

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДИФИКАЦИИ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Введение

Компьютерное предоперационное моделирование пластических вмешательств на лице человека является важным направлением повышения качества современной пластической хирургии. Полученная с помощью компьютерного моделирования виртуальная модель лица человека позволяет пластическому хирургу прогнозировать результат хирургических процедур на этапе планирования оперативного вмешательства на основе точных численных критериев. Это позволяет пластическому хирургу вместе с пациентом изучить модель его будущего облика и, при необходимости, провести коррекцию изображения для формирования такой модели, которая в наибольшей степени соответствует пожеланиям пациента и возможностям современной пластической хирургии.

Актуальность

Главной проблемой при создании компьютерной модели или ее коррекции является отсутствие математических методов и программных средств, обеспечивающих адекватность изменения анатомических структур реального пациента и их компьютерной модели, а также соответствия процедур их реальной и виртуальной коррекции. Поэтому актуальной является задача разработки новых методов и моделей, обладающих максимальной физической [1, 2] и геометрической адекватностью реальным структурам и тканям и позволяющих выполнять компьютерное планирование оперативных вмешательств в реальном масштабе времени.

Математическая модель

Обычно при изменении объемных томографических данных для коррекции изображения оператор интерактивно (например, с помощью манипулятора «мышь») захватывает некоторую точку (воксель) изображения и перемещает ее, вызывая также изменение координат ближайших вокселей. Будем называть захваченный воксель ведущим, а ближайшие вовлеченные в движение воксели – ведомыми.

В работе [3] описан компьютерный метод изменения объемных томографических данных, допускающий биофизическую интерпретацию при таких хирургических вмешательствах, которые связаны с деформацией мягких тканей. Вместе с тем, этот метод в математическом плане основывается на использовании кусочно-непрерывных функций, причем в случае произвольных перемещений ведущего вокселя задача расчета координат ведомых вокселей не имеет аналитического решения. Что касается численного решения, то объем необходимых вычислений быстро нарастает при увеличении объема трансформируемой области.

С другой стороны, значительная часть вмешательств при пластической хирургии не связана с деформацией тканей. В этом случае биофизическая интерпретация компьютерного метода отсутствует, и метод изменения объемных данных может разрабатываться, исходя из соображений подбора таких функциональных зависимостей, описывающих перемещения вокселей, которые позволяют получить аналитическое решение.

При разработке такого метода необходимо сразу выделить основные вопросы. Очевидно, что при создании модели, удовлетворяющей требованиям пациента, воксели должны перемещаться в определенной ограниченной области пространства (изображения), не внося изменений в положение вокселей, не входящих в область коррекции изображения (ОКИ). Таким образом, первая из ключевых задач – это математическое описание изменений конфигурации и границ ОКИ при тех или иных перемещениях ведущего вокселя.

Как указывалось, при использовании метода, описанного в работе [3], сложность вычислений была связана с использованием кусочно-непрерывных функций. Поэтому в

новом методе следует использовать такие функции, описывающие перемещение вокселей со временем, которые являются непрерывными во всей ОКИ.

Вторая ключевая задача – это задача математического описания перемещения ведомых вокселей в ОКИ при произвольных перемещениях ведущего вокселя. Очевидно, что функции, описывающие такие перемещения, могут выбираться исходя из различных соображений. Поэтому третьей ключевой задачей является выяснение вопроса, в каких случаях использование тех или иных функций является оптимальным.

Обсудим первую задачу. При произвольном движении ведущего вокселя он может как сближаться с ведомыми вокселями, так и удаляться от них. Однако столкновение вокселей происходить не должно, в частности потому, что при этом может нарушаться требование о непрерывности функций, описывающих движение вокселей. Данное требование является одним из наиболее принципиальных.

По-видимому, наиболее простым и естественным вариантом формы ОКИ, соответствующим указанному выше требованию, является шар с центром в точке исходного положения ведущего вокселя. Пусть $|\vec{S}_O|$ – вектор, проведенный от начального положения ведущего вокселя (точка O) к его текущему положению. Как будет показано далее, величина радиуса этого шара (R) зависит от выбора функции, описывающей перемещения ведомых вокселей в ОКИ при произвольных перемещениях ведущего вокселя.

