УДК 517.927:517.95]:519.6

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО ЗНАХОДЖЕННЯ АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ТРЕТЬОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З СИНГУЛЯРНОЮ СТЕПЕНЕВОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Пархоменко В.Г.
e-mail: vladyslav.parkhomenko1@nure.ua
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра прикладної математики
м. Харків, Україна

The problem of constructing two-sided approximations to a unique axial-symmetric positive solution of the first boundary-value problem for an equation $-\Delta u = \mu u^{-q}$ in the radius R round with antimonotone nonlinearity is considered. The initial boundary-value problem is reduced to the equivalent nonlinear Hammerstein integral equation for which method of two-sided approximations is applied directly. The efficiency of the method is confirmed by computational experiments for nonlinearity $\mu = 1,\ q = \frac{1}{2}$. Obtained results are demonstrated graphically.

При математичному моделюванні процесів, які виникають у нелінійних середовищах, виникає необхідність у чисельному аналізі наступної нелінійної крайової задачі:

$$-\Delta u = \mu u^{-q} \text{ у } \Omega, \tag{1}$$

$$u > 0 \text{ у } \Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \gamma u \Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

де Ω – область в $\mathbb{R}^2$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $\mathbf{n}$ – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль, $\mu > 0,\ q > 0,\ \gamma > 0$.

Якщо область Ω є кругом радіуса R у $\mathbb{R}^2$, то розв'язок задачі (1) – (3), що є радіально-симетричним, залежить лише від $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Тоді крайова задача (1) – (3) зводиться до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння відносно $u = u(\rho)$:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{du}{d\rho}\right) = \mu u^{-q},\ 0 < \rho < R, \tag{4}$$

$$u(\rho) > 0,\ 0 < \rho < R, \tag{5}$$

$$|u(0)| < +\infty,\ u'(R) + \gamma u(R) = 0. \tag{6}$$

Задача (4) – (6) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна:

$$u(\rho) = \mu \int_0^R K(\rho, s) u^{-q}(s) ds, \tag{7}$$

де $K(\rho, s) = \begin{cases} \dfrac{(1+\gamma R \ln R)}{\gamma R} s - s \ln s, \\ \dfrac{(1+\gamma R \ln R)}{\gamma R} s - s \ln \rho. \end{cases}$

Рівняння (7) розглядається як нелінійне операторне рівняння у банаховому просторі $C[0, R]$, напівупорядкованому конусом K_+ невід'ємних на $[0, R]$ неперервних функцій [1, 2]. За узагальнений розв'язок крайової задачі (4) – (6) приймемо неперервний і додатний на $[0, R]$ розв'язок рівняння (7).

Оператор $(Tu)(\rho) = \mu \int_0^R K(\rho, s) u^{-q}(s) ds$ має наступні властивості:

а) є додатним оператором;

б) є u_0-додатним оператором, де $u_0(\rho) = \dfrac{1}{4\gamma}(2R + R^2\gamma - \gamma\rho^2)$;

в) є антитонним оператором;

г) є псевдоувігнутим і навіть u_0-псевдоувігнутим оператором, де $u_0(\rho) = \dfrac{1}{4\gamma}(2R + R^2\gamma - \gamma\rho^2)$, якщо $q \in (0,1)$.

Для антитонного оператора T умовами $Tv_0 \geq v_0$, $Tw_0 \leq w_0$ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 >$, де $v_0(\rho) = \alpha u_0(\rho)$, $w_0(\rho) = \beta u_0(\rho)$, $0 < \alpha < \beta$, і сформуємо два пов'язані ітераційні процеси:

$$v^{(n+1)}(\rho) = \mu \int_0^R K(\rho, s)[w^{(n)}(s)]^{-q} ds, \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$w^{(n+1)}(\rho) = \int_0^R K(\rho, s)[v^{(n)}(s)]^{-q} ds, \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$v^{(0)} = v_0(\rho), \; w^{(0)} = w_0(\rho).$$

Послідовність наближень $\{v^{(n)}(\rho)\}$ є неспадною за конусом K_+, а послідовність $\{w^{(n)}(\rho)\}$ – незростаючою за конусом K_+. Конус K_+ є нормальним, а оператор T є цілком неперервним. Таким чином, обидві побудовані ітераційні послідовності збігаються у нормі простору $C[0, R]$ до єдиного додатного розв'язку u^* крайової задачі (4) – (6), причому має місце наступний ланцюг нерівностей

