УДК 621.371.3

А.И. КОЗАРЬ, канд. физ.-мат. наук

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА СЛОЖНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТКАХ РЕЗОНАНСНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР

Целью работы является решение задачи о рассеянии электромагнитных волн на сложных пространственных решетках определенного вида, построенных из малых однородных резонансных магнитодиэлектрических сферах, находящихся в свободном пространстве.

Рассмотрим сложную пространственную решетку, состоящую из C подрешеток – простых решеток ($c \in C$). Эти подрешетки порождаются координатным представлением, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} x_{c,s} &= \left[s-0{,}5\left\{(-1)^s-1\right\}\right]d-(-1)^{s-1}x_{c,s=0} && (s=0,\pm1,\pm2,\ldots),\\ y_{c,t} &= \left[t-0{,}5\left\{(-1)^t-1\right\}\right]h-(-1)^{t-1}y_{c,t=0} && (t=0,\pm1,\pm2,\ldots),\\ z_{c,p} &= \left[p-0{,}5\left\{(-1)^p-1\right\}\right]l-(-1)^{p-1}z_{c,p=0} && (p=0,\pm1,\pm2,\ldots), \end{aligned} \tag{1}$$

где величины d, h, l определяются условиями $x=0$, $x=d$; $y=0$, $y=h$; $z=0$, $z=l$, а $x_{c,s=0}$, $y_{c,t=0}$, $z_{c,p=0}$ - координаты узла подрешетки c, находящегося внутри области

$$\begin{aligned} 0 &< x_{c,s=0} < d,\\ 0 &< y_{c,t=0} < h,\\ 0 &< z_{c,p=0} < l. \end{aligned} \tag{2}$$

Координаты $x_{c,s}$, $y_{c,t}$, $z_{c,p}$ – определяют положение узлов подрешетки c вне пределов области (2) и являются функциями координат $x_{c,s=0}$, $y_{c,t=0}$, $z_{c,p=0}$. Каждому узлу пространственной подрешетки c (1) сопоставляется упорядоченная тройка чисел $u=c(p,s,t)$. Выделенный узел решетки будем обозначать $u'=c'(p',s',t')$, а узел внутри области (2) – $c(p=0,s=0,t=0)$. Задавая максимальные значения для чисел (p, s, t) в (1), можно рассматривать конечные и бесконечные решетки. В координатное представление (1) можно ввести зависимость от времени, полагая, что координаты $x_{c,s=0}$, $y_{c,t=0}$, $z_{c,p=0}$ являются некоторыми функциями времени.

Нужный тип элементарной ячейки решетки (примитивной, объемноцентрированной, гранецентрированной и других) формируют из C узлов внутри области (2), которую повторит за пределами области (2) координатное представление (1) в виде пространственной решетки определенного вида.

Если изменять координаты узлов в области (2), то положения узлов вне области (2) будут также соответствующим образом смещаться, и будет происходить перестройка и формирование пространственной конфигурации решетки и ее ячеек. Когда узел находится в центре области (2), то d, h, l являются постоянными правильной ортогональной решетки по осям x, y, z соответственно.

Расстояние между узлами определим (1)

$$r_{c'(p',s',t'),(p,s,t)}=\sqrt{(x_{c',s'}-x_{c,s})^2+(y_{c',t'}-y_{c,t})^2+(z_{c',p'}-z_{c,p})^2}\,. \tag{3}$$

В узлы пространственных подрешеток (1) помещаются центры малых однородных резонансных магнитодиэлектрических сфер с проницаемостями ε_c, μ_c и радиусами a_c.

Будем считать, что вне сфер $a/\lambda << 1$, но внутри сфер возможен резонансный случай $a/\lambda \sim 1$, где λ - длина волны [1].

Для решения задачи будем использовать интегральные уравнения [2] и решать ее будем в два этапа. На первом этапе найдем внутреннее поле рассеивающих сфер, а на втором – поле, рассеянное пространственной решеткой сфер. Поля представим в виде $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$, $\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$.

