УДК 519.8

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ МНОГОФАКТОРНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

ОВЕЗГЕЛЬДЫЕВ А.О., ПЕТРОВ К.Э.

Рассмотрены подходы к параметрической идентификации линейных моделей многофакторного оценивания, основанные на теории компараторной идентификации. Модели позволяют определять весовые коэффициенты факторов, характеризующих важность частных критериев исходя из принятых экспертом решений.

В рамках общего подхода к параметрической идентификации модели оценивания целесообразно разработать проблемно-ориентированные процедуры, которые должны учитывать особенности проведения экспериментов, вид и качественные характеристики исходной информации.

Рассмотрим модели идентификации для типичных ситуаций, но сначала сформулируем общие для всех случаев гипотезы.

1. ЛПР предъявляются для оценивания N альтернатив, каждая из которых характеризуется одинаковым набором n разнородных параметров (частных критериев), заданных количественно. На стадии подготовки исходной информации все частные критерии $\mathbf{k_i}(x)$ приведены к изоморфному виду, т.е. определены их функции полезности $\mathbf{p_i[k_i(x)]}$ [1], которые в дальнейшем для простоты записи будем обозначать p_i. Таким образом, множество альтернатив, подлежащих оценке, характеризуется матрицей

$$\theta = \left\| \begin{matrix} \mathbf{p_{11}\, p_{12} \cdots p_{1n}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{p_{N1}\, p_{N2} \cdots p_{Nn}} \end{matrix} \right\| . \qquad (1)$$

2. В качестве модели оценивания принята аддитивная теория полезности [2], что однозначно определяет структуру модели. Это означает, что обобщенная полезность каждой из заданных альтернатив для ЛПР определяется матрицей

$$P = q \times A, \qquad (2)$$

где $A = \| a_i \|^T$, $\mathbf{i = \overline{1,n}}$ — матрица-столбец весовых коэффициентов факторов, характеризующих важность частных критериев. Ставится задача определения коэффициентов относительной важности частных критериев, что обеспечивается следующими условиями:

$$\mathbf{a_i \in [0,1], \forall i = \overline{1,n}}, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a_i = 1} .$$

3. Принятие теории полезности в качестве базовой однозначно определяет правило ранжирования альтернатив:

$$\text{если } \mathbf{x_i, x_j \in X}, \text{ то } \mathbf{x_i \succ x_j \leftrightarrow P(x_i) > P(x_j)}, \qquad (4)$$

$$\mathbf{x_i \sim x_j \leftrightarrow P(x_i) = P(x_j)}.$$

На указанных трех гипотезах базируется синтез процедур параметрической идентификации модели оценивания, т. е. методов определения численных значений матрицы относительных весовых коэффициентов A.

В основу классификации ситуаций оценивания положим глубину интроспективного анализа экспертом процесса оценивания.

1. В результате компараторного эксперимента [3] устанавливается только наиболее предпочтительная (наилучшая) альтернатива. Особая ценность такого случая заключается в том, что исходную информацию можно получить в результате пассивного эксперимента, т. е. в процессе нормальной рабочей ситуации выбора, например: выбор покупателем одного товара из множества однотипных; вакансии для трудоустройства; результаты тендерного конкурса, выбор поставщика и т. п. Особенность заключается в том, что эксперимент не планируется специально, эксперта не нужно готовить, а следовательно, он может даже не знать о проведении эксперимента. Отсюда вытекает возможность повышения объективности информации, проведение наблюдений на большой выборке и т. п. Вместе с тем это наименее информативная, как будет показано ниже, ситуация.

2. В результате компараторного эксперимента на множестве альтернатив установлено отношение строгого порядка. Это означает, что фактор-множество B' не содержит классов элементов с равными полезностями, т. е. на множестве альтернатив $x_i \in X$, $\mathbf{i = \overline{1,N}}$ установлены предпочтения

$$x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_N , \qquad (5)$$

что означает

$$\mathbf{P(x_1) > P(x_2) > \ldots > P(x_N)}, \qquad (6)$$

где $P(x_i)$ — функция обобщенной полезности альтернатив. Такую информацию можно получить только в результате активного эксперимента с одним или группой экспертов, используя одну из методик качественного экспертного оценивания [4].

