

Ю. М. БИДНЫЙ, И. Н. ПРЕСНЯКОВ, канд. техн. наук

**ВЫСОТНО-ВРЕМЕННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ  
ДИНАМИЧНОЙ ИОНОСФЕРЫ. СООБЩЕНИЕ 2.  
ОБЕСПЕЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА**

Рассмотрим два взаимосвязанных вопроса, касающиеся асимптотического поведения расширенного фильтра Калмана для параметров состояния динамической ионосферы [1]. Определим условия и способы обеспечения устойчивости алгоритма фильтрации состояния ионосферы. Практическое значение устойчивого в вычислительном отношении фильтра трудно переоценить, поскольку решение задачи фильтрации в работе [1] находится приближенными методами. Если фильтр устойчив, то влияние ошибок линеаризации модели динамики ионосферы с течением времени будет постепенно ослабевать [2].

Устойчивость разностной системы [1], а следовательно, и алгоритма фильтрации состояния ионосферы обеспечивается выбором интервала временной дискретизации из условия

$$\Delta T \leq \frac{\Delta H^2}{2\varphi_{2\text{макс}}}, \quad (1)$$

где  $\varphi_{2\text{макс}}$  — максимальный диагональный элемент матрицы  $\varphi_2$ , соответствующий параметру состояния ионосферы с наиболее быстрыми высотно-временными изменениями.

При вычислениях по формулам алгоритма высотно-временной фильтрации параметров ионосферы с большой частотой, определяемой уравнением (1), могут возникнуть повышенные требования к быстродействию вычислителя, на вход которого поступают малоинформативные наблюдения состояния ионосферы. Кроме того, предсказание состояния часто необходимо выполнять с частотой, превышающей частоту поступления данных метода НР.

Разобьем период поступления входной информации метода НР на  $M$  подтактов предсказания состояния ионосферы, длительность которых  $\Delta t = \Delta T/M$  удовлетворяет условию (1) устойчивости разностной системы. Экстраполированное значение состояния ионосферы для  $m$ -го интервала между наблюдениями определяется в результате модификации алгоритма, рассмотренного ранее [1]:

$$\hat{A}(m/m-1) = \bar{\Phi}[\hat{A}(m-1/m-2), \Delta T, \Delta H]; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{P}_{\hat{A}}(m/m-1) = & \frac{\partial \bar{\Phi}[\hat{A}(m-1/m-2), \Delta T, \Delta H]}{\partial \hat{A}(m-1/m-2)} \vec{P}_{\hat{A}}(m-1/m-2) \times \\ & \times \frac{\partial \bar{\Phi}^T[\hat{A}(m-1/m-2), \Delta T, \Delta H]}{\partial \hat{A}(m-1/m-2)} + \bar{P}_{\Psi}(m-1), \quad m = \overline{1, M} \end{aligned} \quad (3)$$

при начальных условиях

$$\hat{A}(0/-1) = \hat{A}(k-1), \quad \vec{P}_{\hat{A}}(0/-1) = \vec{P}_{\hat{A}}(k-1). \quad (4)$$

В каждый  $k$ -й такт поступления наблюдения, отделенный от  $(k-1)$ -го  $M$  подтактами предсказания (экстраполяции), производится оценка состояния ионосферы. Экстраполированное значение вектора состояния  $\hat{A}(k/k-1)$  и ковариационная матрица его ошибок  $\vec{P}_{\hat{A}}(k/k-1)$  определяются по формулам

$$\hat{A}(k/k-1) = \hat{A}(M/M-1), \quad \vec{P}_{\hat{A}}(k/k-1) = \vec{P}_{\hat{A}}(M/M-1). \quad (5)$$

Таким образом, для обеспечения устойчивости алгоритма фильтрации целесообразно разнести текущие оценки вектора состояния ионосферы на  $M$  подтактов и провести экстраполирование его значения. Устойчивость фильтра определяет существование стационарного решения уравнений для ковариационных матриц ошибок фильтрации, наличие которого характеризует эффективность фильтра при увеличении объема измерительной информации.

Скорость сходимости расширенного фильтра Калмана к установившимся значениям ковариационных матриц ошибок  $\vec{P}_{\hat{A}}(k)$ ,  $\vec{P}_{\hat{A}}(k/k-1)$  определяется двумя основными факторами [2]: уровнем шумов наблюдения  $\Delta \hat{A}^*(k)$  и априорной неопределенностью в выборе начальной оценки состояния  $\hat{A}(0)$ . Влияние этих факторов характеризуется ковариационными матрицами  $\vec{P}_{\hat{A}}(k)$  и  $\vec{P}_{\hat{A}}(0)$  соответственно.

