ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ О ПОТОКАХ МАТЕРИАЛОВ С ЦЕЛЬЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО СТРАХОВОГО ЗАПАСА

В. Л. Иносов, Н. В. Святская
Киев

Как известно, каждый производственный процесс любого промышленного предприятия начинается со снабжения его необходимым сырьем и материалами в размерах, обеспечивающих прежде всего непрерывность процесса.

В связи с тем, что большой процент стоимости выпускаемой продукции составляет сырье, а также для предупреждения возможных простоев и излишнего затоваривания сырьем, особенно важным является рациональная организация складского хозяйства, а также оперативное управление запасами сырья и материалов, хранящихся на складах.

Задача настоящей работы — аналитическое определение оптимального размера страхового запаса сырья на складе при условии минимальной суммарной стоимости издержек его хранения и убытка от простоя предприятия из-за недостаточного количества сырья данного наименования.

Основные предположения.

I. Склад вмещает конечное множество потоков P отдельных видов сырья $p_i \in P$, где $P = \bigcup_{i=1}^{n} p_i$, n — количество видов сырья; p_i независимы, поэтому их можно изобразить конечным рядом независимых идентичных моделей.

II. Рассматривается один из элементов $p_i \in P$. При случайных функциях спроса на сырье и переменном T времени между точкой выдачи заказа и прибытием партии на склад можно выделить два случая.

1. Если время корреляции случайной функции спроса соизмеримо со временем T (рис. 1), то предлагается решение задачи при следующих ограничениях:

а) спрос на сырье данного наименования подчиняется закону распределения Пуассона;

б) поставки рассматриваемого вида сырья на склад регулярны с периодом T.

2. При малом времени корреляции функции спроса, по сравнению с T (рис. 2), ограничивающие условия следующие:

а) спрос на сырье данного наименования равномерный, с постоянной интенсивностью λ;

б) время между поставками меняется по закону распределения, отвечающему некоторой случайной функции изменения T.

Рассмотрим первый случай. При спросе, подчиняющемся закону распределения Пуассона, можно получить сравнительно простое аналитическое выражение для определения оптимального размера страхового

запаса. Часто случайной функции распределения спроса во времени можно придать вид закона распределения Пуассона. Это предлагается делать при помощи квантования по количеству отпускаемого сырья. При статистической проверке гипотезы о предполагаемом виде закона распределения с помощью критерия χ^2 вся область изменения изучаемой случайной величины x разбивается на n интервалов. Количество интервалов, а следовательно, и их численные значения $n_к$, выбираются методом подбора для получения максимальной величины $P(\chi^2 \geqslant \chi_q^2)$ — вероятности бо́льшего уклонения от гипотетического закона распределения, чем для рассматриваемой выборки; χ_q^2 — уклонение опытного распределения от предлагаемого.

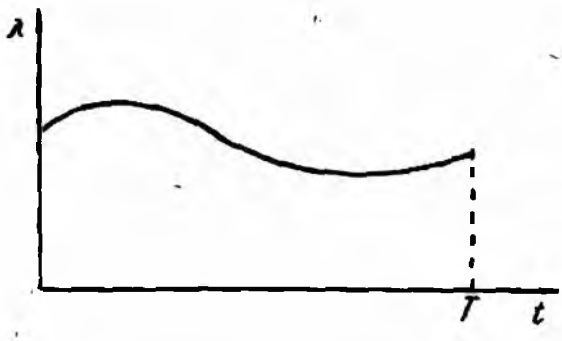


Рис. 1. Вид функции спроса при периоде изменения ее, соизмеримом со временем T.

Число равных промежутков времени N_m, в течение которых было отпущено сырье в количестве n_i неделимых единиц, определяем из условия, что величина $n_к$ является математическим ожиданием опытных данных о количестве отпущенного сырья, принадлежащих рассматриваемому интервалу $n_к \pm \frac{n_1}{2}$, где n_1 — численное значение неделимой величины, определенной указанным способом.

