УДК 621.372
А.В. Грицунов, *д.ф.-м.н., профессор кафедры ЗИ*
Академия военно-морских сил Украины имени П.С.Нахимова
ул. Дыбенко, 1А, г. Севастополь, 99028
gritsunov@list.ru
Н.В. Масолова, *к.ф.-м.н., доцент кафедры МЭПУ*
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
пр. Ленина, 14, г. Харьков, 61166
О.И. Харченко, *к.т.н., доцент кафедры ЗИ,*
В.И. Чумаков, *д.т.н., профессор кафедры ЗИ*
Академия военно-морских сил Украины имени П.С.Нахимова
ул. Дыбенко, 1А, г. Севастополь, 99028

ВЫБОР БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ДВУМЕРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДАМИ МАТРИЧНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Рассмотрена методика синтеза локализованных в пространстве базисных функций (парциальных функций, осциллетов) для расчета двумерной электродинамической системы методами матричной электродинамики.

Ключевые слова: распределенная колебательная система, численное решение, нестационарные электромагнитные потенциалы.

Рис.3, библ.7

Распространение цифровых технологий передачи информации привело к несоответствию потребностей практики возможностям теории при исследовании нелинейных взаимодействий электромагнитных потенциалов с заряженными частицами и материальными средами. Цифровая информация существенно отличается от аналоговой с точки зрения временных и спектральных характеристик. Несмотря на появление нового направления в радиотехнике и радиофизике – теории и техники сверхширокополосных (СШП) электромагнитных импульсов, современная электродинамика по прежнему базируется, главным образом, на теоретических методах, разработанных для анализа узкополосных сигналов. Существующие вычислительные методы [1] также не вполне удовлетворяют возросшим потребностям практики. Таким образом, проблема поиска новых теоретических подходов к решению современных электродинамических задач остается актуальной.

Одним из новых подходов в электродинамике СШП импульсов является декомпозиция электромагнитных потенциалов с финитным спектром по базису локализованных в пространстве парциальных функций ЭС (парциальных осцилляторов, осциллетов), описанных в [2]. Ряд по парциальным функциям можно считать неким обобщением ряда Шеннона-Уиттекера (Котельникова) на пространственные координаты, учитывающим граничные условия (ГУ) на стенках ЭС. В работе [3] отмечена аналогия предложенного в [2] математического аппарата с матричной механикой Гейзенберга, позволяющая положить его в основу т.н. матричной электродинамики. Последняя базируется на решении систем линейных алгебраических уравнений (в противоположность волновой электродинамике, основанной на интегрировании уравнений в частных производных).

В статье [3] описана методика синтеза структуры парциальных функций одномерной электродинамической системы с учетом ГУ, а также методами матричной электродинамики рассчитаны собственные числа одномерной ЭС с периодическими ГУ и ГУ второго рода. Результаты свидетельствуют о перспективности матричного подхода к решению электродинамических задач. Однако использование в указанной работе одномерного приближения существенно ограничивает общность полученных в ней результатов.

В настоящее время проводятся попытки применения методов матричной электродинамики к решению наиболее актуальных электродинамических задач (расчет собственных волновых чисел ЭС, расчет вынужденных колебаний ЭС при внешнем негармоническом воздействии и т.п.). Особое внимание уделяется применению новых подходов к моделированию возбуждения в ЭС СШП электромагнитных потенциалов, поскольку базис парциальных осцилляторов, благодаря их пространственной локализации, наиболее естественно применим к расчету коротких электромагнитных импульсов (т.е. ряды по парциальным функциям ЭС в этом случае должны сходиться быстрее, чем ряды по собственным функциям этой же системы).

Целью данной статьи является разработка методики синтеза локализованных в пространстве базисных функций двумерной ЭС, обеспечивающей наиболее оптимальную структуру этих функций с точки зрения точности последующего решения электродинамических задач методами матричной электродинамики, а также минимизации вычислительных затрат.

Будем рассматривать ЭС как распределенную колебательную систему, родовой электромагнитный потенциал $\mathfrak{A}(t,x,y,z)$ [4] в объеме V которой описывается неоднородным волновым уравнением:

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\mathfrak{A}=\mu_0\mathfrak{J} \tag{1}$$

с однородными ГУ первого или второго рода или условиями периодичности на границах. $\mathfrak{J}(t,x,y,z)$ – родовая плотность тока [4]. Предположим, что спектр функции $\mathfrak{A}$ в области волновых чисел $\vec{k}$ финитен: $\left|\vec{k}\right|\le k_{max}<\infty$. Используя метод разделения переменных, решение уравнения (1) запишем в виде конечного ряда по парциальным функциям ЭС:

$$\mathfrak{A}(t,x,y,z)=\mathbf{u}_p(t)\boldsymbol{\mathfrak{A}}_p(x,y,z)\,, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\mathfrak{A}}_p$ – вектор-столбец из N вещественных парциальных функций; $\mathbf{u}_p$ – вектор из N мгновенных значений этих функций; N – количество собственных значений ЭС (квадратов собственных волновых чисел), меньших или равных k_{max}^2, включая кратные.