Уровень шумов наблюдения снижается при использовании эм-

пирических моделей высотных распределений параметров ионосферы для сглаживания результатов их измерений методом НР. Примером такой модели служит «Международная справочная модель ионосферы» [3], в которой высотные профили основных параметров описываются аналитической зависимостью  $a(h) = \bar{f}(\bar{\theta}, h)$  (6). Здесь  $\bar{f}(\cdot)$  — известная векторная функция некоторого вектора параметров  $\bar{\theta}$  и высоты  $h$ . Параметры  $\bar{\theta}$  определяются в результате статистической обработки измерительной информации метода НР, содержащейся в векторе наблюдений  $\bar{A}^*(k)$ .

Условная функция распределения наблюдений  $\bar{A}^*(k)$  при заданном значении  $\bar{\theta}$  с учетом соотношения (6) имеет вид

$$P[\bar{A}^*(k) | \bar{\theta}] = \text{const} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\bar{A}^*(k) - \bar{F}(\bar{\theta})]^T \bar{P}_{A^*}^{-1}(k) \times \right. \\ \left. \times [\bar{A}^*(k) - \bar{F}(\bar{\theta})] \right\}, \quad (7)$$

где

$$\bar{F}(\bar{\theta}) = [\bar{f}(\bar{\theta}, H_0 + \Delta H) \dots \bar{f}(\bar{\theta}, H_0 + L\Delta H)]^T;$$

Таким образом, максимально правдоподобная оценка  $\bar{\theta}^*(k)$  находится решением векторного уравнения правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^*(k)} F[\bar{\theta}^*(k)] \bar{P}_{A^*}^{-1}(k) \{\bar{A}^*(k) - \bar{F}[\bar{\theta}^*(k)]\} = \bar{0}. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) предусматривает совместную обработку всей измерительной информации, заключенной в векторе  $\bar{A}^*(k)$ . При большой размерности  $L$ -вектора это приводит к трудоемким вычислениям, связанным со значительными аппаратными и временными затратами.

Уравнение (8) можно записать в форме, для которой применим дискретный принцип максимума Понтрягина [2]:

$$J(\bar{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{L=1}^L \{ \bar{\alpha}^*(k, L) - \bar{f}[\bar{\theta}(k), L] \}^T \bar{P}_{\alpha^*}^{-1}(k, L) \{ \bar{\alpha}^*(k, L) - \\ - \bar{f}[\bar{\theta}(k), L] \}. \quad (9)$$

Гамильтониан для него имеет вид

$$\Gamma[\bar{\theta}(k), \bar{\lambda}_0(k, l), k, l] = \frac{1}{2} \{ \bar{\alpha}^*(k, l) - \bar{f}[\bar{\theta}(k), l] \}^T \bar{P}_{\alpha^*}^{-1}(k, l) \times \\ \times \{ \bar{\alpha}^*(k, l) - \bar{f}[\bar{\theta}(k), l] \} + \bar{\lambda}_0^T(k, l) \bar{\theta}(k), \quad (10)$$

а канонические уравнения задаются соотношениями

$$\bar{\theta}^*[k, l/L] = \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\lambda}_0(k, l)} \bigg|_{\bar{\theta}^*(k, l-1/L)} = \bar{\theta}(k, l-1/L); \quad (11)$$

$$\bar{\lambda}_0(k, l-1) = \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\theta}} \Big|_{\bar{\theta}^*(k, l-1/L)} = \bar{\lambda}_0(k, l) - \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^*(k, l-1/L)} \times \bar{f}[\bar{\theta}^*(k, l-1/L), l] \bar{P}_{\alpha^*}^{-1}(k, l) \{\bar{\alpha}^*(k, l) - \bar{f}[\bar{\theta}^*(k, l-1/L), l]\}. \quad (12)$$

Здесь  $\bar{\theta}^*(k, l/L)$ ,  $\bar{\theta}^*(k, l-1/L)$  — интервальные оценки максимального правдоподобия, полученные по всей последовательности  $\bar{\alpha}^*(k, l)$ ,  $l = \overline{1, L}$ .