Предложенный метод приведения к желаемому виду распределения дает возможность представить случайную функцию спроса как закон распределения Пуассона не только для материалов с дискретно отпускаемой продукцией, но и для сырья непрерывного вида спроса (сыпучие, жидкие материалы).



Рис. 2. Вид функции спроса при малом периоде изменения ее по сравнению со временем T.

В качестве примера рассмотрим статистическую проверку гипотезы о предполагаемом виде закона распределения для реальных данных, полученных на одном из предприятий химической промышленности. Статистические данные о количестве потребляемого сырья (натуральный каучук, II сорт) за сутки в период с января по апрель 1965 г. приведены в табл. 1 и на рис. 3. Как видно из таблицы и рисунка, количество сырья, отпускаемого складом за сутки, колеблется от 0 до 32 $т$.

Руководствуясь вышесказанным, разбиваем 32 $т$ на интервалы, численные значения которых $n_1 = 4$ $т$, $n_2 = 8$ $т$, ..., $n_к = k \cdot 4$ $т$, т. е. 4 $т$ принимаем за неделимую единицу. Поставив каждому интервалу в соответствие его номер m_i в возрастающем порядке, определим численности промежутков времени N_m (суток), в течение которых было отпущено количество сырья $n_к$, поставленное в соответствие номеру m_i (количество неделимых единиц m_i).

Величину уровня p_q — последний сравниваем с $P(\chi^2 \geqslant \chi_q^2)$ — выбираем равной 0,05.

Таблица 1

Статистические данные о количестве потребляемого сырья (натуральный каучук II сорта) за сутки в период январь — апрель 1965 года

Дата	Количество, т	Дата	Количество, т	Дата	Количество, т	Дата	Количество, т
Январь		**Февраль**		**Март**		**Апрель**	
1	0	1	7,144	1	26,649	1	15,762
2	3,402	2	21,092	2	26,310	2	16,782
3	10,885	3	14,742	4	32,667	3	5,557
4	22,020	4	16,330	5	24,946	4	16,229
5	19,215	5	9,978	6	22,338	5	16,896
6	14,628	6	11,679	7	11,794	6	3,494
7	22,680	7	12,690	8	20,391	7	18,824
8	19,842	8	21,547	9	11,339	8	15,535
9	13,494	9	13,154	10	31,184	9	13,494
10	9,071	10	13,721	11	18,658	10	5,555
11	15,309	11	14,514	12	17,089	11	12,701
12	12,814	12	10,772	13	22,001	12	16,670
13	5,556	13	4,422	14	13,158	13	4,876
14	11,112	14	13,587	15	23,896	14	16,089
15	8,845	15	21,659	16	15,535	15	11,453
16	11,567	16	17,393	17	17,803	16	14,061
17	14,175	17	12,361	18	17,690	17	3,742
18	19,051	18	19,844	19	16,670	18	16,102
19	21,998	19	16,669	20	13,607	19	18,711
20	13,380	20	18,371	21	4,649	20	11,226
21	7,597	21	14,512	22	12,928	21	21,430
22	16,669	22	10,432	23	12,474	22	16,330
23	7,484	23	21,999	24	15,875	23	14,968
24	5,002	24	26,422	25	18,370	24	12,247
25	10,519	25	20,072	26	12,474	25	13,154
26	14,174	26	18,827	27	8,728	26	12,701
27	8,050	27	8,051	28	13,948	27	19,641
28	9,979	28	20,524	29	14,742	28	10,773
29	21,065			30	6,464	29	10,319
30	15,989			31	0		
31	10,885						

