*Материалы XVII Международного молодежного форума «**Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке**»*
(Харьков, ХНУРЭ, 22 – 24 апреля 2013). – Т. 7.

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ФИЛЬТРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ ПОД ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМ СООРУЖЕНИЕМ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ

Блишун А.П.
Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. Прикладной математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: alexander.blishun@gmail.com

The flat filtration flow under hydraulic structure with grooves is considered. Soil is supposed to be partially homogeneous. For the decision of this task, the approached method based on the method of R-functions and Ritz's method is proposed. An approach for several areas is obtained.

В последние годы наблюдается сильное снижение естественной дренажности и устойчивый подъем уровня грунтовых вод, что приводит к подтапливанию аграрных, городских и др. ландшафтов. Поэтому проблема математического моделирования движения грунтовых вод (т.н. фильтрационных течений) в пористых средах является актуальной. В частности, при проектировании различных гидротехнических сооружений возникает необходимость численно моделировать движение жидкости в пористых средах.

Рассмотрим задачу движения несжимаемой жидкости под гидротехническим сооружением (плотиной). На рис. 1 приведена схема фильтрации. Здесь $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ – область фильтрации, $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_3$ – проницаемые участки границы, $\partial\Omega_2$ − граница основания плотины (флютбета), $\partial\Omega_4$ − граница водонепроницаемой области, $\partial\Omega_5$ − шпунт.

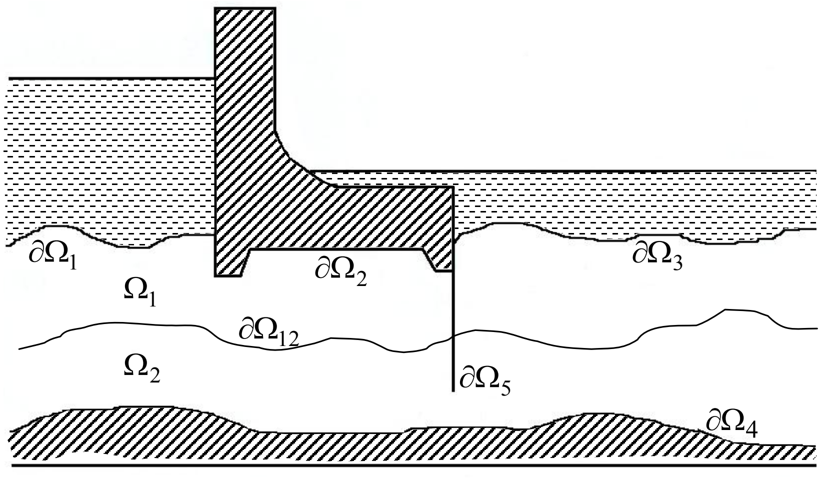

Рис. 1

Считаем, что стационарная фильтрация несжимаемой жидкости описывается в рамках линейного закона Дарси уравнениями [1]

$$\mathrm{div}\vec{u} = 0\,, \quad \vec{u} = -\kappa(\vec{x})\nabla h\,, \quad \vec{x} \in \Omega\,,$$

где $\vec{u}$ − скорость фильтрации, $\kappa(\vec{x})$ − коэффициент фильтрации, h− пьезометрический напор. В плоском случае $\vec{x}=(x_1,x_2)$ для численного анализа фильтрационного течения удобнее использовать функцию тока $\psi(x_1,x_2)$, вводимую соотношениями

$$u_{x_1}=-\kappa(x_1,x_2)\frac{\partial h}{\partial x_1}=\frac{\partial\psi}{\partial x_2},\quad u_{x_2}=-\kappa(x_1,x_2)\frac{\partial h}{\partial x_2}=-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}.$$

Тогда для функции тока $\psi(x_1,x_2)=\begin{cases}\psi_1(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in\Omega_1,\\ \psi_2(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in\Omega_2,\end{cases}$ можно получить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\kappa(x_1,x_2)}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\kappa(x_1,x_2)}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)=0,\ (x_1,x_2)\in\Omega. \quad (1)$$

Грунт будем предполагать кусочно-однородным так, что

$$\kappa(x_1,x_2)=\begin{cases}\kappa_1,\ (x_1,x_2)\in\Omega_1,\\ \kappa_2,\ (x_1,x_2)\in\Omega_2.\end{cases}$$

Пусть линия $\partial\Omega_{12}$ является линией раздела двух грунтов. Тогда на участке $\partial\Omega_{12}$ ставятся условия сопряжения

$$\psi_1\big|_{\partial\Omega_{12}}=\psi_2\big|_{\partial\Omega_{12}},\quad \kappa_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega_{12}}=\kappa_2\frac{\partial\psi_2}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega_{12}}, \quad (2)$$

где $\vec{n}$ – нормаль к $\partial\Omega_{12}$.

На проницаемых участках границы $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_3$ области фильтрации Ω ставятся однородные условия второго рода

$$\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_3}=0. \quad (3)$$

Условие (3) соответствует постоянству напора на $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_3$. Водоупор $\partial\Omega_4$, флютбет $\partial\Omega_3$ со шпунтом $\partial\Omega_5$ водонепроницаемы и, значит, функция тока на них принимает постоянные значения. Положим, что

$$\psi\big|_{\partial\Omega_4}=Q,\quad \psi\big|_{\partial\Omega_3\cup\partial\Omega_5}=0, \quad (4)$$

где величина Q задаёт общий расход жидкости.

Для решения задачи (1) – (4) воспользуемся методами R-функций [2] и Ритца [3].

1. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / Ляшко И.И., Сергиенко И.В., Мистецкий Г.Е., Скопецкий В.В. Изд. 2-е, перераб. и доп. – К.: Нак. думка, 1981. – 296 с.

2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.