Рассматриваемая ситуация более информативна по сравнению со случаем 1 (определена только лучшая альтернатива), когда можно получить только (N − 1) неравенств. В данном случае на основе (6) можно получить C_N неравенств:

$$\mathbf{C_N = 0.5 \cdot N!/(N-2)!} \qquad (7)$$

Таким образом, случай 2 отличается от случая 1 только количественно (числом возможных неравенств), но не качественно.

3. В результате компараторного эксперимента на множестве альтернатив $x_i \in X$, $\mathbf{i = \overline{1,N}}$ установлено отношение частичного линейного порядка:

$$\{x_1 \sim x_2\} \succ \{x_3\} \succ \{x_4 \sim x_5 \sim x_6\} \succ \ldots \qquad (8)$$

Это означает, что фактор-множество B' содержит классы элементов с равными полезностями, на которых установлено отношение строгого порядка, т. е. соответственно (8):

$$\{P(x_1)=P(x_2)\} > \{P(x_3)\} > \{P(x_4)=P(x_5)=P(x_6)\} > \ldots \qquad (9)$$

При этом, как отмечалось ранее, в общем случае некоторые классы эквивалентностей содержат по одному элементу.

Для любой пары альтернатив, принадлежащих одному классу эквивалентностей K_m, $m = \overline{1,M}$, можно записать равенство

$$P(x_i) = P(x_j);\ x_i,\ x_j \in K_m. \qquad (10)$$

Если обозначить количество элементов в классе эквивалентности K_m через n_m, то общее число равенств вида (10), которые могут быть сформированы, будет равно

$$R = 0.5\sum_{m=1}^{M} N_m!/(N_m - 2)!. \qquad (11)$$

Кроме того, независимо от структуры фактор-множества B' можно сформировать C_N неравенств, где N – количество анализируемых альтернатив.

Равенства более информативны для целей идентификации параметров модели оценивания, чем неравенства, так как каждое равенство позволяет уменьшить на единицу количество переменных и конструктивно сузить область возможных значений искомых переменных. Очевидно, что если R i (n – 1), где n – размерность искомой матрицы весовых коэффициентов факторов A, и система равенств совместна, то с учетом уравнения (3): $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ можно определить единственно точное решение, в то время как неравенства, независимо от их числа, определяют только область возможных решений.

4. В результате эксперимента получены количественные оценки полезности множества альтернатив $x_i \in X$, $i = \overline{1,N}$. Это означает, что эксперименты проводятся в соответствии с одной из методик получения количественных экспертных оценок [4]. В результате экспертом указано не только отношение порядка на множестве альтернатив, но и положение каждой альтернативы на числовой оси. Это означает, что для каждой альтернативы x_i может быть записано уравнение

$$P(x_i) = C_i;\ i = \overline{1,N}, \qquad (12)$$

где C_i – количественная оценка полезности i-й альтернативы. Если N < n – 1, то можно сформировать неравенства вида

$$P(x_i) - P(x_j) < (>) C_i - C_j. \qquad (13)$$

Количество таких неравенств определяется по (7).

Следует отметить, что хотя количественная оценка полезности альтернатив требует от эксперта значительно более глубокого интроспективного анализа, что приводит к потенциально большим погрешностям, эта ситуация не более информативна, чем ситуация 3 при наличии эквивалентных альтернатив. Равенства (12) и (10) одинаково информативны для целей идентификации. Это позволяет при прочих равных условиях отдать предпочтение качественным методам экспертизы.

Анализ рассмотренных выше четырех ситуаций позволяет сделать вывод, что в результате экспертных оценок они, независимо от того, по какой методике получены, могут быть в общем случае формализованы как система равенств и неравенств полезностей анализируемых альтернатив. Синтезируем модель идентификации параметров модели формирования обобщенной оценки полезности.