Закон распределения Пуассона:

$$P(m, \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}.$$

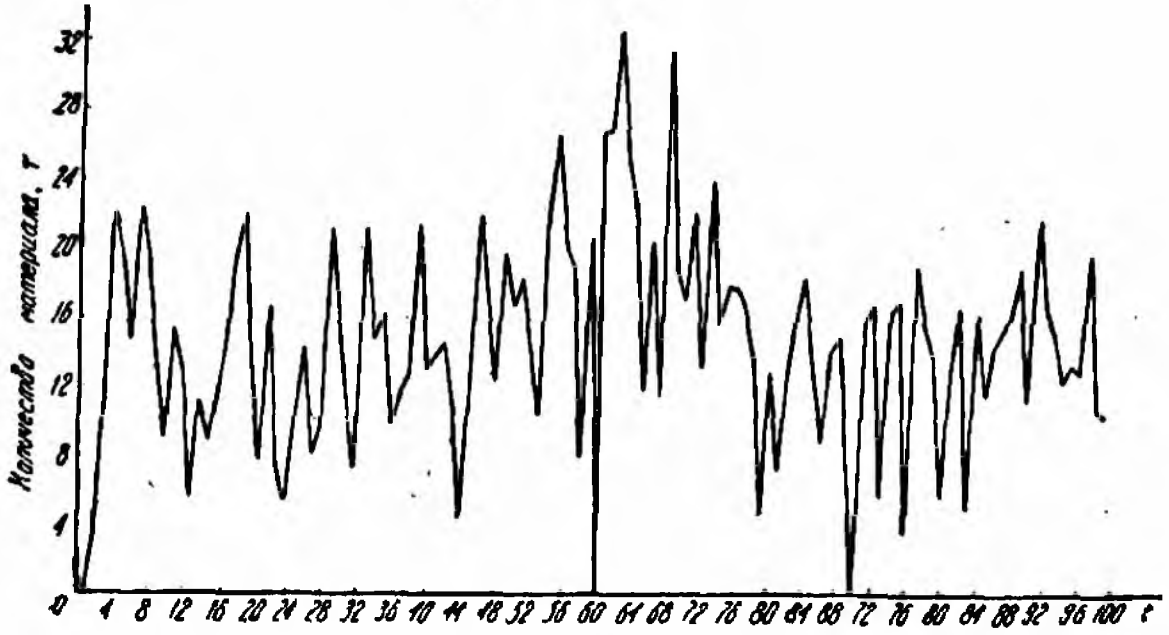


Рис. 3. Статистические данные о количестве потребляемого сырья (натуральный каучук II сорта) за сутки в период январь — апрель 1965 г.

Здесь λ — параметр закона распределения, вычисляемый по формуле

$$\lambda = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} mN_m}{N},$$

где

$$N = \sum_{m=0}^{\infty} N_m.$$

Подходящее значение $\tilde{\lambda}$ параметра λ гипотетического закона распределения находим с помощью табл. 2:

$$\lambda = 4{,}14.$$

Последовательные вычисления для определения χ_q^2 приведены в табл. 2:

$$\chi_q^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N_m - Np_m)^2}{Np_m} = 10{,}9.$$

Здесь p_m — вероятность попадания в i-ый интервал при наличии закона Пуассона;

k — число степеней свободы; $k = n - c - 1$;

n — общее число интервалов; $n = 9$;

c — число параметров, определенных на основании наблюденных данных, при $c = 1$; $k = 9 - 1 - 1 = 7$.

Для $k = 7$ [2] $\chi_q^2 = 10{,}9$; $P(\chi^2 > \chi_q^2) = 0{,}14$.

Таблица 2

Определение χ^2

m	N_m	Границы интервалов	p_m	Np_m	$N_m - Np_m$	$(N_m - Np_m)^2$	$\frac{(N_m - Np_m)^2}{Np_m}$
0	2	0	0,01830	2,2	0,2	0,04	0,0182
1	5	4	0,0732	8,7	3,7	13,6	1,56
2	12	8	0,14i5	17,0	5,0	25,0	1,47
3	22	12	0,1953	23,4	1,4	1,96	0,084
4	31	16	0,1953	22,4	7,6	57,0	2,54
5	26	20	0,1562	18,7	7,3	53,0	2,86
6	15	24	0,1041	12,5	2,5	6,25	0,5
7	4	28	0,0595	7,15	3,15	9,8	1,36
8	2	32	0,0297	3,57	1,57	2.4	0,67

