

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ МЕТОДОМ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

А. А. Волков, Э. А. Дедиков

При создании систем автоматического управления распределением потоков в гидравлических сетях, при разработке управляющих систем (регуляторов), содержащих гидравлические или пневматические цепи и сети, возникает задача исследования динамических процессов в этих системах и определения их динамических характеристик. Для сложных сетей или систем решение такой задачи связано с получением математического описания их неустановившихся процессов и решением полученных зависимостей при помощи электронных цифровых вычислительных устройств или машин.

Математическое описание ступенчато-неоднородных гидравлических цепей или сетей структурно определяется математическим описанием их отдельных однородных участков и их топологией (или графом). Неустановившиеся процессы в отдельных гидравлических цепях в конечном счете определяются такими же уравнениями, как и уравнения переходных процессов в электрических длинных линиях с идеальной изоляцией.

Математическое описание гидравлических сетей представляет собой сложную систему уравнений отдельных однородных линий и уравнений их связи. Известные методы решения и исследования подобных систем с использованием теории пассивных четырехполюсников [2] предусматривают знание нагрузочных импедансов и предназначены для сетей, графы которых содержат только корневые деревья. В случае же если граф сети содержит наряду с висячими вершинами и ребрами также и циклы, этот метод оказывается непригодным.

В данной работе предлагается метод применения многополюсников для определения переходных процессов в ветвях гидравлических сетей, позволяющий автоматизировать решение задачи определения переходных процессов в любых сечениях сети. Это особенно важно при использовании для этих целей вычислительных машин и устройств.

Рассмотрим одномерное изотермическое неустановившееся течение несжимаемой жидкости по сложной сети, с целью определения динамических характеристик сети как объекта автоматического управления. Дифференциальное уравнение, описывающее поведение жидкости в отдельно взятой ветви, имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi(xt)}{\partial x} &= L_a \frac{\partial q(xt)}{\partial t} + R_a q^2(xt) \\ -\frac{\partial q(xt)}{\partial x} &= C_a \frac{\partial \varphi(xt)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varphi(xt)$ — давление в сечении x ;

$q(xt)$ — расход жидкости через сечение x в единицу времени;

L_a — параметр, определяющий индуктивные свойства ветви;

C_a — параметр, определяющий емкостные свойства ветви;

R_a — параметр, определяющий сопротивление ветви.

Используя метод малых приращений и произведя линеаризацию нелинейного члена* в пределах $q_0 < q < q_1$, получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} &= L_a \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + 2aq(x, t) \\ -\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} &= C_a \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $2a = 2R|q|_{\text{ср.}}$.

Аналогичное уравнение описывает процесс распространения электрического напряжения и тока вдоль длинной линии, в которой отсутствуют утечки.

Будем считать состояние длинной линии в момент $t < 0$ установившимся, а $\varphi(x, t)$ и $q(x, t)$ избыточными значениями давления и расхода над стационарными, существовавшими при $t < 0$. Тогда граничные и начальные условия для процесса, описываемого (2), могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} x = 0; \quad \varphi(0, t) &= \varphi_1(t); \quad t = 0; \quad \varphi(x, t) = 0; \\ x = l; \quad q(l, t) &= q(t); \quad q(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\varphi(t)$ и $q(t)$ — известные функции времени.

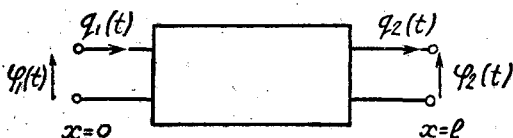


Рис. 1.

Совокупность уравнений (2), граничных и начальных условий (3) позволят определить поведение переменных q , φ в любом сечении ветви.

1. Рассмотрим вначале способ решения системы (2), позволяющий определить значение переменных на границах участка длинных линий путем представления этого участка в виде четырехполюсника с распределенными параметрами (рис. 1).