Совместное решение уравнений (11), (12) методом инвариантного погружения [2], определяет приближенный рекуррентный алгоритм точечной оценки  $\bar{\theta}^*(k, l)$ ,  $l = \overline{1, L}$ :

$$\bar{\theta}^*(k, l) = \bar{\theta}^*(k, l-1) + \bar{P}_{\theta^*}(k, l) \frac{\partial \bar{f}[\bar{\theta}^*(k, l-1), l]}{\partial \bar{\theta}^*(k, l-1)} \times \bar{P}_{\alpha^*}^{-1}(k, l) \{\bar{\alpha}^*(k, l) - \bar{f}[\bar{\theta}^*(k, l-1), l]\}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\theta^*}(k, l) &= \bar{P}_{\theta^*}(k, l-1) - \bar{P}_{\theta^*}(k, l-1) \frac{\partial \bar{f}[\bar{\theta}^*(k, l-1), l]}{\partial \bar{\theta}^*(k, l-1)} \times \\ &\times \left\{ \frac{\partial \bar{f}[\bar{\theta}^*(k, l-1), l]}{\partial \bar{\theta}^*(k, l-1)} \bar{P}_{\theta^*}(k, l-1) \frac{\partial \bar{f}[\bar{\theta}^*(k, l-1), l]}{\partial \bar{\theta}^*(k, l-1)} + \bar{P}_{\alpha^*}(k, l) \right\}^{-1} \times \\ &\times \frac{\partial \bar{f}[\bar{\theta}^*(k, l-1), l]}{\partial \bar{\theta}^*(k, l-1)} \bar{P}_{\theta^*}(k, l-1), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $P_{\theta^*}(k, l)$  — ковариационная матрица ошибок оценивания. Начальные условия  $\bar{\theta}^*(k, 0)$ ,  $\bar{P}_{\theta^*}(k, 0)$  определяются априорными сведениями о возможных значениях вектора  $\bar{\theta}$ .

Процесс получения последовательно уточненных максимально правдоподобных оценок  $\bar{\theta}^*(k, l)$ ,  $l = \overline{1, L}$  представляет известные удобства, так как распадается на ряд повторяющихся однотипных вычислений по формулам (13), (14) в реальном масштабе времени по мере поступления измерительной информации  $\bar{\alpha}^*(k, l)$ ,  $l = \overline{1, L}$ .

Из выражения (6) следует, что сглаженный высотный профиль вектора параметров ионосферы для  $k$ -го этапа наблюдения определяется соотношением

$$\bar{\alpha}^{**}(k, h) = \bar{f}[\bar{\theta}^*(k, L), h]. \quad (15)$$

Выборочные значения этой функции для значений аргумента  $h_l = H_0 + l\Delta H$  образуют  $L$ -мерный гипервектор сглаженных наблюдений  $\bar{A}^{**}(k) = [\bar{\alpha}^{**}(k, H_0 + \Delta H) \dots \bar{\alpha}^{**}(k, H_0 + L\Delta H)]$ , который используется вместо  $\bar{A}^*(k)$  в качестве входной информации для алгоритма фильтрации параметров ионосферы. Вектор шума сглаженных наблюдений  $\Delta \bar{A}^{**}(k)$  имеет ковариационную матрицу  $\bar{P}_{\Delta^{**}}(k)$ , диаго-

нальные элементы которой  $\bar{P}_{\alpha^{**}}(k, l)$   $l = \overline{1, L}$  равны между собой и в соответствии с неравенством Крамера — Рао [2] определяются ковариационной матрицей ошибок оценки вектора  $\bar{\theta}$ . Поскольку привязка компонентов этого вектора осуществляется к высотам, для которых соотношение сигнал-шум на входе устройства, реализующего алгоритм максимально правдоподобной оценки параметров ионосферы, максимально, элементы ковариационной матрицы  $\bar{P}_{A^{**}}(k)$  существенно меньше элементов ковариационной матрицы  $\bar{P}_{A^*}(k)$ .

Априорная неопределенность при выборе начальной оценки состояния значительно сужается в результате использования информации, полученной в течение периодов стационарности ионосферы. Действительно, наряду со сравнительно быстрыми изменениями параметров ионосферы в периоды восходов и заходов Солнца, солнечных вспышек и других явлений, ее состояние для достаточно длительных временных интервалов в середине дня и ночи можно считать стационарным. В течение этих периодов целесообразно использовать упрощенную модель поведения ионосферы  $\bar{A}(k) = \bar{A}(k-1)$  (16), для которой параметры расширенного фильтра Калмана принимают вид

$$\hat{\bar{A}}(k/k-1) = \hat{\bar{A}}(k-1) \quad (17); \quad \bar{P}_{\hat{A}}(k/k-1) = \bar{P}_{\hat{A}}(k-1), \quad (18)$$

а сам фильтр вырождается в рекуррентный максимально правдоподобный оценитель начальных условий алгоритма высотно-временной фильтрации.