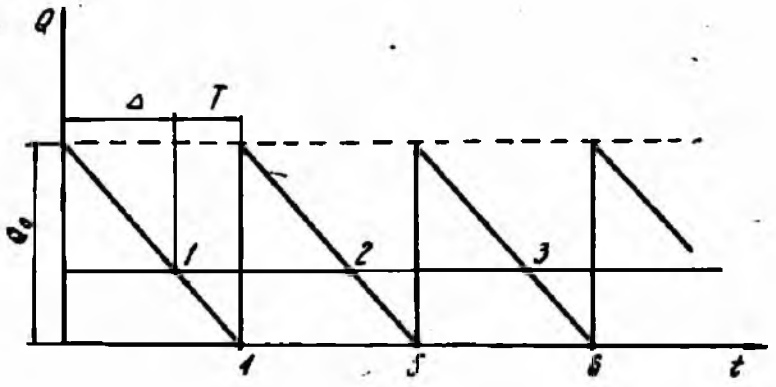


Рис. 4. Количество сырья на складе в любой момент времени при регулярных поставках и равномерном потреблении его.

Значение $P(\chi^2 > \chi_q^2) > p_q$, следовательно, гипотеза о согласии наблюденных данных с законом распределения Пуассона не опровергается.

Рассмотрим подробное предположение о регулярности поставок и введем некоторые обозначения. При регулярных поставках сырья на склад и равномерном потреблении количество сырья на складе в любой момент времени может быть представлено графиком (рис. 4), где *1*, *2*, *3* — точки выдачи заказа; *4*, *5*, *6* — время прибытия партии на склад; Q_0 — размер партии; T — время между выдачей требования на заказ и прибытием партии ($T = \text{const}$ и известно); Δ — время, в течение которого расходуется сырье партии размером Q_0, исключая сырье, необходимое для обеспечения спроса в течение времени T; λ — скорость потребления сырья (количество сырья, расходуемого за 1 сутки).

Время T определяется протяженностью пути от поставщика до склада данного предприятия, а также временем оформления заказа и приема прибывшей партии. При колебаниях T следует определить среднее квадратичное отклонение его σ_T и за величину T принять $M[T] + 3\sigma_T$.

Определяя размер партии Q_0, руководствуемся следующими соображениями. Оптимальной будем считать партию, обладающую минимальной суммарной стоимостью, т. е. расходы, связанные с оформлением заказа, хранением материала, стоимостью самого материала, должны быть минимальны.

Введем следующие обозначения: $c_{оф}$ — стоимость оформления заказа; $c_{хр}$ — стоимость хранения материала (выражена в процентах от стоимости партии материала, находящегося на складе); c_{n_1} — стоимость одной

неделимой единицы материала; N — количество всех заказов в течение года; P — количество потребного материала на 1 год в штуках; Q_0 — количество штук в одном заказе; $c_{оф}N$ — стоимость всех заказов по оформлению; c_Q — стоимость материала, находящегося на складе.

Среднее количество материала на складе $\frac{Q}{2}$ штук, тогда

$$c_Q = c_{n_1}\frac{Q_0}{2}$$

$\left(c_{n_1}\frac{Q_0}{2}\frac{c_{хр}}{100}\right.$ — стоимость хранения среднего количества материала на складе$\left.\right)$

Общая стоимость заказа

$$c_з = c_{оф}\frac{P}{Q_0} + \frac{c_{хр}c_{n_1}}{100}\frac{Q_0}{2}.$$

Для определения Q_0 найдем точку экстремума (минимума) для выражения $c_з$ по аргументу Q_0. При известных $c_{оф}$, N, c_{n_1}, $c_{хр}$ продифференцируем $c_з$ по Q_0

$$\frac{dc_з}{dQ_0} = -c_{оф}\frac{P}{Q_0^2} + \frac{c_{хр}}{200}c_{n_1};$$

приравняв это уравнение нулю, получим

$$c_{оф}\frac{P}{Q_0^2} = \frac{c_{n_1}c_{хр}}{200};$$

$$Q_0 = \sqrt{200\frac{c_{оф}P}{c_{хр}c_{n_1}}}. \qquad (1)$$

При вероятностном законе распределения спроса возможны случаи неравномерного потребления сырья. При более интенсивном потреблении, чем $\lambda = \frac{Q_0}{T}$, количество сырья Q_0 недостаточно для непрерывного процесса производства. Следовательно, возможен простой предприятия. При менее интенсивном потреблении λ создается некоторый запас материала, который расходуется в процессе производства.