Рассеянное поле по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический $\vec{\Pi}^{э}$ и магнитный $\vec{\Pi}^{м}$ потенциалы Герца:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{pacc} &= (\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^{э} - ik\mu_0[\nabla, \vec{\Pi}^{м}], \\ \vec{H}_{pacc} &= (\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^{м} + ik\varepsilon_0[\nabla, \vec{\Pi}^{э}]. \end{aligned} \tag{4}$$

Потенциалы Герца рассеянного поля имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}^{э} &= \frac{1}{4\pi}\int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right)\vec{E}^0(\vec{r}')f(|\vec{r} - \vec{r}'|)dV, \\ \vec{\Pi}^{м} &= \frac{1}{4\pi}\int_V \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\vec{H}^0(\vec{r}')f(|\vec{r} - \vec{r}'|)dV, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\vec{E}^0(\vec{r}'), \vec{H}^0(\vec{r}')$ - внутренние поля рассеивателя; V – объем рассеивателя; ε_0, μ_0 - проницаемости заполнения свободного пространства; функция $f(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ является решением уравнения

$$\Delta f(|\vec{r} - \vec{r}'|) + k^2\varepsilon_0\mu_0 f(|\vec{r} - \vec{r}'|) = -4\pi\delta(|\vec{r} - \vec{r}'|),$$

удовлетворяющего условию излучения на бесконечности и имеет вид

$$f(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \tag{6}$$

Вычислим вначале внутреннее поле рассеивателей для случая, когда отношение $a/\lambda << 1$ внутри и вне сферы, а потом результаты вычислений обобщим и на резонансный случай, когда $a/\lambda \sim 1$ внутри сферы. Можно показать, что для внешних точек сферы интеграл по объему сферы от функции Грина для свободного пространства (6) имеет вид

$$W(\vec{r}) = \int_V \frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1 a - k_1 a\cos k_1 a)\frac{e^{-ik_1 r}}{r}, \tag{7}$$

где $k_1 = k\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$; $k = 2\pi/\lambda$, а r – расстояние от центра и до внешних точек сферы.

Внутреннее поле $c'(p',s',t')$ сферы найдем из системы квазистационарных неоднородных уравнений, которые построим, опираясь на интегральные уравнения [2]. Входящие в эту систему уравнений неоднородные уравнения для произвольной выделенной сферы имеют вид

$$\vec{E}_{oc'(p',s',t')}(\vec{r}',t)=\left(\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)\right\}\vec{E}^0{}_{c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)-\right.$$
$$-\sum_{\substack{p\ s\ t\\ c'(p,s,t)\neq c'(p',s',t')}}\sum\sum\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{c'(p,s,t)}(\vec{r})\vec{E}^0_{c'(p,s,t)}(\vec{r}',t)-\right.$$
$$\left.\left.-ik\mu_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{c'(p,s,t)}(\vec{r})\vec{H}^0_{c'(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right]\right\}\right)_{c'}-$$
$$-\sum_{\substack{c=1\\(c\neq c')}}^{C}\left(\sum_p\sum_s\sum_t\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{c(p,s,t)}\vec{E}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}',t)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-ik\mu_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{c(p,s,t)}(\vec{r}')\vec{H}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right]\right\}\right)_{c}, \tag{8}$$

$$\vec{H}_{oc'(p',s',t')}(\vec{r}',t)=\left(\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)\right\}\vec{H}^0_{c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)-\right.$$
$$-\sum_{\substack{p\ s\ t\\ c'(p,s,t)\neq c'(p',s',t')}}\sum\sum\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{c'(p,s,t)}(\vec{r})\vec{H}^0_{c'(p,s,t)}(\vec{r}',t)+\right.$$
$$\left.\left.+ik\varepsilon_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{c'(p,s,t)}(\vec{r})\vec{E}^0_{c'(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right]\right\}\right)_{c'}-$$
$$-\sum_{\substack{c=1\\(c\neq c')}}^{C}\left(\sum_p\sum_s\sum_t\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{c(p,s,t)}(\vec{r})\vec{H}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}',t)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+ik\varepsilon_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{c(p,s,t)}(\vec{r})\vec{E}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right]\right\}\right)_{c},$$

где $\vec{E}_{oc'(p',s',t')}(\vec{r}',t)$, $\vec{H}_{oc'(p',s',t')}(\vec{r}',t)$ и $\vec{E}^0_{c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)$, $\vec{H}^0_{c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)$ - поля падающей волны и внутренние поля $c'(p',s',t')$ сферы, а $\vec{E}_{c(p,s,t)}(\vec{r}',t)$, $\vec{H}_{c(p,s,t)}(\vec{r}',t)$ - внутренние поля остальных сфер.