Для описания движения ведомых вокселей, обусловленного перемещением ведущего вокселя необходимо сформулировать некоторые модельные предположения. Будем предполагать, что векторы перемещения ведомых вокселей параллельны вектору перемещения ведущего вокселя. Естественно предположить также, что чем ближе ведомый воксель к границе ОКИ, тем меньше модуль его перемещения, причем перемещение вокселя, расположенного на границе ОКИ, равно нулю. Можно предложить различные виды функциональной зависимости, удовлетворяющей указанным требованиям. В частности, если \vec{S}_A – вектор перемещения ведомого вокселя, первоначально находившегося в некоторой точке A , то упомянутая функция может принадлежать, например, к такому семейству функций:

$$|\vec{S}_A| = |\vec{S}_O| \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^m \right)^k, \quad (1)$$

где r – расстояние от точки O до точки A , k и $m > 0$. В простейшем частном случае при $k = m = 1$ получается такая функция:

$$|\vec{S}_A| = |\vec{S}_O| \cdot \left(1 - \frac{r}{R} \right). \quad (2)$$

Будем в дальнейшем использовать обозначение S_A вместо $|\vec{S}_A|$ и S_O вместо $|\vec{S}_O|$. Аналогичные обозначения будем вводить для модулей векторов перемещений ведомых вокселей, первоначально расположенных в других точках (S_B – в точке B , S_C – в точке C и т.д.).

Для определения целесообразности использования той или иной функции семейства (1) необходимо рассмотреть характер изменений, происходящих в ОКИ для некоторых простых модельных случаев. Пусть ведущий воксель лежит на плоской поверхности, являющейся границей изображения ткани, причем эта плоскость соответствует уравнению $x = 0$, начальное положение ведущего вокселя соответствует началу координат.

В этом случае направление движения ведущего вокселя совпадает с осью x , перпендикулярной указанной границе. Считаем, что ведущий воксель выдвигается в область отсутствия ткани. Очевидно, что при любой функции из семейства (1) образующаяся при движении ведущего вокселя поверхность в ОКИ будет поверхностью вращения, т.е. будет иметь аксиальную симметрию, причем осью симметрии будет ось x .

В случае, если в формуле (1) $k = m = 1$ (это случай формулы (2)), уравнение образующейся поверхности (ОП) будет иметь вид

$$y^2 + z^2 - R^2(x - S_0)^2 = 0.$$

Последнее уравнение является, как известно, уравнением конуса (см., например, [4]). В случае, если в формуле (3) $k = 1$, а $m = 2$, получается следующее уравнение ОП:

$$y^2 + z^2 + \frac{xR^2}{S_0} - R^2 = 0.$$

Это уравнение является уравнением эллиптического параболоида.

Если же в формуле (3) $k = \frac{1}{2}$, а $m = 2$, то для ОП получается уравнение

$$\frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} + \frac{x^2}{S_0^2} = 1.$$

Последнее уравнение является уравнением эллипсоида.

Использование функций, принадлежащих к семейству, описываемому формулами (1), возможно, если при перемещении вокселей не происходит их столкновение. С этой точки зрения проведем анализ функций, для которых выше определялась форма ОП. Допустим сначала, что ведущий воксель движется вдоль оси решетки, причем в направлении движения перед ним расположены иные воксели.

Рассмотрим движение вокселей в плоскости $z = 0$. Пусть L – начальное расстояние между соседними вокселями, а h – длина грани вокселя. Пусть также \vec{S}_A – вектор перемещения ведомого вокселя, начало которого находится в точке с координатами x и y , а \vec{S}_B – в точке с координатами $x + L$ и y . Поскольку ведущий воксель движется вдоль оси x , эти векторы параллельны оси x . Пусть u – расстояние между концами векторов \vec{S}_A и \vec{S}_B , т.е. расстояние между центрами вокселей, которые до перемещения были началами этих векторов. Столкновения вокселей не будет, если $u \geq h$. Из рис. 1 видно, что $u = L - S_1 + S_2$.

