', а $r_i=r\bigcup\{x, a_i)\}$. Перейти к шагу 3.

Достоинством метода исключения переменных является существенно меньший объем вычислений, чем в методе полного перебора. Действительно, основной трудоемкий процесс состоит в редуцировании заданной системы S уравнений (см. шаг 3). Предположим, что этот процесс требует E_m операций, хотя, очевидно, шаг 3 будет требовать тем меньше действий, чем меньше переменных и уравнений в редуцируемой системе.

Предположим, что исходная СПУ содержит m переменных, и их области определения содержат по l элементов. На шаге 4 или 5 происходит исключение одной из переменных системы и добавление новых пар (S,r) в множество Q. Очевидно, что в процессе построения каждого r вплоть до получения корня общее число выполнения шагов 4 и 5 не более m. Это число будет меньше m, если решение D будет содержать корни r, в которых заданы значения не всех переменных.

На шаге 3 происходит редукция систем, полученных на четвертом и пятом шагах метода. В результате редукции может быть обнаружено, что некоторые пары (S, r) не имеют корня (получено противоречие $0=1$). Предположим, что число систем, не имеющих корней из общего числа k, добавленных к Q на шаге 4, или числа l, добавленных к Q на шаге 5, определяется коэффициентом редукции $q \leqslant 1$, который определяет отношение числа систем, имеющих корень, к их общему числу k или l.

Рассмотрим два варианта:

1) за время вычисления решения D ни разу не выполняется шаг 5, а на шаге 4 число добавляемых пар (S, r) равно $k=[l/2]$;

2) за время вычисления решения D $m'=[m/2]$ переменных исключаются на четвертом шаге и число добавляемых пар равно $k=[l/2]$, а остальные, т. е. $m''=m-m'$, переменные исключаются на пятом шаге.

В первом варианте объем вычислений $E_1^{(2)}$ можно оценить как

$$E_1^{(2)} \approx E_m k^m q^{m-1}, \tag{18}$$

а во втором

$$E_1^{(2)} \approx E_m k^{m'} l^{m''} q^{m-1}, \tag{19}$$

где $m''=m-m'$.

По сравнению с методом полного перебора имеем соответственно (см. формулу (11))

$$\frac{E_1^{(1)}}{E_1^{(2)}} = \frac{l^m E_\omega^{(1)}}{q^{m-1} k^m E_m} \approx 2^m q^{1-m} (E_\omega^{(1)}/E_m); \tag{20}$$

$$\frac{E_1^{(1)}}{E_1^{(3)}} = \frac{l^m E_\omega^{(1)}}{q^{m-1} k^{m'} l^{m''} E_m} \approx 2^{[m/2]} q^{1-m} (E_\omega^{(1)}/E_m). \tag{21}$$

Таким образом, если предположить, что отношение $E_\omega^{(1)}/E_m$ не слишком мало, то выигрыш от применения метода исключения переменных по сравнению с методом полного перебора может оказаться очень существенным даже при q, близком к единице, при малых значениях q выигрыш существенно возрастает. В целом объем вычислений для первого варианта уменьшается примерно в $2^m q^{1-m}$ раз, а для второго — примерно в $2^{[m/2]} q^{1-m}$ раз.

Метод исключения переменных позволяет применить распараллеливание вычислений, так как каждая пара (S, r) из множества Q может обрабатываться независимо от остальных пар. Как для первого, так и для второго варианта объем вычислений $E_\omega^{(2)}$ в наиболее длинной параллельной ветви при максимальном распараллеливании можно оценить как $E_\omega^{(2)} = mE_m$ (22).

В формуле (22) не учитываются затраты времени на шаги 4 и 5 метода.

Ускорения $S_{\omega}^{(2)}$ и $S_{\omega}^{(3)}$ соответственно для первого и второго вариантов оцениваются как

$$S_{\omega}^{(2)} = E_1^{(2)}/E_{\omega}^{(2)} = k^m q^{m-1}/m; \tag{23}$$

$$S_{\omega}^{(3)} = E_1^{(3)}/E_{\omega}^{(2)} = k^{m'} l^{m''} q^{m-1}/m. \tag{24}$$

Итак, из формул (23) и (24) видно, что возможно достижение достаточно высоких значений ускорения вычислительного процесса, хотя в начальный момент вычислений он и будет сдерживаться древовидным характером развертывания процесса вычислений, так как в начальный момент имеется только одна СПУ в Q, на следующем шаге — k систем (вариант 1), далее — примерно k^2 и т. д.

Существенным недостатком метода исключения переменных с точки зрения распараллеливания является необходимость при создании каждого нового параллельного процесса передачи всей системы предикатных уравнений, определяемой соответствующей парой (S, r) из множества Q. Такой большой объем передач может сильно ограничить достижение больших значений ширины параллельного процесса.

Список литературы: 1. *Закревский А. Д.* Симметричные нормальные формы конечных предикатов//Докл. АН БССР. 1987. **31**, № 5. С. 427—429. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта. Математические средства. Х., 1984. 144 с. 3. *Закревский А. Д.* Логические уравнения. Минск, 1975. 96 с. 4. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта. Технические средства. Х., 1986. 136 с. 5. *Котляров С. О.* Эвристический алгоритм решения логических уравнений//Пробл. бионики. 1984. Вып. 32. С. 35—39.

Поступила в редколлегию 24.12.87