Попутно введем еще одно предположение: время определения количества материала на складе в любой момент времени равно нулю. Количество материала на складе в любой момент времени при спросе, подчиняющемся вероятностному закону распределения, может быть представлено графиком (рис. 5), на котором обозначено: Q_0 — размер партии в штуках (в неделимых единицах); S_0 — общее количество материала на складе в данный момент времени; λ — средняя интенсивность потребления; Q — количество сырья, необходимое для обеспечения производства в течение времени T при средней интенсивности потребления его λ; $Q = \lambda T$; *1*, *2*, *3* — возможные точки заказа, *2* — точка заказа при потреблении с интенсивностью λ; *1* — точка заказа при интенсивности потребления выше средней; *3* — точка заказа при интенсивности потребления ниже средней; *4*, *5*, *6* — время прибытия партий на склад, соответствующее точкам заказа *1*, *2*, *3*.

При потреблении более интенсивном, чем среднее, возможен простой предприятия, а следовательно, значительные убытки от прерывания производственного процесса. Чтобы застраховаться от возможного простоя, необходимо иметь дополнительный запас. Этот запас используется при интенсивности потребления выше средней. Размер страхового запаса

в настоящее время берется приблизительно. Достигается это введением эмпирического коэффициента $\alpha = 0{,}5 \div 2{,}0$. Необоснованный выбор размера страхового запаса приводит часто к излишнему затариванию складов, следствием чего является порча дорогостоящего сырья, дополнительные издержки от хранения его, либо другая крайность — простой предприятия. В обоих случаях предприятие несет колоссальные убытки, которые могут быть почти полностью устранены при правильном (оптимальном) выборе размера страхового запаса.

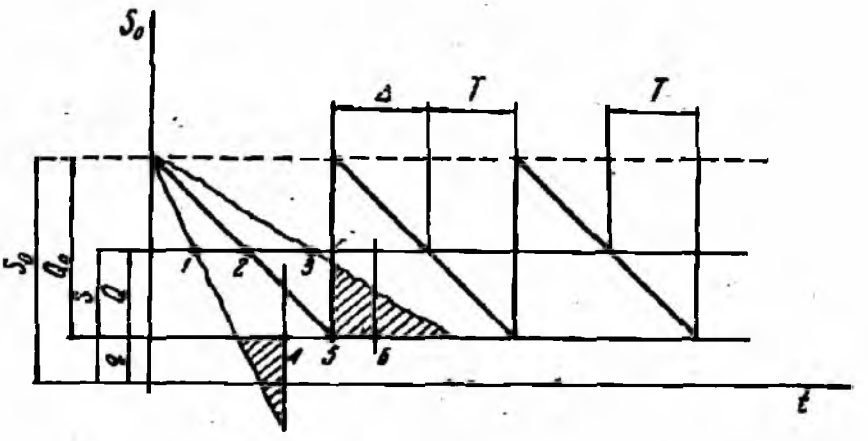


Рис. 5. Количество сырья на складе в любой момент времени при регулярных поставках и вероятностном спросе.

На графике рис. 5 страховой запас обозначен q. Размер его следует определять, исходя из условия суммарных минимальных издержек хранения его и простоя предприятия ввиду нехватки сырья данного наименования.

Математическое ожидание стоимости возможного простоя предприятия определяется выражением

$$M[c_{пр}] = c_{пр}(p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 2 + \ldots + p_k k + \ldots + p_T T),$$

где p_k — вероятность простоя в течение k дней;

$c_{пр}$ — стоимость простоя предприятия в течение одного дня за счет нехватки сырья данного наименования.