Обозначим

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi(0, t) \text{ для } x = 0; \\ \varphi_2(t) &= \varphi(l, t) \text{ для } x = l, \end{aligned}$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ известные функции времени, равные нулю при $t \leq 0$ и удовлетворяющие условиям Дирихле.

Тогда значения функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \end{aligned} \quad (4)$$

* * Линеаризацию можно производить методом, указанным в [1], или используя разложение нелинейной функции в ряд Тейлора.

где $\Phi_1(\omega)$ и $\Phi_2(\omega)$ — частотные спектры функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, определяемые из выражений

$$\begin{aligned}\Phi_1(\omega) &= \int_0^{\infty} \varphi_1(t) e^{-j\omega t} dt; \\ \Phi_2(\omega) &= \int_0^{\infty} \varphi_2(t) e^{-j\omega t} dt.\end{aligned}\quad (5)$$

Будем искать решение системы (2) для составляющих частотных спектров $\Phi_1(\omega)$ и $\Phi_2(\omega)$.

Произведя преобразования по Фурье каждого члена уравнений (2), получим

$$\begin{aligned}-\frac{d\Phi(x, \omega)}{dx} &= j\omega L_a Q(x, \omega) + 2aQ(x, \omega); \\ -\frac{dQ(x, \omega)}{dx} &= j\omega C_a \Phi(x, \omega).\end{aligned}\quad (6)$$

Подставив второе уравнение в первое, найдем

$$\frac{d^2 Q(x, \omega)}{dx^2} = (j\omega L_a + 2a) j\omega C_a Q(x, \omega). \quad (7)$$

Отсюда

$$Q(x, \omega) = A_1(\omega) e^{\nu(j\omega)x} + A_2(\omega) e^{-\nu(j\omega)x}. \quad (8)$$

Из второго уравнения системы (6) с учетом (8) получим

$$\Phi(x, \omega) = -\rho(j\omega) A_1(\omega) e^{\nu(j\omega)x} + \rho(j\omega) A_2(\omega) e^{-\nu(j\omega)x}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}\nu(j\omega) &= \sqrt{(j\omega L_a + 2a) j\omega C_a}; \\ \rho(j\omega) &= \sqrt{\frac{j\omega L_a + 2a}{j\omega C_a}} \dots\end{aligned}\quad (10)$$

$A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ определяются по заданным граничным условиям.

Полученные решения (8) и (9) позволяют найти значения любых двух переменных, входящих в заданную систему (рис. 1), если заданы граничные значения двух других переменных.

Рассмотрим три возможных случая задания граничных условий.

$$\begin{aligned}\text{а) } x=0 \quad \Phi(0, \omega) &= \Phi_1; \\ x=l \quad \Phi(l, \omega) &= \Phi_2.\end{aligned}\quad (11)$$

Значения переменных $Q(0, \omega)$ и $Q(l, \omega)$ с учетом (8) и (9) определяются выражением

$$\begin{aligned}Q(0, \omega) = Q_1(\omega) &= \frac{\text{cth } \nu(j\omega)l}{\rho(j\omega)} \Phi_1 - \frac{1}{\rho(j\omega) \text{sh } \nu(j\omega)l} \Phi_2; \\ Q(l, \omega) = Q_2(\omega) &= \frac{1}{\rho(j\omega) \text{sh } \nu(j\omega)l} \Phi_1 - \frac{\text{cth } \nu(j\omega)l}{\rho(j\omega)} \Phi_2.\end{aligned}\quad (12)$$

Эту систему можно записать в матричном виде

$$\begin{aligned}\vec{Q}(\omega) &= Y(j\omega) \vec{\Phi}(\omega), \\ \text{где } \vec{Q}(\omega) &= \begin{pmatrix} Q_1(\omega) \\ Q_2(\omega) \end{pmatrix}; \quad \vec{\Phi}(\omega) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (13)$$