Вектор $\boldsymbol{\mathfrak{A}}_p$ является решением задачи о взаимных значениях для самосопряженного линейного дифференциального оператора $-\nabla^2$. Данная задача заключается в нахождении нетривиального решения матричного уравнения

$$\nabla^2\boldsymbol{\mathfrak{A}}_p+\left[k_p^2\right]\boldsymbol{\mathfrak{A}}_p=0 \tag{3}$$

в объеме V с однородными ГУ первого или второго рода или условиями периодичности на границах, пространственно локализующего все элементы вектора $\boldsymbol{\mathfrak{A}}_p$. Локализация означает достаточно быстрое приближение всех составляющих функции $\mathfrak{A}_{pn}$ ($n = 0 \ldots N–1$) к нулю при удалении во все стороны от ее глобального экстремума. Матрица взаимных значений $\left[k_p^2\right]$ размером $N\times N$ содержит N^2 квадратов взаимных волновых чисел парциальных осцилляторов. N собственных чисел этой матрицы совпадают с наименьшими собственными значениями ЭС, повторяя их кратность.

Условие ортогональности первого рода для парциальных функций имеет вид:

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_V dxdydz\boldsymbol{\mathfrak{A}}_p\boldsymbol{\mathfrak{A}}_p^T=\left[\tilde{W}_p\right], \tag{4}$$

где верхний индекс T означает транспонирование вектора. $\left[\tilde{W}_p\right]$ – симметрическая матрица размером $N\times N$, содержащая N^2 единичных взаимных псевдоэнергий [4] родового потенциала парциальных осцилляторов.

Условие ортогональности второго рода с учетом самосопряженности оператора $-\nabla^2$ записывается в виде:

$$\frac{1}{2\mu_0}\int_V dxdydz(-\nabla^2\mathfrak{A}_p)\mathfrak{A}_p^T = \frac{1}{2\mu_0}\int_V dxdydz\mathfrak{A}_p(-\nabla^2\mathfrak{A}_p^T) = \left[W_p\right], \tag{5}$$

где $\left[W_p\right]$ – симметрическая матрица размером $N \times N$, содержащая N^2 единичных взаимных энергий родового потенциала парциальных осцилляторов.

Для парциальных осцилляторов имеет место соотношение, аналогичное формуле Рэлея для нормальных мод:

$$\left[k_p^2\right] = \varepsilon_0\mu_0\left[W_p\right]\left[\tilde{W}_p\right]^{-1}, \tag{6}$$

где верхний индекс (–1) означает обращение матрицы. Надлежащим выбором матрицы формы нормальных мод $\left[F\right]$ размером $N \times N$ [5] можно диагонализировать матрицу взаимных значений, получив в результате матрицу собственных значений ЭС $\left[k_e^2\right]$:

$$\left[k_e^2\right] = \left[F\right]\left[k_p^2\right]\left[F\right]^{-1}. \tag{7}$$

Вектор *N* собственных функций ЭС $\mathfrak{A}_e$ является линейным преобразованием вектора парциальных функций с найденной матрицей формы:

$$\mathfrak{A}_e = \left[F\right]\mathfrak{A}_p, \text{ соответственно } \mathfrak{A}_p = \left[F\right]^{-1}\mathfrak{A}_e. \tag{8}$$

Относительная величина функций в векторе $\mathfrak{A}_e$ называется нормировкой осциллетов. В [2] описаны четыре возможные нормировки: амплитудная, энергетическая первого рода, энергетическая второго рода и специальная. Там же рассмотрены типы парциальных функций с точки зрения их структур в двух- и трехмерном пространстве (скалярные, потенциальные векторные, соленоидальные векторные одного или двух типов, поперечные векторные).