Величины $W^{\bar{i}}_{c(p,s,t)}(\vec{r}')$, $W^{\bar{N}}_{c(p,s,t)}(\vec{r}')$ имеют вид (3, 7, 8):

$$W^{э}_{c(p,s,t)}(\vec{r}\,') = \frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos a_c)\frac{e^{-ik_1 r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}}{r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}},$$
$$W^{м}_{c(p,s,t)}(\vec{r}\,') = -\frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos a_c)\frac{e^{-ik_1 r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}}{r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}. \qquad (9)$$

Первые слагаемые справа в уравнениях (8) связаны с внутренним полем $c'(p',s',t')$ сферы без учета влияния всех остальных сфер, оставшиеся слагаемые учитывают влияние на $c'(p',s',t')$ - рассеиватель всех остальных сфер.

Уравнения (8) представляют систему $2N = 2\sum_{c=1}^{C} N_c$ векторных неоднородных уравнений, где N – общее число сфер решетки, а N_c - число сфер подрешетки c. Решение этой системы уравнений для выделенной сферы имеет вид:

$$\vec{E}^{0}_{c'(p',s',t')}(\vec{r}\,',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c=1}^{C}\left(\sum_{u}\left[\hat{g}^{эu'}_{u}\vec{E}_{oc(p,s,t)}(\vec{r}\,',t) + \hat{\beta}^{эu'}_{u}\vec{H}_{oc(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)\right]\right),$$
$$\vec{H}^{0}_{c'(p',s',t')}(\vec{r}\,',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c=1}^{C}\left(\sum_{u}\left[\hat{\beta}^{мu'}_{u}\vec{H}_{oc(p,s,t)}(\vec{r}\,',t) + \hat{g}^{мu'}_{u}\vec{E}_{oc(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)\right]\right), \qquad (10)$$

$$\hat{g}^{эu'}_{u} = \begin{bmatrix} g^{эu'}_{xxu} & g^{эu'}_{xyu} & g^{эu'}_{xzu} \\ g^{эu'}_{yxu} & g^{эu'}_{yyu} & g^{эu'}_{yzu} \\ g^{эu'}_{zxu} & g^{эu'}_{zyu} & g^{эu'}_{zzu} \end{bmatrix}; \qquad \hat{\beta}^{эu'}_{u} = \begin{bmatrix} \beta^{эu'}_{xxu} & \beta^{эu'}_{xyu} & \beta^{эu'}_{xzu} \\ \beta^{эu'}_{yxu} & \beta^{эu'}_{yyu} & \beta^{эu'}_{yzu} \\ \beta^{эu'}_{zxu} & \beta^{эu'}_{zyu} & \beta^{эu'}_{zzu} \end{bmatrix};$$

$$\hat{\beta}^{мu'}_{u} = \begin{bmatrix} \beta^{мu'}_{xxu} & \beta^{мu'}_{xyu} & \beta^{мu'}_{xzu} \\ \beta^{мu'}_{yxu} & \beta^{мu'}_{yyu} & \beta^{мu'}_{yzu} \\ \beta^{мu'}_{zxu} & \beta^{мu'}_{zyu} & \beta^{мu'}_{zzu} \end{bmatrix}; \qquad \hat{g}^{мu'}_{u} = \begin{bmatrix} g^{мu'}_{xxu} & g^{мu'}_{xyu} & g^{мu'}_{xzu} \\ g^{мu'}_{yxu} & g^{мu'}_{yyu} & g^{мu'}_{yzu} \\ g^{мu'}_{zxu} & g^{мu'}_{zyu} & g^{мu'}_{zzu} \end{bmatrix},$$

а $\Delta^{эм}$ - детерминант основной матрицы системы уравнений (8).
Компоненты внутреннего поля сферы (10) представим в виде

$$E^{0}_{xu'}(\vec{r}\,',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c=1}^{C}\left(\sum_{u}\left[g^{эu'}_{xxu}E_{oxu}(\vec{r}\,',t) + g^{эu'}_{xyu}E_{oyu}(\vec{r}\,',t) + g^{эu'}_{xzu}E_{ozu}(\vec{r}\,',t) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \beta^{эu'}_{xxu}H_{oxu}(\vec{r}\,',t) + \beta^{эu'}_{xyu}H_{oyu}(\vec{r}\,',t) + \beta^{эu'}_{xzu}H_{ozu}(\vec{r}\,',t)\right]\right),$$
$$E^{0}_{yu'}(\vec{r}\,',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c=1}^{C}\left(\sum_{u}\left[g^{эu'}_{yxu}E_{oxu}(\vec{r}\,',t) + g^{эu'}_{yyu}E_{oyu}(\vec{r}\,',t) + g^{эu'}_{yzu}E_{ozu}(\vec{r}\,',t) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \beta^{эu'}_{yxu}H_{oxu}(\vec{r}\,',t) + \beta^{эu'}_{yyu}H_{oyu}(\vec{r}\,',t) + \beta^{эu'}_{yzu}H_{ozu}(\vec{r}\,',t)\right]\right),$$
$$E^{0}_{zu'}(\vec{r}\,',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c=1}^{C}\left(\sum_{u}\left[g^{эu'}_{zxu}E_{oxu}(\vec{r}\,',t) + g^{эu'}_{zyu}E_{oyu}(\vec{r}\,',t) + g^{эu'}_{zzu}E_{ozu}(\vec{r}\,',t) + \right.\right.$$