$Y(j\omega)$ — матрица, составленная из коэффициентов системы (12), называется матрицей полных проходимостей четырехполюсника.

$$\begin{aligned} \text{б) } x = 0; \quad Q(0, \omega) &= Q_1; \\ x = l; \quad Q(l, \omega) &= Q_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Значения переменных $\Phi(0, \omega)$ и $\Phi(l, \omega)$ из (8) и (9) с учетом (14) определяются выражением

$$\begin{aligned} \Phi(0, \omega) &= \rho(j\omega) \operatorname{cth} \gamma(j\omega) l Q_1 - \frac{\rho(j\omega)}{\operatorname{sh} \gamma(j\omega) l} Q_2; \\ \Phi(l, \omega) &= \frac{\rho(j\omega)}{\operatorname{sh} \gamma(j\omega) l} Q_1 - \rho(j\omega) \operatorname{cth} \gamma(j\omega) l Q_2, \end{aligned} \quad (15)$$

или в матричной форме

$$\vec{\Phi}(\omega) = Z(j\omega) \vec{Q}(\omega),$$

где

$$\vec{\Phi}(\omega) = \begin{pmatrix} \Phi(0, \omega) \\ \Phi(l, \omega) \end{pmatrix}; \quad \vec{Q}(\omega) = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

$Z(j\omega)$ — матрица, составленная из коэффициентов (15), называется матрицей полных сопротивлений четырехполюсника.

Связь между матрицами $Y(j\omega)$ и $Z(j\omega)$ имеет вид

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= Y(j\omega)^{-1} \\ \text{в) } x = 0 \quad \Phi(0, \omega) &= \Phi_1; \\ x = l \quad Q(0, \omega) &= Q_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Значения переменных на выходе четырехполюсника определяются выражением

$$\begin{aligned} \Phi_2(\omega) &= \operatorname{ch} \gamma(j\omega) l \Phi_1 - \rho(j\omega) \operatorname{sh} \gamma(j\omega) l Q_1, \\ Q_2(\omega) &= -\frac{1}{\rho(j\omega)} \operatorname{sh} \gamma(j\omega) l \Phi_1 + \operatorname{ch} \gamma(j\omega) l Q_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Матрица $S(j\omega)$, составленная из коэффициентов (18), называется матрицей передачи четырехполюсника. Причем

$$\operatorname{Det} [S(j\omega)] = 1.$$

Матрицы полных сопротивлений $Z(j\omega)$ и полных проводимостей $Y(j\omega)$ могут быть выражены через элементы матрицы передачи $S(j\omega)$.

Пусть

$$S(j\omega) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}; \quad Y(j\omega) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}; \quad Z(j\omega) = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Тогда, используя выражения (12), (15) и (18), легко получить

$$Y(j\omega) = \begin{pmatrix} \frac{-S_{11}}{S_{12}} & \frac{1}{S_{12}} \\ \frac{-1}{S_{12}} & \frac{S_{22}}{S_{12}} \end{pmatrix}; \quad Z(j\omega) = \begin{pmatrix} \frac{-S_{22}}{S_{21}} & \frac{1}{S_{21}} \\ \frac{-1}{S_{21}} & \frac{S_{11}}{S_{21}} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Таким образом, знание матрицы $S(j\omega)$ позволит для любой пары переменных, заданных на клеммах четырехполюсника, определить другую пару переменных.

2. Рассмотрим способ решения системы уравнений (2), позволяющий определить значения переменных на границах участка длинной линии и в некотором ее сечении путем представления участка длинной линии в виде многополюсника.

На рис. 2 приведено устройство, имеющее n пар выводных клемм, причем каждой паре клемм поставлено в соответствие две переменных Φ_i , Q_i . Вся совокупность переменных Q_i и Φ_i связаны друг с другом соотношениями

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} &= Z \cdot \vec{Q}; \\ \vec{Q} &= Y \cdot \vec{\Phi},\end{aligned}\quad (21)$$

где

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix}; \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}.$$

Z и Y квадратные матрицы порядка $n \times n$.