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \ldots \leq v^{(n)} \leq \ldots \leq u^* \leq \ldots \leq w^{(n)} \leq \ldots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0.$$

За наближений розв’язок крайової задачі (4) – (6) на n-й ітерації обирається функція $u^{(n)}(\rho)=\frac{1}{2}(v^{(n)}(\rho)+w^{(n)}(\rho))$, а тоді апостеріорна похибка наближення оцінюється нерівністю

$$\left\|u^{(n)}-u^{*}\right\|_{C[0,R]}\le\frac{1}{2}\max_{\rho\in[0,R]}(w^{(n)}(\rho)-v^{(n)}(\rho)).$$

Обчислювальний експеримент проведено для $\mu=1$, $q=\frac{1}{2}$. До точності $\varepsilon=10^{-4}$ ітераційний процес збігся за 5 кроків. На рисунку 1 наведено графік наближеного розв’язку задачі (1) – (3).

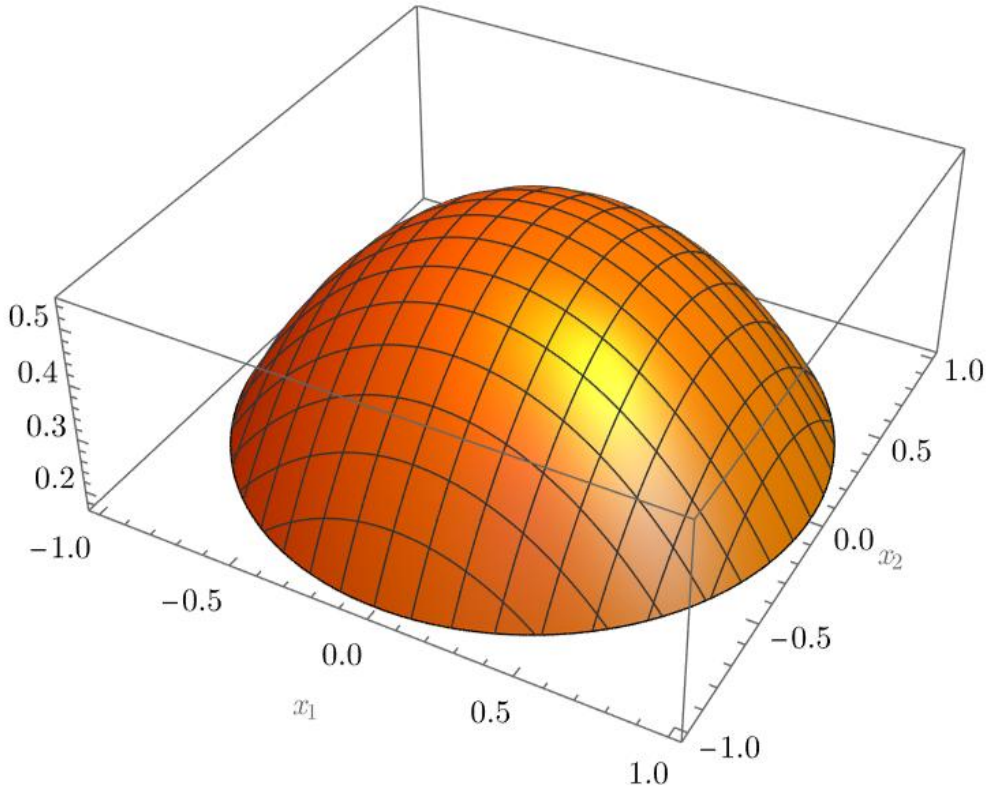

Рисунок 1 – Графік наближеного розв’язку крайової задачі

Список використаних джерел:

1. Сидоров М. В. Метод двобічних наближень розв’язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2019. № 1 (48). С. 57 – 66. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-1-6.

2. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних аксіально-симетричних розв’язків крайових задач із сингулярними нелінійностями. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2025. Вип. 27. С. 39-52. DOI: 10.32626/2308-5878.2025-27.39-52.