1. Формализация неравенства

Пусть в результате рассмотрения пары альтернатив $x_S, x_V \in X$, ЛПР отдал предпочтение альтернативе x_S, т. е. $x_S \succ x_V$. Из этого согласно (4) следует

$$P(x_S) \ge P(x_V) \equiv P_S \ge P_V. \qquad (14)$$

С учетом (2) неравенство (14) можно записать так:

$$p_{V1}a_1 + ... + p_{Vn}a_n \le p_{S1}a_1 + ... + p_{Sn}a_n. \qquad (15)$$

Отсюда

$$(p_{V1} - p_{S1})a_1 + ... + (p_{Vn} - p_{Sn})a_n \le 0. \qquad (16)$$

Введем обозначение

$$(P_{Vj} - P_{Si}) = b_{ij};\ j = \overline{1,n}. \qquad (17)$$

Тогда

$$b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + ... + b_{1n}a_n \le 0. \qquad (18)$$

В общем случае, как показано выше, по результатам экспертных оценок может быть сформировано m неравенств вида (14). С учетом этого общая модель будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + ... + b_{1n}a_n \le 0, \\ &.................. \\ &b_{m1}a_1 + b_{m2}a_2 + ... + b_{mn}a_n \le 0, \end{aligned}\right. \qquad (19)$$

где a_j, $j = \overline{1,n}$ – коэффициенты относительной важности частных критериев, для которых выполняются условия неотрицательности

$$a_j \ge 0,\ \forall j = \overline{1,n}, \qquad (20)$$

ограниченности сверху

$$a_j \le 1,\ \forall j = \overline{1,n}, \qquad (21)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 1. \qquad (22)$$

Характеристики каждой альтернативы предъявляются ЛПР в натуральном виде. Однако для целей моделирования они должны быть приведены к изоморфному виду [1] с единым интервалом изменения от 0 до 1. С учетом (17) это означает, что коэффициенты b_{ij} имеют область изменения

$$-1 \le b_{ij} \le 1. \qquad (23)$$

Таким образом, для случая, когда исходная информация задана в виде неравенств, общая модель определения весовых коэффициентов a_i имеет вид

$$\begin{aligned} &b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + ... + b_{1n}a_n \le 0, \\ &.................. \\ &b_{m1}a_1 + b_{m2}a_2 + ... + b_{mn}a_n \le 0, \\ &-1 \le b_{ij} \le 1;\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}, \\ &a_j \ge 0;\ a_j \le 1;\ \sum_{j=1}^{n} a_j = 1. \end{aligned} \qquad (24)$$

2. Формализация равенств

Пусть при рассмотрении пары альтернатив $x_K, x_l \in X$ ЛПР принял решение, что они эквивалентны, т.е. $x_K \sim x_l$ и, следовательно,

$$P(x_K) = P(x_l) \equiv P_K = P_l \,. \qquad (25)$$

Отсюда с учетом (2)

$$p_{K1}a_1 + ... + p_{Kn}a_n = p_{l1}a_1 + ... + p_{ln}a_n \,. \qquad (26)$$

После преобразований, аналогичных (15) – (18), получим

$$b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + ... + b_{1n}\, a_n = 0, \qquad (27)$$

где все обозначения аналогичны введенным выше.

Если имеется информация, позволяющая сформировать d равенств (25), общая модель примет вид

$$\begin{aligned} & b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + ... + b_{1n}a_n = 0, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & b_{d1}a_1 + b_{d2}a_2 + ... + b_{dn}a_n = 0, \qquad (28) \\ & -1 \le b_{ij} \le 1; \; i = \overline{1,d}\,; \; j = \overline{1,n}\,, \\ & a_j \ge 0; \; a_j \ge 1; \; \sum_{j=1}^{n} a_j = 1 \,. \end{aligned}$$

В общем случае экспертная информация позволяет построить некоторую композицию неравенств и равенств. Окончательная общая модель определения весовых коэффициентов a_i будет иметь вид

$$\begin{aligned} & b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + ... + b_{1n}a_n \le 0, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & b_{m1}a_1 + b_{m2}a_2 + ... + b_{mn}a_n \le 0, \\ & b_{m+1}a_1 + b_{m+1}a_2 + ... + b_{m+1}a_n = 0, \qquad (29) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & b_N a_1 + b_N a_2 + ... + b_N a_n = 0, \\ & -1 \le b_{ij} \le 1; \; i = \overline{1,N}\,; \; i = \overline{1,n}\,, \\ & a_i \ge 0; \; a_i \le 1; \; \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \,. \end{aligned}$$

Задача заключается в том, чтобы определить матрицу относительных весовых коэффициентов А на основе модели (29). Все соотношения, входящие в (29), линейны относительно искомых неизвестных a_i и в силу этого представляют собой полуплоскости (неравенства) и плоскости (равенства), ограничивающие в n-мерном пространстве некоторый выпуклый [5] многогранник, который является множеством допустимых значений W матрицы А.

