*Материалы XVII Международного молодежного форума «**Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке**»*
(Харьков, ХНУРЭ, 22 – 24 апреля 2013). – Т. 7.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕДЛЕННОГО ОБТЕКАНИЯ УСЕЧЕННОГО ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ

Медведовский В.И.
Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина,14, каф. Прикладной математики,
тел. (057) 702-13-06)
e-mail: vlad.medvedovskiy@gmail.com

The problem of slow axisymmetric flow past a body with viscous incompressible fluid is treated in the paper. The R-functions structural method and the Galerkin-Petrov projection method are used for solving the task. The computational experiment has been conducted for a truncated paraboloid of revolution.

В работе рассматривается медленное обтекание тела вязкой несжимаемой жидкостью при наличии в течении осевой симметрии (нет зависимости от угла φ). Течение описывается уравнением (приближение Стокса) [1]

$$E^2(E^2\psi) = 0 \quad \text{вне} \quad \bar{\Omega}, \tag{1}$$

где $E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$, $\psi = \psi(r,\theta)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями $v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$, $v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$, $v_\varphi = 0$; $(r,\ \theta,\ \varphi)$ – переменные сферической системы координат.

Если граница тела непроницаема и неподвижна, то

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0 \ \text{ и } \ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Поведение функции тока на бесконечности задается в виде

$$\psi \to \frac{1}{2}U_\infty r^2\sin^2\theta \ \text{ при } \ r\to\infty, \tag{3}$$

где U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Теорема [2]. При любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1\cdot r^{-2}\to 0$ при $r\to\infty$) краевым условиям (2) и условию на бесконечности (3) точно удовлетворяет функция вида

$$\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2,$$

где $\psi_0 = \frac{1}{4}U_\infty(r-R)^2(2+Rr^{-1})\sin^2\theta$ – решение Стокса для задачи об обтекании сферы радиуса R (сфера радиуса R содержится в обтекаемом теле),

$\omega_M = f_M(\omega)$, $f_M(\omega) = \begin{cases} 1 - \exp\dfrac{M\omega}{\omega - M}, \ 0 \le \omega < M, \\ 1, \qquad\qquad \omega \ge M, \end{cases}$ а ω – функция, которая строится с использованием конструктивного аппарата теории R-функций [3] и обладает такими свойствами: 1) $\omega > 0$ вне $\overline{\Omega}$; 2) $\omega = 0$ на $\partial\Omega$; 3) $\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$.

Для аппроксимации неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 воспользуемся проекционным методом Галеркина-Петрова [4]. Функции Φ_1 и Φ_2 представим в виде

$$\Phi_1 \approx \Phi_1^{m_1} = \sum_{k=1}^{m_1} a_k \varphi_k, \ \Phi_2 \approx \Phi_2^{m_2} = \sum_{j=1}^{m_2} b_j \tau_j,$$

где $\left\{\varphi_k(r,\theta)\right\} = \left\{ r^{1-k} J_k(\cos\theta), k = 2,3,...; r^{3-k} J_k(\cos\theta), k = 4,5,... \right\}$ – полная система частных решений уравнения (1) относительно внешности сферы конечного радиуса;

$\left\{ \tau_j(r,\theta) \right\} = \left\{ rJ_2(\cos\theta), J_3(\cos\theta), r^j J_j(\cos\theta), \ r^{j+2} J_j(\cos\theta), \ j = 2,3,... \right\}$ – полная система частных решений уравнения (1) относительно области $\left\{\omega(r,\theta) < M\right\}$.

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания параболоида вращения $z = \left(x^2 + y^2\right)/a^2$, отсекаемого плоскостью $z = b$ (рис. 1), при $U_\infty = 1$, $a = 2/3$, $b = 3$, $m_1 = 6$, $m_2 = 6$, $M = 2$.

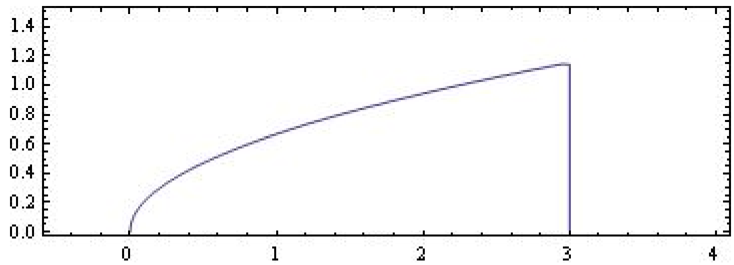

Рис. 1.

1. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.

2. Ламтюгова С.М., Сидоров М.В. Застосування методу R-функцій до розрахунку зовнішніх повільних течій в'язкої рідини // Відбір і обробка інформації. – 2012. – № 36(112). – С. 56 – 62.

3. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.

4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 420 с.