Аналогом неоднородного волнового уравнения (1) в матричной электродинамике является система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в матричном виде записываемая как:

$$\left[\tilde{W}_p\right]\frac{d^2\mathbf{u}_p}{dt^2} + \left[W_p\right]\mathbf{u}_p = \mathbf{w}_p, \tag{9}$$

где $\mathbf{w}_p(t)$ – вектор парциальных энергий родовых токов (энергий этих токов в единичных родовых потенциалах парциальных осцилляторов):

$$\mathbf{w}_p = \frac{1}{2}\int_V dxdydz\mathfrak{A}_p\mathfrak{J}. \tag{10}$$

Формулы (2) – (10) составляют математический аппарат матричной электродинамики. С физической точки зрения осциллеты можно считать «облаками» родового потенциала, изменяющимися во времени как единое целое. К ним можно применить матричную теорию колебательных систем с сосредоточенными параметрами и *N* степенями свободы [6], интерпретируя ЭС в целом как некую «решетку» электродинамически связанных между собой парциальных осцилляторов. Каждая парциальная функция является собственной функцией одной из *N* парциальных колебательных систем, получаемых из исходной системы с *N* степенями свободы путем фиксации *N*–1 независимых обобщенных координат [5] (этим объясняется ее название).

В работе [2] приведены фундаментальные свойства парциальных функций ЭС. Каждая функция $\mathfrak{A}_{pn}$ ($n = 0 \ldots N–1$), удовлетворяющая уравнению (3) с однородными ГУ первого или второго рода или условиями периодичности на стенках ЭС, должна обладать этими свойствами. Примем (без доказательства) обратное предположение: любая функция, обладающая всеми фундаментальными признаками парциальной функции, является одним из решений уравнения (3) с вышеуказанными ГУ. Тогда, если некоторые из N парциальных функций ЭС известны априори, количество неизвестных функций в уравнении (3) соответственно уменьшается.

Например, осцилляторы, удаленные от границ ЭС, практически тождественны парциальным функциям свободного пространства (согласно теореме о сдвиге [7], пространственное перемещение осциллета изменяет лишь его фазовый спектр в базисе собственных функций ЭС). Кроме того, если эти осцилляторы расположены регулярно, идентичны также их электродинамические параметры (взаимные псевдоэнергии и энергии). Методика учета ГУ для осцилляторов, расположенных вблизи стенок ЭС, в общем виде описана в [3]. В ряде случаев удается учесть ГУ и более простым способом (путем наложения «зеркальных отражений» осциллетов свободного пространства в плоских металлических поверхностях).

При попытке применить соотношения (2) – (10) к решению практических задач возникает ряд проблем, среди которых, помимо вышеупомянутого учета ГУ, следует отметить обеспечение финитности осциллетов в пространстве.

Любая нетривиальная линейная комбинация конечного числа собственных функций ЭС не обращается тождественно в нуль во всем объеме V. Поэтому, в строгом смысле, пространственная локализация парциальных функций не обеспечивает им каких-либо преимуществ перед собственными функциями с точки зрения объема вычислений. С другой стороны, если потенциалы всех парциальных осцилляторов достаточно быстро уменьшаются при удалении от их экстремумов, «принудительное» ограничение объема каждого осциллета до некоторого минимально допустимого значения практически не влияет на элементы матриц $\left[\tilde{W}_p\right]$ и $\left[W_p\right]$.

В работе [3] показано, что оптимальным способом обеспечения финитности одномерных парциальных осцилляторов является применение усеченной гауссовой нормировки. Есть основания полагать, что данный вывод справедлив также для двух- и трехмерных осциллетов. Кроме того, для уменьшения краевых эффектов при численном дифференцировании функций $\mathfrak{A}_{pn}$ (с целью вычисления их лапласианов $\nabla^2\mathfrak{A}_{pn}$) следует одновременно использовать оконное взвешивание.

Результаты синтеза парциальных функций двумерного свободного пространства с учетом вышеизложенных соображений приведены на рисунках. В частности, на рис. 1 изображен скалярный осциллет. На рис. 2 показаны x- и y- компоненты потенциального векторного парциального осциллятора. Рис. 3 изображает аналогичные составляющие соленоидального векторного осциллета. Все три парциальные функции синтезированы путем линейного преобразования нормальных мод свободного пространства по формуле (8), причем амплитуды нормальных мод уменьшаются с возрастанием абсолютного значения их волнового числа по гауссовому закону.

Таким образом, в настоящей работе на примере двумерной электродинамической системы исследована одна из проблем матричной электродинамики – синтез финитных парциальных осцилляторов для неограниченной пространственной области. Выбран оптимальный метод решения данной задачи – применение усеченной гауссовой нормировки в сочетании с оконным взвешиванием. Среди направлений дальнейших исследований следует выделить разработку методов учета ГУ в ЭС со сложными границами.