$$+\beta^{эu'}_{zxu}H_{oxu}(\vec{r}',t)+\beta^{эu'}_{zyu}H_{oyu}(\vec{r}',t)+\beta^{эu'}_{zzu}H_{ozu}(\vec{r}',t)\Big]\Big),$$

$$H^{0}_{xu'}(\vec{r}',t)=\frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c=1}^{C}\Big(\sum_{u}\Big[\beta^{мu'}_{xxu}H_{oxu}(\vec{r}',t)+\beta^{мu'}_{xyu}H_{oyu}(\vec{r}',t)+\beta^{мu'}_{xzu}H_{ozu}(\vec{r}',t)+$$

$$+g^{мu'}_{xxu}E_{oxu}(\vec{r}',t)+g^{мu'}_{xyu}E_{oyu}(\vec{r}',t)+g^{мu'}_{xzu}E_{ozu}(\vec{r}',t)\Big]\Big),$$

$$H^{0}_{yu'}(\vec{r}',t)=\frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c=1}^{C}\Big(\sum_{u}\Big[\beta^{мu'}_{yxu}H_{oxu}(\vec{r}',t)+\beta^{мu'}_{yyu}H_{oyu}(\vec{r}',t)+\beta^{мu'}_{yzu}H_{ozu}(\vec{r}',t)+$$

$$+g^{мu'}_{yxu}E_{oxu}(\vec{r}',t)+g^{мu'}_{yyu}E_{oyu}(\vec{r}',t)+g^{мu'}_{yzu}E_{ozu}(\vec{r}',t)\Big]\Big),$$

$$H^{0}_{zu'}(\vec{r}',t)=\frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c=1}^{C}\Big(\sum_{u}\Big[\beta^{мu'}_{zxu}H_{oxu}(\vec{r}',t)+\beta^{мu'}_{zyu}H_{oyu}(\vec{r}',t)+\beta^{мu'}_{zzu}H_{ozu}(\vec{r}',t)+$$

$$+g^{мu'}_{zxu}E_{oxu}(\vec{r}',t)+g^{мu'}_{zyu}E_{oyu}(\vec{r}',t)+g^{мu'}_{zzu}E_{ozu}(\vec{r}',t)\Big]\Big).$$

Для случая, когда можно предположить, что у всех сфер с одинаковым индексом p каждой подрешетки (1) внутренние поля равны, например, внутреннему полю $\vec{E}^{0}_{c(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)$ сферы $c(p,s=0,t=0)$, расположенной на оси z, систему уравнений для сложной решетки можно свести к системе, число уравнений которой будет равно числу сфер решетки, расположенных вдоль оси z - $(2|p_m|+1)C$, где p_m - максимальное значение индекса p (1). Входящие в эту систему уравнения для выделенной сферы $c'(p',s'=0,t'=0)$, представим в виде

$$\vec{E}_{oc'(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)=\left(\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)\right\}\vec{E}^{0}_{c'(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)-\right.$$

$$-\sum_{\substack{p\ s\ t\\ c'(p,s,t)\neq c'(p',s',t')}}\sum\sum\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{c'(p,s,t)}(\vec{r})\vec{E}^{0}_{c'(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)-\right.$$

$$\left.\left.-ik\mu_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{c'(p,s,t)}(\vec{r})\vec{H}^{0}_{c'(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)\right]\right\}\right)_{c'}-$$

$$-\sum_{\substack{c=1\\(c\neq c')}}^{C}\left(\sum_{p}\sum_{s}\sum_{t}\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_{c}}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{c(p,s,t)}\vec{E}^{0}_{c(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-ik\mu_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_{c}}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{c(p,s,t)}(\vec{r})\vec{H}^{0}_{c(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)\right]\right\}\right)_{c},$$