Литература: 1. *Петров Э.Г.* Организационное управление городом и его подсистемами. Методы и алгоритмы. Х.: Вища шк. 1986. 144 с. 2. *Ларичев О.И.* Объективные модели и субъективные решения. М.: Наука, 1987. 134 с. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П., Шаронова Н.В.* Компараторная идентификация лингвистических объектов. К.: ИСИО, 1993. 116 с. 4. *Литвак Б.Г.* Экспертная информация: методы получения и анализа. М.: Радио и связь, 1982. 184 с. 5. *Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.* Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967. 460 с.

Поступила в редколегию 05.06.98

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Шаронова Н.В.

Овезгельдыев Атагелды Оразгельдыевич, канд. техн. наук, докторант ХТУРЭ. Научные интересы: организационные системы, системный анализ. Увлечения: путешествия. Адрес: 310726, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-93-06.

Петров Константин Эдуардович, канд. техн. наук, ст. преподаватель УниВД. Научные интересы: теория принятия решений, нечеткие множества. Увлечения: горные лыжи, футбол. Адрес: 310080, Украина, Харьков, пр. 50-летия СССР, 27, тел. (0572) 50-30-67.

УДК 519.6:514.1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ С УЧЕТОМ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

СЫСОЕВА Ю.А.

Предложены математическая модель и метод решения оптимизационной задачи размещения правильных многоугольников в полосе с учетом погрешностей исходных данных, основанные на применении нового приложения [8-11] интервального анализа [12-14] в геометрии.

1. Постановка задачи

Имеется конечное множество ориентированных правильных многоугольников с одинаковым числом сторон и полоса, исходные данные о которых заданы с определенными погрешностями. Необходимо разместить данное множество многоугольников в полосе с учетом погрешностей исходных данных так, чтобы длина занятой части полосы была минимальной.

Формализуем множество исходных данных Q следующим образом: $J_k = \{1,2,...,k\}$ - индексное множество; Ω – полоса ширины w и длины l (под длиной полосы понимается длина занятой ее части как результат какого-либо размещения); XOY – собственная система координат полосы Ω; ν_w^0 – исходная погрешность ширины полосы Ω по оси OY (полагаем, что $\nu_w^0 \ge 0$); ν_l^0 – исходная погрешность длины полосы Ω по оси OX (полагаем, что $\nu_l^0 \ge 0$);

n – число размещаемых многоугольников; S_i, $i \in J_n$ – i-й многоугольник поставленной задачи; m – число сторон многоугольника S_i; XO_iY, $i \in J_n$ – собственная система координат многоугольника S_i (в дальнейшем O_i – полюс многоугольника S_i); R_i, $i \in J_n$ – радиус окружности, описанной около многоугольника S_i; $\nu_{x_i}^0, \nu_{y_i}^0$, $i \in J_n$ – исходные погрешности задания многоугольника S_i соответственно по осям O_iX и O_iY (полагаем, что $\nu_{x_i}^0 \ge 0$, $\nu_{y_i}^0 \ge 0$).

Введем дополнительные переменные: ν_l – погрешность длины занятой части полосы Ω; ν_{R_i}, $i \in J_n$ – погрешность радиуса R_i ($\nu_{R_i} = \theta\,(\nu_{x_i}^0, \nu_{y_i}^0)$, где θ – отображение, которое определяется особенностями математического моделирования геометрических объектов арифметического евклидового пространства R^2 с учетом погрешностей исходных данных в интервальных пространствах); x_i, y_i, $i \in J_n$ – коорди-