Так как спрос подчиняется закону распределения Пуассона,

$$p_k = \frac{(\lambda k)^s e^{-\lambda k}}{Sl},$$

где λ — средняя интенсивность потребления;

S — количество материала в штуках (неделимая единица).

Математическое ожидание стоимости простоя предприятия можно представить в виде суммы

$$M[c_{пр}] = c_{пр} \sum_{k=0}^{T} (T - k) \frac{(\lambda k)^s e^{-\lambda k}}{Sl} \lambda.$$

Переходя к интегралу, получим

$$M[c_{пр}] = c_{пр} \int_0^T (T - t)(\lambda t)^s \frac{dt}{Sle^{\lambda t}}.$$

Обозначим $c_{хр}$ — издержки от хранения единицы сырья данного наименования в течение одного дня

Введем предположения: $c_{пр} = \text{const}$ и известна; $c_{хр} = \text{const}$ и известна. Стоимость возможного простоя

$$c_{пр} = c_{пр}\lambda \int_0^T (T-t)(\lambda t)^s \frac{dt}{S!e^{\lambda t}}.$$

Издержки хранения дополнительного запаса могут быть выражены произведением

$$c_{хр} = c_{хр} qT = c_{хр}(S-Q)T.$$

Выражение для $q_{опт} = S_{опт} - Q$ получаем из условия минимальной суммарной стоимости возможного простоя и издержек хранения страхового запаса

$$\min \frac{\Delta}{\Delta S}\left(c_{пр} \int_0^T (T-t)(\lambda t)^s \frac{dt}{S!e^{\lambda t}} + c_{хр} T (S-Q)\right). \tag{2}$$

Выражение для математического ожидания стоимости простоя может быть представлено в виде

$$c_{пр} \int_0^T (T-t)(\lambda t)^s \frac{dt}{S!e^{\lambda t}} = \frac{c_{пр}T}{S!} \int_0^T (\lambda t)^s e^{-\lambda t} dt - \frac{c_{пр}}{S!} \int_0^T t(\lambda t)^s e^{-\lambda t} dt =$$

$$= \frac{c_{пр}T}{S\lambda}(-(\lambda T)^s e^{-\lambda T} - S(\lambda T)^{s-1} e^{-\lambda T} - S(S-1)(\lambda T)^{s-2} e^{-\lambda T} -$$

$$- S(S-1)(S-2)(\lambda T)^{s-3} e^{-\lambda T} - \ldots - S!(\lambda T) e^{-\lambda T} - S! e^{-\lambda T}) -$$

$$- \frac{T c_{пр}}{S!\lambda}(-S!) + \frac{1}{S!\lambda^2}(\lambda T)^{s+1} e^{-\lambda T} + (S+1)(\lambda T)^s e^{-\lambda T} +$$

$$+ (S+1) S (\lambda T)^{s-1} e^{-\lambda T} + (S+1) S (S-1)(\lambda T)^{s-2} e^{-\lambda T} + \ldots +$$

$$+ (S+1)!(\lambda T) e^{-\lambda T} + (S+1)! e^{-\lambda T} - \frac{c_{пр}}{S!\lambda^2}(S+1)!$$

Так как $\lambda T = Q$, то

$$\frac{c_{пр}}{S!\lambda^2 e^Q}(-Q^{s+1} - SQ^s - S(S-1)Q^{s-1} - S(S-1)(S-2)Q^{s-2} - \ldots -$$

$$- S! Q^2 - S! Q + S! Q e^Q) + \frac{c_{пр}}{S!\lambda^2 e^Q}(Q^{s+1} + (S+1)Q^s + (S+$$

$$+ 1)(1 - e^Q) + Qe^Q) = \frac{c_{пр}}{\lambda^2 e^Q}\left(\sum_{k=1}^{s} \frac{(S-k+1)}{k!} Q^k + \right.$$

$$\left. + (S+1)(1-e^Q) + Qe^Q\right). \tag{3}$$

Подставив выражение (3) в (2), получим

$$\min \frac{\Delta}{\Delta S}\left(\frac{c_{пр}}{\lambda^2 e^Q}\left(\sum_{k=1}^{s} \frac{(S-k+1)}{k!} Q^k + (S+1)(1-e^Q) + Qe^Q + c_{хр} T (S-Q)\right)\right). \tag{4}$$

Ввиду невозможности дифференцирования выражения (4) (наличие факториала) для получения оптимальной величины страхового запаса предлагается другой путь решения настоящей задачи.