Длительность временного интервала, для которого справедлива модель (16), а следовательно, и момент перехода к динамической модели можно установить в результате анализа последовательности остаточных членов [2]

$$\vec{v}_A(k) = \bar{A}^*(k) - \hat{\bar{A}}(k/k-1). \quad (19)$$

Если расширенный фильтр Калмана идеально согласован с истинным поведением объекта, его остаточные члены образуют последовательность вида белого шума с нулевым средним и характеристиками

$$\bar{C}_0(k) = E \{ \vec{v}_A(k) \vec{v}_A^T(k) \} = \bar{P}_{\hat{A}}(k/k-1) + \bar{P}_{A^*}(k). \quad (20)$$

$$\bar{C}_j(k) = E \{ \vec{v}_A(k+j) \vec{v}_A^T(k) \} = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (21)$$

В случае несоответствия истинного поведения объекта его модели (16) корреляционная матрица  $\bar{C}_j(k)$ ,  $j = 1, 2, \dots$  перестает быть нулевой. Рассмотренные ситуации назовем гипотезами  $H_0$  и  $H_1$  соответственно.

Проверка коррелированности остаточных членов для принятия решения об истинности одной из этих гипотез является практически реа-

лизуемой только для стационарных эргодических последовательностей, позволяющих определять выборочную корреляционную матрицу [4]

$$\hat{R} = \hat{\Lambda}^{-1/2} \hat{C}_1 \hat{\Lambda}^{-1/2}, \quad (22)$$

где  $\hat{\Lambda} = \text{diag} \{ \hat{C}_0 \}$  (23);  $\hat{C}_0 = \sum_{i=1}^N \vec{v}_A(i) \vec{v}_A^T(i) / (N-1)$  (24);  $C_1 = \sum_{i=1}^N \times \times \vec{v}_A(i+1) \vec{v}_A^T(i) / (N-1)$  (25);  $N$  — число анализируемых остаточных членов. Поэтому ограничимся рассмотрением установившегося режима фильтрации, для которого  $\hat{P}_A(k) = \hat{P}_A(k-1)$ , и стационарных эргодических последовательностей вида белого шума в качестве ошибок оценки параметров ионосферы методом НР.

В качестве наблюдаемых данных для проверки гипотез  $H_0, H_1$  используем взвешенные значения диагональных элементов матрицы

$$\hat{r}_l = (N-1)^{1/2} \hat{R}_{ll}, \quad l = \overline{1, L} \quad (26)$$

и имеющие приблизительно гауссовские распределения с единичной диагональной ковариационной матрицей [4]

$$p[\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_L / H_0] = \text{const} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \hat{r}_i^2 \right\}; \quad (27)$$

$$p[\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_L / H_1] = \text{const} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^L (\hat{r}_i - \hat{r}_{\text{макс}})^T (\hat{r}_i - \hat{r}_{\text{макс}}) \right\}, \quad (28)$$

для гипотез  $H_0, H_1$ . Здесь  $\hat{r}_{\text{макс}} = (N-3)^{1/2} r_{\text{макс}}$ , где  $r_{\text{макс}}$  — максимальное значение диагонального элемента корреляционной матрицы остаточных членов (22).

Для экспоненциального семейства функций распределения (27), (28) оптимальная процедура принятия решения о справедливости одной из гипотез  $H_0, H_1$  заключается в сравнении с порогом  $\gamma$  натурального логарифма отношения правдоподобия [2]:

$$\ln \frac{p[\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_L / H_1]}{p[\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_L / H_0]} \geq_{H_0}^{H_1} \gamma. \quad (29)$$

После подстановки в выражение (29) соотношений (27), (28) и приведения подобных членов решающее правило принимает вид

$\sum_{i=1}^L \hat{r}_i \geq_{H_0}^{H_1} \vec{\eta}$  (30), где  $\vec{\eta}$  — векторный порог обнаружения отклонения истинного поведения объекта от его модели (16), выбираемый в соответствии с критерием Неймана — Пирсона.