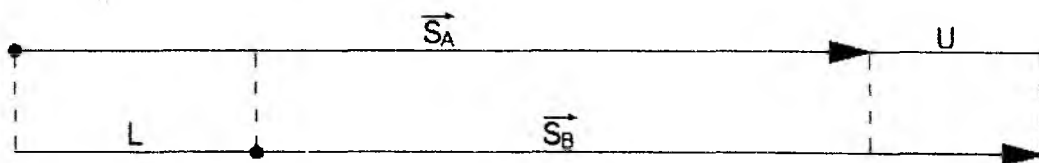


Рис. 1

Если $m = k = 1$, то

$$u = L - S_0 \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right) + S_0 \left(1 - \frac{\sqrt{(x+L)^2 + y^2}}{R} \right).$$

Рассмотрим, как величина u зависит от y . Легко показать, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{S_0 y}{R} \left(\frac{1}{R\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{R\sqrt{(x+L)^2 + y^2}} \right) > 0.$$

Следовательно, величина u достигает минимума при $y = 0$. В этом случае выражение для u преобразуется к виду

$$u = L - \frac{S_0 L}{R}.$$

Теперь условие $u \geq h$ можно преобразовать к виду

$$R \geq \frac{S_0 L}{L - h}. \quad (3)$$

Последнее неравенство определяет радиус ОКИ при использовании функции семейства (1) с параметрами $m = k = 1$.

Если ведущий воксель движется под углом 45° к оси решетки, то и размер вокселя в направлении движения, и расстояние между центрами вокселей в $\sqrt{2}$ раз больше, чем в случае движения ведущего вокселя вдоль оси решетки. Отсюда вытекает, что при выполнении последнего условия столкновений между вокселями и в этом случае не будет. Поэтому легко понять, что и при произвольных направлениях движения ведущего вокселя в случае выполнения условия (3) столкновений между вокселями не будет.

Если $m = 2$, а $k = 1$, то

$$u = L - S_0 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) + S_0 \left(1 - \frac{(x+L)^2 + y^2}{R^2} \right) = L - \frac{S_0}{R^2} (2xL + L^2).$$

Из полученного выражения видно, что с ростом значений переменной x величина u уменьшается. Это значит, что минимальное значение u соответствует максимальному значению x . Поэтому принимаем $x = R - L$, откуда $u = L - \frac{2S_0 L}{R} + \frac{S_0 L^2}{R^2}$.

В этом случае условие $u \geq h$ преобразовывается к неравенству

$$(L - h)R^2 - 2S_0 LR + S_0 L^2 \geq 0,$$

решая которое, окончательно получаем

$$R \geq \frac{L(S_0 + \sqrt{S_0(S_0 - L + h)})}{L - h}.$$

Таким образом, последнее неравенство определяет радиус ОКИ при использовании функции семейства (1) с параметрами $m = 2$; $k = 1$.

Если $m = 2$, а $k = \frac{1}{2}$, то

$$u = L - S_0 \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}} + S_0 \sqrt{1 - \frac{(x+L)^2 + y^2}{R^2}}$$

Снова рассмотрим, как величина u зависит от y . Легко показать, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{S_0 y}{R} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(x+L)^2 + y^2}{R^2}}} \right).$$

Очевидно, что $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$. Следовательно, наименьшее значение величины u будет достигнуто при наибольшем возможном значении величины y . Эта ситуация соответствует положению начала вектора \vec{S}_A в точке с координатами $x = 0$; $y = \sqrt{R^2 - L^2}$, а начала вектора \vec{S}_B на границе ОКИ на высоте L над началом вектора \vec{S}_A . Модуль вектора \vec{S}_B при этом равен нулю. Тогда

$$u = L - S_A = L - S_0 \sqrt{1 - \frac{R^2 - L^2}{R^2}} = L - \frac{S_0 L}{R}.$$

Неравенство $u \geq h$ в этом случае имеет вид $L - \frac{S_0 L}{R} \geq h$, откуда получаем $R \geq \frac{S_0 L}{L - h}$.