Такое устройство называется многополюсником, или $2n$ -полюсником, а матрицы Z и Y соответственно матрицами полных сопротивлений и полных проводимостей многополюсника.

Найдем решение (6) в некотором сечении x_1 с граничными условиями (11), используя матрицы полных проводимостей многополюсника. Для этого представим длинную линию в виде многополюсника следующим образом. Разсечем длинную линию в сечении x_1 . В месте разсечения поставим клеммы и придадим им две переменных Φ_{x_1} и Q_{x_1} (рис. 3).

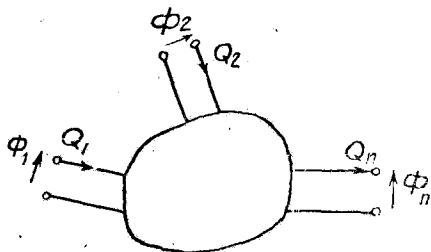


Рис. 2.

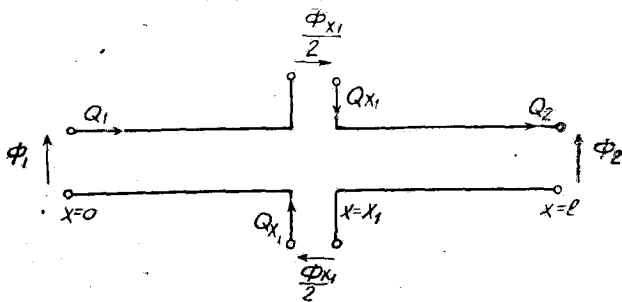


Рис. 3.

Полученное соединение можно представить в виде шестиполюсника G (рис. 4).

Связи между переменными на его клеммах можно получить из выражения

$$\vec{Q} = Y \cdot \vec{\Phi}, \quad (22)$$

где

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_{x_1} \\ Q_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_{x_1} \\ \Phi_2 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}.$$

Y — матрица полных проводимостей шестиполюсника G .

Если в выражение (22) положить $\Phi_{x_1} = 0$, что соответствует замыканию накоротко клемм x_1 многополюсника G , то

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_{x_1} \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ 0 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

Отсюда

$$Q_{x_1} = y_{21}\Phi_1 + y_{23}\Phi_2. \quad (24)$$

Таким образом, решение системы (6) с граничными условиями (11) для некоторого сечения x сводится к нахождению матрицы полных проводимостей Y рассматриваемого многополюсника.

В качестве примера составления матрицы полных проводимостей рассмотрим соединение, показанное на рис. 5, где данными являются:

S_I — матрица передачи участка I ;
 S_{II} — матрица передачи участка II ;
 Φ_1 ; Φ_{x_1} ; Φ_6 .

Требуется определить Q_1 ; Q_{x_1} ; Q_6 .
 По (20) находим Z_I и Z_{II} четырехполюсников I и II .

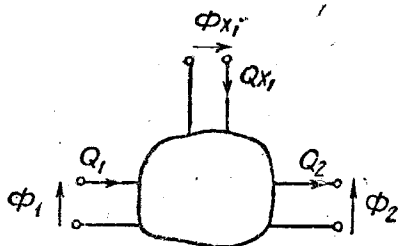


Рис. 4.

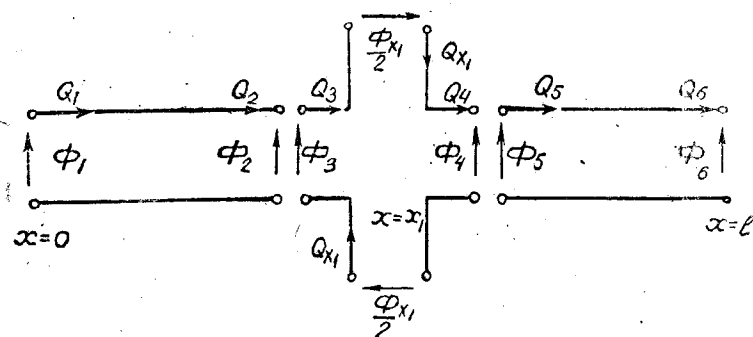


Рис. 5.