Введем вероятности ошибочных решений. Вероятность ошибки первого рода, имеющей место, если отвергается гипотеза  $H_0$ , когда она справедлива:

$$P(H_1/H_0) = \int_{|\hat{r}_1|}^{|\infty|} \dots \int_{|\hat{r}_L|}^{|\infty|} p[\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_L/H_0] d\hat{r}_1, \dots, d\hat{r}_L. \quad (31)$$

Вероятность ошибки второго рода, имеющей место, если отвергается гипотеза  $H_0$ , когда она справедлива:

$$P(H_0/H_1) = \int_{-\eta}^{+\eta} \dots \int_{-\eta}^{+\eta} p[\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_L/H_1] d\hat{r}_1, \dots, d\hat{r}_L. \quad (32)$$

Задав значение  $P(H_1/H_0)$  и решив (31) относительно  $\eta$ , получим значение порога, минимизирующего вероятность ошибки второго рода (32).

Полученный на основе упрощающих предположений в алгоритме высотно-временной фильтрации рекуррентный максимально правдоподобный оценщик характеризуется высокой точностью формирования начальных условий для фильтрации динамики состояния ионосферы и существенно ускоряет сходимость его алгоритма.

На рис. 1 отображена синтезированная система фильтрации параметров ионосферы по их измерениям методом НР. Представленная система наряду с расширенным фильтром Калмана вклю-

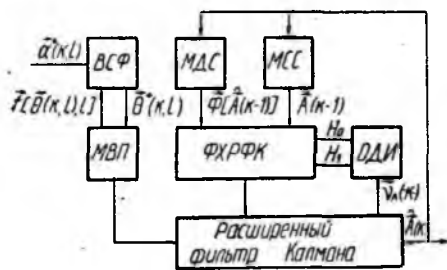


Рис. 1

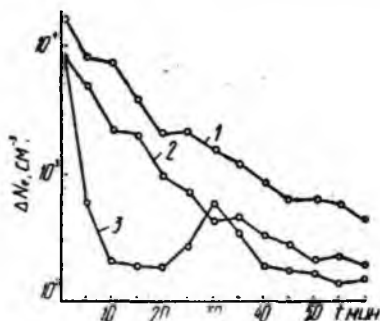


Рис. 2

чает в себя высотный сглаживающий фильтр (ВСФ), использующий модель высотного профиля (МВП) параметров ионосферы; формирователь характеристик расширенного фильтра Калмана (ФХРФК); модель динамики состояния (МДС) и модель стационарности состояния (МСС) ионосферы. Решение о необходимости использования одной из этих моделей выносится на основе анализа коррелированности остаточных членов расширенного фильтра Калмана в обнаружителе динамики ионосферы (ОДИ).

Для исследования эффективности рассмотренных алгоритмов расширенного фильтра Калмана совместно с устройствами ускорения его сходимости было выполнено моделирование динамики состояния ионосферы для диапазона высот

$H_0 = 175$  км,  $H_L = 250$  км с временным и высотным шагами соответственно  $\Delta T = 1$  мин,  $\Delta H = 15$  км. Реализации аддитивной смеси имитации динамики состояния и шума наблюдения обрабатывались расширенными фильтрами Калмана без устройств ускорения его сходимости и с ними. На рис. 2 кривыми 1, 2, 3 показаны результаты моделирования для ошибок фильтрации электронной концентрации на высоте  $h = 190$  км соответственно без устройств ускорения сходимости, при использовании высотного сглаживания, с высотным сглаживанием и предварительным формированием начальных условий на участке стационарности  $\tau_{ст} = 20$  мин. Кривая 3 имеет подъем, вызванный инерционностью схемы ОДИ, в которой коррелированность остаточных членов проверялась по  $N = 10$ . После обнаружения выхода из пределов участка стационарности сформированные начальные условия использовались расширенными фильтрами Калмана с высотным сглаживанием.

Анализ представленных на рис. 2 характеристик показывает существенное ускорение сходимости алгоритма фильтрации при использовании высотного сглаживания наблюдений и предварительного формирования начальных условий на участке стационарности ионосферы.

**Список литературы:** 1. Бидный Ю. М., Пресняков И. Н. Высотно-временная фильтрация параметров состояний динамичной ионосферы. Сообщение 1. Синтез общей структуры фильтра // Радиотехника.— 1987.— Вып. 80.— С. 47—54. 2. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении: Пер. с англ. / Под ред. Б. Р. Левина.— М.: Связь, 1976.— 496 с. 3. Rawer K., Bilitza D., Arnold F. International reference ionosphere-79 // World Data Center asolar-Terrestrial Physics Report.— 1981. 82. P. 1—25. 4. Оэн Р. Ф., Стабберуд А. Р. Адаптивное оценивание с минимальной дисперсией в дискретных линейных системах // Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах: Сб. науч. тр.— 1980.— С. 120—128.

Поступила в редколлегию 26.06.85.