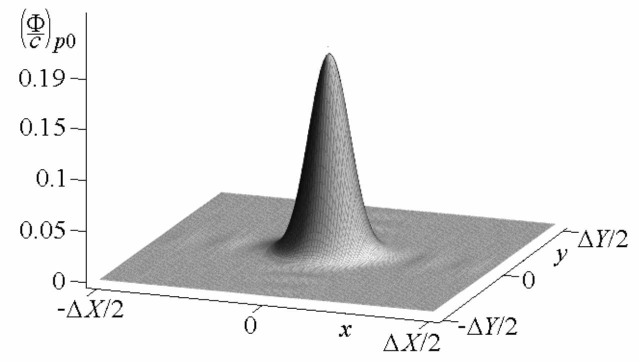

Рисунок 1 – Скалярный осциллет

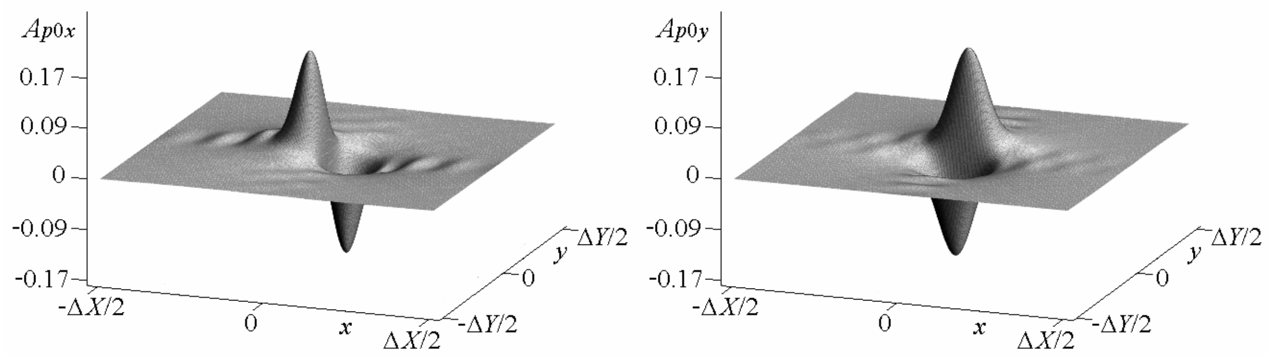

Рисунок 2 – Потенциальный векторный осциллет

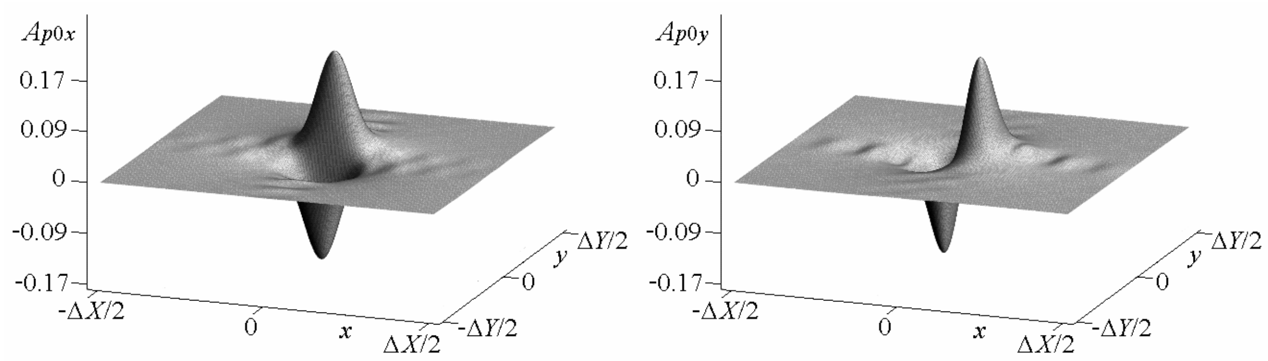

Рисунок 3 – Соленоидальный векторный осциллет

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Sadiku M.N. O. Numerical Techniques in Electromagnetics. – Boca Raton, FL, 2001. – 750 p.
2. Грицунов А.В. Разложение нестационарных электромагнитных потенциалов по парциальным функциям электродинамической системы // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2006. – Т. 49, № 7. – С. 10-20.
3. Веревкина А.В., Грицунов А.В. К теории матричных методов в электродинамике // Вестник Днепропетровского ун-та, сер. «Физика. Радиоэлектроника». – 2008. – Вып. 15, №2/1. – С. 44-51.
4. Грицунов А.В. Методы расчета нестационарных негармонических полей в направляющих электродинамических системах // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52, № 6. – С. 645-661.
5. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
6. Василенко Н.В. Теория колебаний. – К.: Техніка, 1992. – 430 с.
7. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш. шк., 1986. – 512 с.

Статья рекомендована в печать кафедрой защиты информации Академии ВМС Украины им. П.С.Нахимова.