Формы ОП семейства (1), кроме проанализированных выше, можно изучить, рассчитав зависимости $|\bar{S}|$ (далее – просто S) от y при $z = 0$. Графики ОП, соответствующих $m \leq 0,5$ (некоторые из них показаны на рис. 2 – 4), вряд ли следует рекомендовать для коррекции изображений:

S при $k=0,25$ и $m=0,25$

s при $k = 1$ и $m = 0,25$

s при $k = 4$ и $m = 0,25$

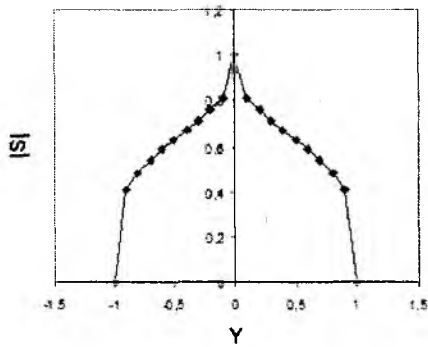


Рис. 2

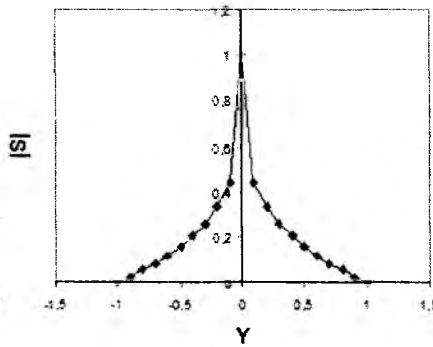


Рис. 3

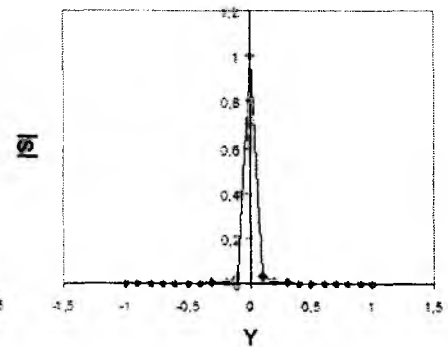


Рис. 4

Анализ рассчитанных графиков зависимостей S от y при различных значениях параметров k и m свидетельствует о целесообразности использования таких ОП, принадлежащих семейству (1), для которых значения параметра m удовлетворяет условию $m \geq 2$.

Некоторые из таких ОП представлены на рис. 5 – 10.

