

ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КВАДРАТНОЙ ОБЛАСТИ (ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Артюх А.В.

Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники
61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. Прикладной математики,
тел. +380577021436, E-mail: ant_artjukh@mail.ru

This paper is dedicated to the test problem of the nonstationary plane parallel flow of viscous incompressible fluid. The solution of the test problem is known. To obtain solution R -function and Galerkin methods are used. Numerical solutions were compared with the exact solution.

В работе проведен вычислительный эксперимент по расчету нестационарного плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости в квадратной области $\Omega = \left\{ (x, y) \left| 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{1}{2} \right. \right\}$ плоскости xOy . Математическая модель течения в приближении Стокса (линейное приближение) имеет вид:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \nu \Delta^2 \psi, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = \begin{cases} e^{-2\pi^2 t} \cos \pi y, & x = 0; \\ e^{-2\pi^2 t} \cos \pi x, & y = 0; \\ 0, & x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} -\pi e^{-2\pi^2 t} \cos \pi x, & y = \frac{1}{2}; \\ -\pi e^{-2\pi^2 t} \cos \pi y, & x = \frac{1}{2}; \\ 0, & x = 0 \text{ или } y = 0; \end{cases} \quad s \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\psi|_{t=0} = \cos \pi x \cos \pi y, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (3)$$

Здесь $\psi(x, y, t)$ – функция тока, ν – кинематическая вязкость, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$ области $\Omega \subset R^2$.

Точное решение поставленной задачи имеет вид:

$$\psi(x, y, t) = e^{-2\pi^2 t} \cos \pi x \cos \pi y.$$

Для решения задачи (1) – (3) использовались методы R -функций и Галеркина [1, 2]. С помощью метода R -функций построен пучок функций [3], удовлетворяющий краевым условиям (2), а также нормализованное уравнение $\omega(x, y)$ области Ω .

Для аппроксимации неопределенной компоненты структуры воспользо-

зовались методом Галеркина для нестационарных задач [2]. В качестве базисных функций были взяты сплайны Шенберга 3 и 5 порядка. Количество базисных функций выбиралось равным 49, 100 и 225. Интегралы в полученной после применения метода Галеркина системе обыкновенных дифференциальных уравнений вычислялись с помощью формулы Гаусса с 64 узлами.

На рис. 1 показаны нормы разности в пространстве $L_2(\Omega, [0, T])$ между полученным приближенным и точным решением задачи (1) – (3). Верхняя кривая (тире-тире) соответствует 49 координатным функциям, средняя (точка-точка) – 100, нижняя (тире-точка) – 225.

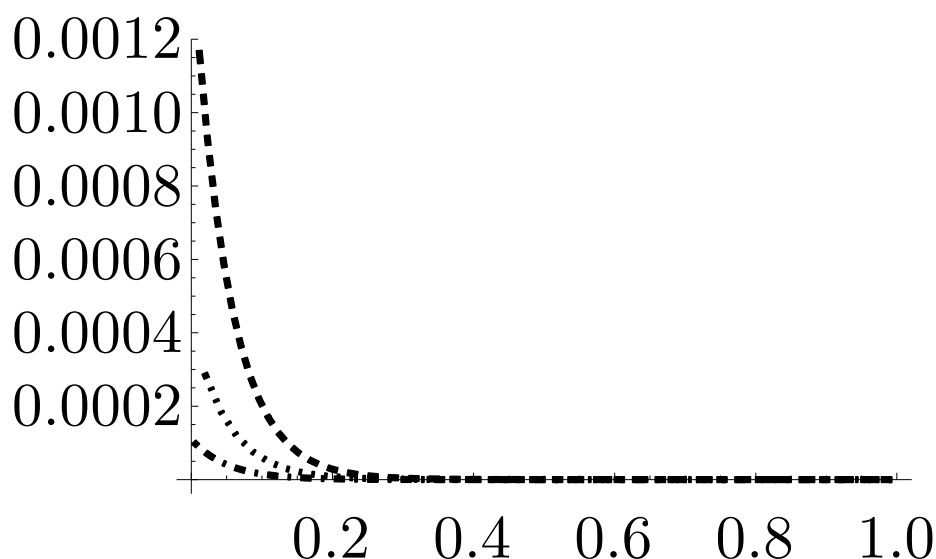


Рис. 1. – График погрешностей

Из рис. 1 видно, что с увеличением количества координатных функций приближенное решение быстрее стремится к точному. Следовательно, для решения подобных задач желательно выбирать число координатных функций не меньше, чем 225. Соответствующие графики для 3 сплайнов накладываются на графики со сплайнами 5 порядка, однако при вычислении погрешности для производных, лучший результат показывают сплайны 5 порядка, которые и будут использованы в дальнейших расчетах.

1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

2. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966. – 432 с.

3. Сидоров М. В. О построении структур решений задачи Стокса / М. В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика, №3, 2002. – С. 52 – 54.