

А. И. СПИЦЫН, канд. физ.-мат. наук

ЗАТУХАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ОБЪЕМНОМ РЕЗОНАТОРЕ С ПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ И ИЗМЕНЕНИЕ ЕГО РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТОТ РЕЗОНАТОРА С ИДЕАЛЬНО-ПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ

При расчете потерь и изменении резонансных частот резонаторов с проводящими стенками используют импедансные граничные условия. [1, 2]. Формулу для комплексной частоты мод объемных резонаторов при произвольном поверхностном импедансе стенок впервые дал Слатер [3]. Им были рассчитаны как добротность, так и сдвиги резонансных частот резонатора, обусловленные неидеальностью стенок. Впоследствии это соотношение было выведено при помощи других методик (например [4, 5]). В настоящем сообщении мы получим это соотношение еще одним способом, основанным на непосредственном использовании уравнений Максвелла, что полезно в методологическом плане.

Рассмотрим объемный резонатор в режиме свободных колебаний со стенками, в которых электромагнитное поле проникает на конечную глубину (отметим, что потери в стенках резонатора в принципе могут отсутствовать). Положим, что резонатор заполнен средой без потерь с диэлектрической и магнитной проницаемостью $\epsilon, \mu > 0$. Обозначим соответствующие комплексные амплитуды полей a -й моды как \vec{E}_a, \vec{H}_a , а круговую резонансную частоту — ω_a ; поля этой же моды резонатора с неидеальными стенками — \vec{E}, \vec{H} , а ω — ее частоту. Тогда для этих полей резонатора справедливы уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -i\omega \mu \vec{H}, & \operatorname{rot} \vec{E}_a &= -i\omega_a \mu \vec{H}_a, \\ \operatorname{rot} \vec{H}_a &= i\omega_a \epsilon \vec{E}_a, & \operatorname{rot} \vec{H} &= i\omega \epsilon \vec{E}. \end{aligned} \quad (1)$$

Поля резонатора с неидеальными стенками в случае свободных колебаний будут изменяться в соответствии с $\exp(i\omega t)$, но частота ω в общем случае будет комплексной: $\omega = \operatorname{Re} \omega + iJm\omega$. Со временем электрические и магнитные поля будут затухать по экспоненте $E, H \sim \exp(-Jm\omega t) \exp(i \operatorname{Re} \omega t)$. Квадраты модулей электрического и магнитного полей, а, следовательно, и энергия будут изменяться в соответствии с $|\vec{E}|^2, |\vec{H}|^2 \sim \exp(-\frac{t}{\tau})$, где

$$\tau = \frac{1}{2Jm\omega} \quad (2)$$

представляет постоянную времени резонатора для a -й моды.

Умножая первое уравнение из первой пары в (1) на \vec{H}_a^* , а комплексно сопряженное второе на \vec{E} и вычитая и аналогично, первое из второй пары на \vec{H}^* , а второе на \vec{E}_a и вычитая, получим равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}_a^*] &= i\omega_a^* \epsilon \vec{E}_a^* \vec{E} - i\omega \mu \vec{H}_a^* \vec{H}, \\ \operatorname{div} [\vec{E}_a \vec{H}^*] &= i\omega^* \epsilon \vec{E}^* \vec{E}_a - i\omega_a \mu \vec{H}^* \vec{H}_a. \end{aligned} \quad (3)$$

Проинтегрируем второе соотношение в (3) по объему резонатора:

$$\int_S [\vec{E}_a \vec{H}^*] \vec{n} ds = i\omega^* \int_V \epsilon \vec{E}^* \vec{E}_a dv - i\omega_a \int_V \mu \vec{H}^* \vec{H}_a dv,$$

где \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к объему резонатора V , а S – поверхность, его ограничивающая. Так как для идеального резонатора $\vec{n} \parallel \vec{E}_a$ на поверхности S , то

$$\int_V \epsilon \vec{E} \vec{E}_a^* dv = \frac{\omega}{\omega_a} \int_V \mu \vec{H} \vec{H}_a^* dv \quad (4)$$

