УДК 530.1-538.56+535

ОБОСНОВАНИЯ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ*

Часть 2

Ю.П.Мачехин

Проведен анализ, позволяющий оценить предельное множество, к которому стремятся все множества результатов наблюдений, – фрактал.

В первой части статьи были рассмотрены основные свойства поведения нелинейных динамических систем (НДС), в силу которых условием эргодичности при обработке результатов измерений в таких системах пользоваться некорректно.

В то же время, если подойти к проблеме обработки результатов измерений как к анализу свойств множества, заданного в топологическом пространстве, то можно воспользоваться аппаратом теории множеств, с учетом достижений последних лет в этой области математики, и разработать методы обработки результатов измерений, основанные не на вероятностном подходе, а на теоретико-множественном.

Во множестве результатов измерений зафиксированы относительные отклонения полученных значений, которые могут формировать определенную структуру. Например, в структуре множества результатов измерений в НДС может наблюдаться свойство самоподобности или масштабной инвариантности (скейлинга). Масштабная инвариантность, как правило, описывает соотношение между пространственным или временным масштабами наблюдения и величиной отклонения наблюдаемого параметра. Кроме того, масштабная инвариантность может быть как детерминированной, так и статистической, то есть она определяется по статистическим усредненным характеристикам объектов или процессов.

Эти свойства могут позволить получить некую характеристику, оценивающую качество измерений, то есть появляется возможность использовать не статистические методы для оценки качества результатов измерений, а методы анализа свойств множеств в топологическом пространстве.

Основным теоретическим положением, на котором будут строиться дальнейшие рассуждения и выводы, является специфика множества результатов измерений, заключающаяся в том, что эти множества являются хаусдорфовыми множествами [1]. Обоснуем это положение. Топологическое пространство X называется T_2-пространством или хаусдорфовым пространством, если для каждой пары различных точек x_1 и $x_2 \in X$ существуют такие открытые множества U_1 и U_2, что $x_1 \in U_1$ и $x_2 \in U_2$, для которых $U_1 \cap U_2 = 0$. Из этого определения следует, что если элементы множества отделимы друг от друга непересекающимися окрестностями, то они составляют хаусдорфово множество, для которого существует своя хаусдорфова метрика. С другой стороны, результаты наблюдений представляют собой множество значений физической величины, полученных с установленной погрешностью. По этой причине результаты наблюдений всегда будут разделены ε-окрестностями, которые при соответствующем выборе ε будут непересекающимися, а значит, множество результатов наблюдений будет хаусдорфовым.

Кроме этого, при подходе к результатам наблюдений как к хаусдорфову множеству следует учесть такой обязательный параметр, как время. Во-первых, на любое измерение требуется конечное время δt, которое уже разделяет результаты в пространстве, а во-вторых, между измерениями всегда проходит конечное время Δt. По этой причине результаты наблюдений, выполненные в одной и той же физической ситуации в течение конечного времени, можно представить хаусдорфовым множеством в двумерном топологическом пространстве T_2.

Отметим, что окончательным результатом измерений являются определение или оценка предела, к которому стремится или может стремиться первоначально полученное множество результатов измерений, иначе, что представляет собой предел последовательности хаусдорфовых множеств. Применительно к решаемой в настоящей работе задаче это значит, что по полученному экспериментальным путем множеству необходимо определить сходимость последовательности таких множеств к стабильной структуре, которую назовем, в общем случае, фракталом [2]. Математически фрактал представляет собой множество точек в метрическом пространстве, для которого не существует меры с

* Окончание. Начало в вып. 4 "Украинского метрологического журнала" за 2003 г.

целой размерностью. Введение понятия фрактала в исследовательскую практику приводит к необходимости использовать в качестве количественного параметра размерность множества. Из теории размерности [3] известно, что размерность топологического пространства – всегда целое число n, которое соответствует интуитивному восприятию размерности одномерного объекта (длина $n=1$), двумерного объекта (площадь $n=2$) и т.д. Хаусдорфова размерность множества не обязательно должна совпадать с размерностью самого пространства и может иметь дробное значение. Еще в конце 19 века в математике были получены результаты, которые показали, что можно построить множества, размерность которых не является целым числом. Эта новая ветвь математики чрезвычайно расширила класс объектов, которые можно рассматривать как "геометрические", и обнаружила конфигурации такой сложности, какой раньше нельзя было представить, и, соответственно, приписать этим объектам некую размерность было нетривиальной задачей (множества Кантора, кривые Пеано, функции Вейергитрасса).

Из этого следует, что если размерность множества равна топологической размерности, то поведение системы подчинялось детерминированным динамическим или статическим закономерностям. Множество результатов измерений в такой системе имеет предел, который соответствует конкретной величине (или числу). Поскольку множество результатов измерений, как было показано выше, является хаусдорфовым множеством, а значит, размерность может быть дробной, то предельное множество, к которому стремится это множество, является фракталом. Фрактал дает описание предельного разброса возможных значений результатов измерений и как они могут структуироваться.

Вычисляя фрактальную (или хаусдорфову) размерность, можно количественно оценивать структуру фрактала и тем самым определять предельное значение (или значения) измеряемой величины. По сути оценивается возможная дисперсия результатов измерений, обусловленная поведением НДС, то есть то, что определяется при статистическом анализе результатов измерений в линейных системах.

Понятие фрактала, введенное Мандельбротом на основе представлений о хаусдорфовых множествах, подразумевает изломанный, сложной конфигурации объект. При этом ограничение, что фрактал может быть только детерминированным (в случае НДС), в работах Мандельброта отсутствовало. В общем случае фракталы могут быть случайными, а это значит, что самоподобность можно оценить в статистическом приближении. В работе [4] было показано, как фрактальное представление можно использовать при анализе временных рядов измерений.

Выводы

Сформулируем основные результаты работы.

1. Следуя существующим представлениям о возможных режимах поведения НДС [4], был сделан вывод о некорректности использования условия эргодичности при статистическом анализе результатов наблюдений параметров НДС, находящейся в режиме динамического хаоса.

2. В этом случае вместо статистической обработки, основанной на эргодичности исследуемых процессов, возможно применить анализ множества результатов наблюдений. Этот анализ позволяет оценить предельное множество, к которому стремятся все множества результатов наблюдений, – фрактал. Размер этого фрактала и его внутренняя структура указывают на тот предел, в котором может быть зафиксировано, какие результаты измерений можно получить в процессе обработки наблюдений.

3. Величина рассчитываемой по экспериментальным данным фрактальной размерности может давать количественную оценку дисперсии результатов измерений.

Список литературы

1. Мачехин Ю.П. //Метрологія та вимірювальна техніка (Метрологія–99): Наук. праці II Міжнар. наук.-техн. конф. у 2-х томах. Т. 1. –Харків: ХДНДІМ, 1999. -С. 38–41.
2. Кроновер Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах. -М.: Постмаркер, 2000. -352 с.
3. Гуревич В., Вольтен Г. Теория размерности. -М.: ГИИЛ, 1948. -231 с.
4. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. -М.: Мир, 1984. -527 с.

GROUNDING THE METHODS OF THE STATISTICAL PROCESSING OF THE MEASUREMENT RESULTS IN THE NON-LINEAR DYNAMIC SYSTEMS
Part 2

Y.P.Machekhin

The analysis, which allows to estimate the finite set, which all the sets of observation results urge towards, which is fractal, is conducted.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

Мачехін Юрій Павлович – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, заступник директора ННЦ "Інститут метрології", м. Харків