Исследуем выражение (4). При $S \to \infty$ математическое ожидание стоимости простоя $M[c_{пр}] \to 0$

$$\lim_{S\to\infty} \frac{c_{пр}}{\lambda^2 e^Q}\left(S\sum_{k=0}^{s}\frac{Q^k}{k!} - Q\sum_{k=0}^{s}\frac{Q^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{s}\frac{Q^k}{k!} - (S+1) + (S+1) - \right.$$

$$\left. - (S+1)e^Q + Qe^Q = \frac{c_{пр}}{\lambda^2 e^Q}(Se^Q - Qe^Q + e^Q - (S+1)e^Q + Qe^Q) = 0.\right.$$

Вид кривых стоимости возможного простоя $c_{пр} = f_1(q)$ и издержек хранения страхового запаса $c_{хр} = f_2(q)$ в зависимости от его величины q показан на рис. 6.

Кривые $f_1(q)$ и $f_2(q)$ (рис. 6) имеют ступенчатый характер с величиной ступеньки по аргументу, равной выбранной неделимой единице n_1. Что касается величины изменения функции при увеличении q на 1, то для издержек хранения $f_2(q)$ она постоянна, для стоимости возможного простоя $f_1(q)$ — зависит от крутизны экстраполирующей кривой.

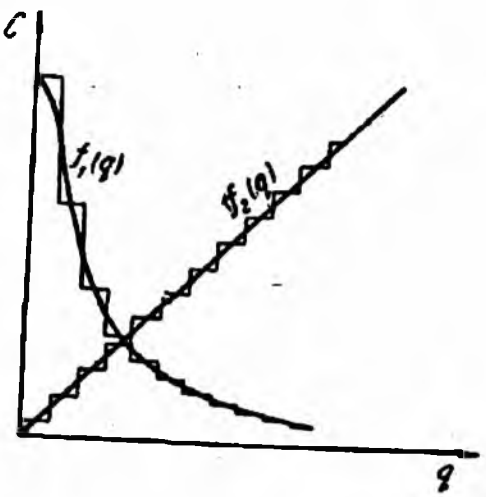


Рис. 6. Характер кривых стоимости возможного простоя $f_1(q)$ и стоимости хранения страхового запаса $f_2(q)$.

При изменении q на 1 равенство приращений функций $\Delta f_1(q) = \Delta f_2(q)$ наступает при изменении знака производной суммарной экстраполирующей кривой $f_1(q) + f_2(q)$, т. е. в момент достижения точки экстремума (min). Предложенным способом $q_{опт}$ можно определить лишь с точностью до неделимой единицы n_1, поэтому в случае получения дробного значения его следует брать ближайшее большее целое число, т. е.

$$q_{опт} = [S_{опт}] + 1 - Q.$$

Приращение для выражения стоимости простоя, соответствующее разности аргументов $S-1$ и S,

$$f(S-1) - f(S) = \frac{c_{пр}}{\lambda^2 e^Q}\left(\sum_{k=1}^{s-1}\frac{(S-k)}{k!}Q^k - \sum_{k=1}^{s}\frac{(S-k+1)}{k!}Q^k + S(1-e^Q) - \right.$$

$$\left. - (S-1)(1-e^Q) = \frac{c_{пр}}{\lambda^2 e^Q}\left(e^Q - 1 - \sum_{k=1}^{s}\frac{Q^k}{k!}\right).\right.$$

В этом случае условие нахождения оптимальной величины страхового запаса

$$\frac{c_{пр}}{\lambda^2 e^Q}\left(e^Q - 1 - \sum_{k=1}^{s}\frac{Q^k}{k!}\right) < c_{хр}T,$$

или

$$\sum_{k=1}^{s}\frac{Q^k}{k!} > e^Q - 1 - \frac{c_{хр}T\lambda^2 e^Q}{c_{пр}}. \qquad (5)$$

Рассмотрим простой пример для следующих числовых соотношений: $c_{пр} = 10^4$; $c_{хр} = 1$; $Q = 20$; $\lambda = 4{,}14$; $T = \frac{Q}{\lambda} = 4{,}83$.