Из первого соотношения (1) с использованием (4) аналогичным образом получим

$$\iint_S [\vec{E} \vec{H}_a^*] d\vec{s} = i\omega_a^* \int_V \epsilon \vec{E}_a^* \vec{E} dv - i\omega \int_V \mu \vec{H}_a^* \vec{H} dv = i \frac{\omega_a^2 - \omega^2}{\omega} \int_V \mu \vec{H} \vec{H}_a^* dv,$$

где учтено, что ω_a – действительная величина. Используя импедансные граничные условия на стенках реального резонатора $\vec{E}_{tg} = Z [\vec{H}_{tg} \vec{n}]$, где Z – поверхностный импеданс, окончательно получим соотношение

$$\frac{\omega^2 - \omega_a^2}{\omega} = \frac{i \int_S Z \vec{H}_{tg} \vec{H}_a^* ds}{\int_V \mu \vec{H} \vec{H}_a^* dv} \quad (5)$$

Это соотношение хотя и точное, однако включает неизвестное поле \vec{H} реального резонатора. Так как отношение $|Z/Z_0| \ll 1$, где $Z_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}$ – импеданс среды, заполняющей резонатор, и при $Z=0$ резонатор превращается в резонатор с идеально проводящими стенками, то поля \vec{E} и \vec{H} по структуре близки к полям \vec{E}_a, \vec{H}_a , и отличие ω от ω_a мало. Поэтому в основном приближении $\vec{H} \approx \vec{H}_a$ и, учитывая, что $\frac{\omega^2 - \omega_a^2}{\omega} \approx 2(\omega - \omega_a)$, из (5) найдем

$$\omega - \omega_a = \frac{i \int_S Z |\vec{H}_a|^2 ds}{2 \int_V \mu |\vec{H}_a|^2 dv} \quad (6)$$

Представляя $Z=R+iX$, где R – поверхностное сопротивление, а X – поверхностный реактанс и $\omega = \omega' + iJm\omega$, где $\omega' = \text{Re}\omega$ – частота реального резонатора с неидеальными стенками, после выделения реальной и мнимой частей соотношения (6) получим соотношение для мнимой части комплексной частоты ω

$$Jm\omega = \frac{\int_S R |\vec{H}_a|^2 ds}{2 \int_V \mu |\vec{H}_a|^2 dv} \quad (7)$$

и изменение частоты рассматриваемого резонатора относительно частоты резонатора с идеально проводящими стенками

$$\Delta\omega = \omega' - \omega_a = -\frac{\int_S X |\vec{H}_a|^2 ds}{2 \int_V \mu |\vec{H}_a|^2 dv} \quad (8)$$

Так как добротность резонатора определяется соотношением $Q = \frac{\omega' \int \mu |\vec{H}|^2 dv}{\int R |\vec{H}|^2 ds}$, то в основном приближении с учетом (2) для изолированной моды получим известную формулу

$$Q = \frac{\omega_a}{2Jm\omega} = \omega_a \tau.$$

Список литературы: 1. *Леонович М.А.* Исследование по распространению радиоволн. М-Л: Изд-во АН СССР, 1948. С. 5 – 12. 2. *Менде Ф.Ф., Спицын А.И.* Поверхностный импеданс сверхпроводников. Киев: Наук. думка, 1985. 240 с. 3. *Слетэр Д.* Электроника сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1948. 191 с. 4. *Штейншлегер В.Б.* Явления взаимодействия волн в электромагнитных резонаторах. М.: Оборонгиз, 1955. 111 с. 5. *Спицын А.И.* Теория взаимодействия поляризованных мод при импедансных тензорных граничных условиях на стенках объемных СВЧ резонаторов. Харьк. ун-т радиоэлектроники. Харьков, 1996. 75с. Деп. в ГНТБ Украины, 28.02.96, № 653-Ук-96.

*Харьковский национальный
университет радиоэлектроники*

Поступила в редколлегию 14.10.2002