Уравнение цепи рис. 5 будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= z_{11}^I Q_1 + z_{12}^I Q_2; & \Phi_5 &= z_{11}^{II} Q_5 + z_{12}^{II} Q_6; \\ \Phi_2 &= z_{21}^I Q_1 + z_{22}^I Q_2; & \Phi_6 &= z_{21}^{II} Q_5 + z_{22}^{II} Q_6; \end{aligned}$$

$$Q_2 = Q_3$$

$$\Phi_2 = \Phi_3$$

$$\Phi_4 - \Phi_3 = \Phi_{x_1}.$$

$$Q_3 = Q_4$$

$$\Phi_4 = \Phi_5$$

$$Q_4 = Q_5$$

(25)

Выделим в уравнениях (25) Φ_1 , Φ_x и Φ_6 в правую часть:

$$\begin{aligned} z_{11}^I Q_1 + z_{12}^I Q_2 &= \Phi_1; & Q_3 - Q_x &= 0; \\ z_{21}^I Q_1 + z_{22}^I Q_2 - \Phi_2 &= 0; & Q_x - Q_4 &= 0; \\ Q_2 - Q_3 &= 0; & \Phi_4 - \Phi_5 &= 0; \\ \Phi_2 - \Phi_5 &= 0; & Q_4 - Q_5 &= 0; \\ \Phi_4 - \Phi_3 &= \Phi_x. & z_{11}^{II} Q_5 + z_{12}^{II} Q_6 - \Phi_5 &= 0; \\ & & z_{21}^{II} Q_5 + z_{22}^{II} Q_6 &= \Phi_6. \end{aligned} \quad (26)$$

Перепишем (26) в виде

$$A\vec{V} = \vec{W}, \quad (27)$$

где A квадратная матрица порядка $n \times n$ (n — число уравнений в системе (26)), составленная из коэффициентов уравнений (26), причем вместо недостающих коэффициентов в строках матрицы поставлены нули.

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ Q_1 \\ Q_x \\ Q_6 \end{bmatrix} \quad \vec{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_x \\ \Phi_6 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Предположим, что матрица A неособенная. В этом случае для матрицы A найдется обратная матрица A^{-1} и вектор $\vec{V}$ запишется в виде

$$\vec{V} = A^{-1}\vec{W}. \quad (29)$$

Так как первые восемь компонент вектора W равны нулю, то в выражении (29) можно вычеркнуть первые восемь столбцов матрицы A^{-1} . Получим выражение

$$\vec{V} = A_1^{-1}\vec{W}, \quad (30)$$

где A_1^{-1} — часть обратной матрицы A^{-1} , имеющая размерность $n \times k$; n — количество строк; k — количество оставшихся столбцов (в данном случае 3).

В (30) выделяем только те компоненты матрицы A_1^{-1} , которые связывают переменные Q_i и Φ_i на клеммах шестиполюсника (рис. 5). Полученная матрица будет представлять матрицу полных проводимостей искомого шестиполюсника, которая позволяет по (22) найти искомый вектор $\vec{Q}$.

Данный метод, позволяющий получить частотные характеристики системы и автоматизировать процессы их вычисления, может быть использован для исследования динамических процессов в сложных сетях, как многомерных объектах систем автоматического управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Чарный. Неустойчившееся движение реальной жидкости по трубам. Гостехтеоретиздат, М., 1951.
2. Ю. Н. Гризодуб. Применение теории пассивных четырехполюсников к расчету распространения колебаний в гидросистемах. «Автоматика и телемеханика» 1950, № 2.