s при $k = 0,25$ и $m = 2$

s при $k = 1$ и $m = 2$

s при $k = 4$ и $m = 2$

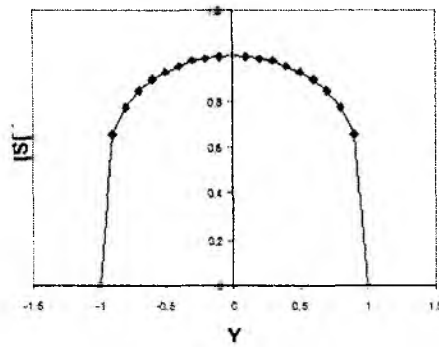


Рис. 5

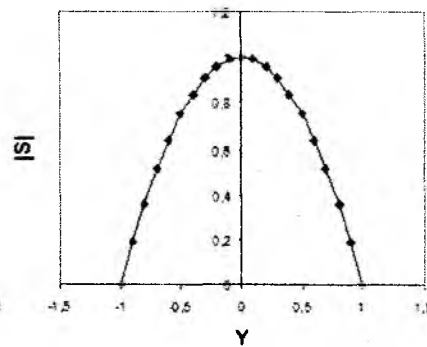


Рис. 6

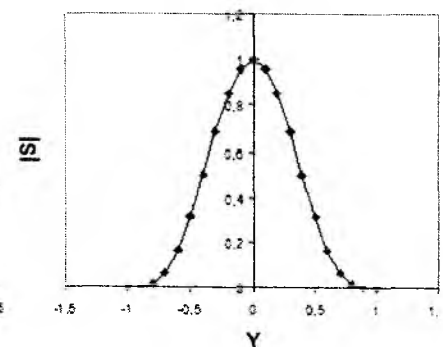


Рис. 7

s при $k = 0,25$ и $m = 4$

s при $k = 1$ и $m = 4$

s при $k = 4$ и $m = 4$

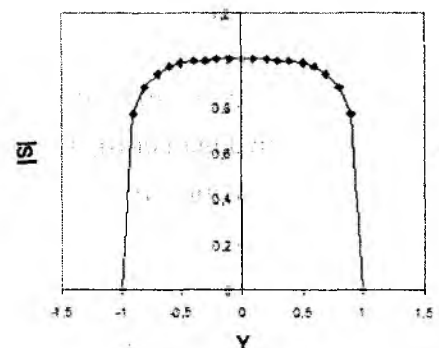


Рис. 8

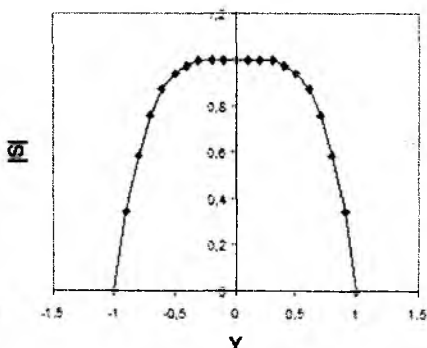


Рис. 9

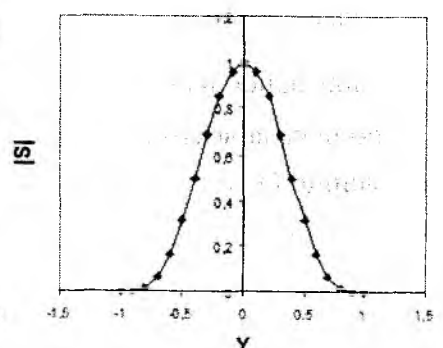


Рис. 10

При проведении виртуального моделирования оперативного вмешательства, конечной целью которого является создание модели анатомической области, удовлетворяющей пациента, необходимо многоэтапное преобразование изображения, связанное с перемещением большого числа вокселей в различных направлениях. Поэтому для того, чтобы изложенный выше подход к методу коррекции изображения сохранял корректность при любых перемещениях любых вокселей, необходимо после завершения перемещения одного вокселя и до начала перемещения второго производить восстановление растрового расположения вокселей, что осуществляется с помощью интерполяции [3].

Выводы

1. Рассмотрены ключевые задачи компьютерного планирования пластических хирургических вмешательств, включающие в себя определение геометрии области коррекции изображения; установление законов перемещения ведомых вокселей при перемещении ведущего вокселя; определение возможных семейств функций, описывающих такие перемещения и выбора из заданного семейства таких функций, которые в наибольшей степени подходят для коррекции изображения в каждом конкретном случае.
2. Предложен метод компьютерного планирования пластических хирургических вмешательств, основанный на изменении объемных томографических данных.
3. Обосновано использование шарообразной области коррекции изображения и предложена методика расчета радиуса этой области как функции модуля перемещения ведущего вокселя.
4. Предложена зависимость, описывающая изменение координат ведомого вокселя как функции перемещения ведущего вокселя, основанная на использовании определенного семейства функций, и проведен обоснованный выбор наиболее адекватных функций для коррекции изображения.
5. Перспективой работы является клиническая апробация предложенного метода и определение его возможностей при планировании пластических оперативных вмешательств в медицинской практике.

Список литературы: 1. *Waters, K.* A physical model of facial tissue and muscle articulation derived from computer tomography data. In *Visualization in Biomedical Computing (VBC'92)*, Chappel Hill, NC, 1992. 2. *Fung, J.C.* Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues // Springer-Verlag. – 1981. – P. 242-245. 3. *Книгавко, Ю.В.* Метод компьютерного планирования пластических вмешательств на лице человека за счет изменения объемных томографических данных // *Радиотехника*. – Вып. 168. – 2012. – С. 87-92. 4. *Погорелов, А.В.* Аналитическая геометрия. – М. : Наука. – 1968. – С. 176.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 25.08.2012