Пользуясь выражением (4), определим $q_{опт}$

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{20^k}{k!} \geqslant e^{20} - \frac{20 \cdot 4{,}14^2 \cdot e^{20}}{4{,}14 \cdot 10^6}; \quad \sum_{k=1}^{s} \frac{20^k}{k!} > 4{,}8 \cdot 10^8;$$

при $s = 31$

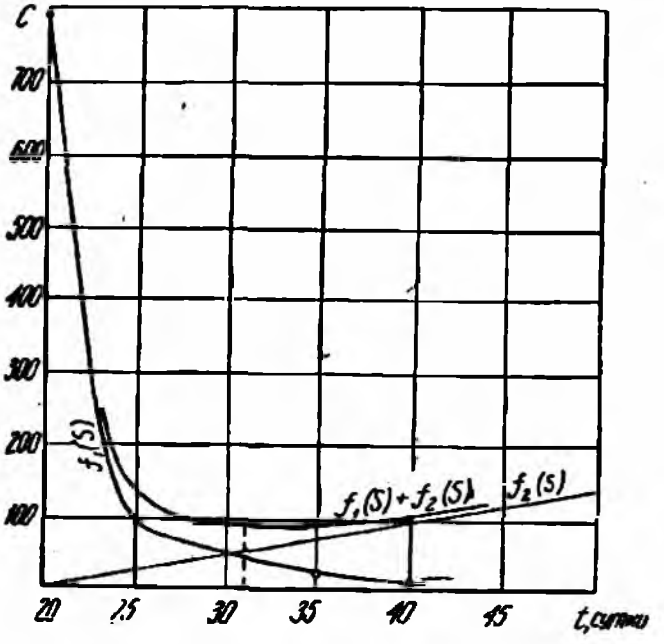


Рис. 7. Экстраполирующие кривые стоимости возможного простоя $f_1(q)$ и стоимости хранения страхового запаса $f_2(q)$ для рассматриваемого числового примера.

$$\sum_{k=1}^{31} \frac{20^k}{k!} = 4{,}803 \cdot 10^8;$$

при $s = 30$

$$\sum_{k=1}^{30} \frac{20^k}{k!} = 4{,}777 \cdot 10^8;$$

$$S_{опт} = 31,$$

$$q_{опт} = 31 - 20 = 11.$$

Следовательно, для получения минимальных убытков от простоя предприятия и хранения дополнительных запасов страховой запас нужно взять в размере $11n_1$.

Пользуясь выражением для стоимости простоя $f_1(q)$ и стоимости хранения страхового запаса $f_2(q)$

$$f_1(q) = \frac{c_{пр}}{\lambda^2 q}\left(\sum_{k=1}^{s} \frac{(S-k+1)}{k!} Q^k + (S+1) - (S+1-Q)e^Q\right),$$

$$f_2(q) = c_{хр}(S-Q)T,$$

определим для рассмотренных выше числовых соотношений несколько точек при $f_1(q)$ и $f_2(q)$, а затем построим соответствующие экстраполирующие кривые (рис. 7). Минимальное значение кривой $f_1(q) + f_2(q)$ соответствует аргументу $q = 11$. Эта величина совпадает с $q_{опт}$, определенным с помощью условия нахождения оптимальной величины страхового запаса (5).

Найденные Q_0 и $q_{опт}$ могут служить основными критериями определения размеров складских помещений при проектировании предприятий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Г. Володин и др. Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей. Судпромгиз, 1962.
2. Я. Янко. Математико-статистические таблицы. Госстатиздат, 1961.