$$\vec{H}_{oc'(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)=\left(\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)\right\}\vec{H}^{0}_{c'(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)-\right.$$

$$-\sum_{\substack{p\ s\ t\\ c'(p,s,t)\neq c'(p',s'=0,t'=0)}}\sum\sum\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{c'(p,s,t)}(\vec{r})\vec{H}^{0}_{c'(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)+\right.$$

$$+ik\varepsilon_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{c'(p,s,t)}(\vec{r})\vec{E}^{0}_{c'(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)\right]\Bigg\}\Bigg)_{c'}-$$

$$-\sum_{\substack{c=1\\(c\neq c')}}^{C}\left(\sum_p\sum_s\sum_t\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{c(p,s,t)}(\vec{r})\vec{H}^{0}_{c(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+ik\varepsilon_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{c(p,s,t)}(\vec{r})\vec{E}^{0}_{c(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)\right]\right\}\right)_{c}.$$

Если выполняются условия $a/\lambda << 1$ и $L/\lambda << 1$, где L – расстояние между центрами сфер, и можно предположить, что внутренние поля каждой сферы подрешетки одинаковы и равны полю сферы $\vec{E}^{0}_{c(p,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)$, находящейся внутри области (2), то систему уравнений (8) можно свести к системе $2C$ неоднородных векторных уравнений и для выделенной сферы $c'(p',s'=0,t'=0)$ эти уравнения представим в виде

$$\vec{E}_{oc'(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)=\left(\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)\right\}\vec{E}^{0}{}_{c'(p'=0,s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)-\right.$$

$$-\sum_{\substack{p\ s\ t\\ c'(p,s,t)\neq c'(p',s'=0,t'=0)}}\sum\sum\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{c'(p,s,t)}(\vec{r})\vec{E}^{0}_{c'(p=0,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)-\right.$$

$$\left.\left.-ik\mu_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{c'(p,s,t)}(\vec{r})\vec{H}^{0}_{c'(p=0,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)\right]\right\}\right)_{c'}-$$

$$-\sum_{\substack{c=1\\(c\neq c')}}^{C}\left(\sum_p\sum_s\sum_t\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{c(p,s,t)}\vec{E}^{0}_{c(p=0,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-ik\mu_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{c(p,s,t)}(\vec{r}')\vec{H}^{0}_{c(p=0,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)\right]\right\}\right)_{c},$$

$$\vec{H}_{oc'(p',s'=0,t'=0)(\vec{r}',t)}=\left(\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)\right\}\vec{H}^{0}_{c'(p'=0,s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)-\right.$$

$$-\sum_{\substack{p\ s\ t\\ c'(p,s,t)\neq c'(p',s'=0,t'=0)}}\sum\sum\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{c'(p,s,t)}(\vec{r})\vec{H}^{0}_{c'(p=0,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)+\right.$$

$$\left.\left.+ik\varepsilon_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{c'(p,s,t)}(\vec{r})\vec{E}^{0}_{c'(p=0,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)\right]\right\}\right)_{c'}-$$

$$-\sum_{\substack{c=1\\(c\neq c')}}^{C}\left(\sum_p\sum_s\sum_t\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{c(p,s,t)}(\vec{r})\vec{H}^{0}_{c(p=0,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+ik\varepsilon_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{c(p,s,t)}(\vec{r})\vec{E}^{0}_{c(p=0,s=0,t=0)}(\vec{r}',t)\right]\right\}\right)_{c}.$$

Для случая, когда падающая волна распространяется вдоль оси z, внутреннее и рассеянное поля представим через пространственные гармоники.

Разложим по собственным функциям постоянных d, h ортогональной решетки (1), (3) выражение [2]

$$\frac{e^{-ik_1 r_{uu'}}}{r_{uu'}}=\frac{2\pi}{dh}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}e^{-i\left[\frac{m\pi}{d}\left(x_{c',s'}-x_{c,s}\right)+\frac{n\pi}{h}\left(y_{c',t'}-y_{c,t}\right)+\beta_{mn}\left|z_{c',p'}-z_{c,p}\right|\right]}, \tag{11}$$

где

$$\chi_{mn}=\begin{cases}2, если\, m=0\, или\, n=0,\\ 1, если\, m,n>0,\end{cases}$$

$$\beta_{mn}=\sqrt{k^2\varepsilon_0\mu_0-\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}\quad (m,n=0,1,2,...).$$

Тогда величины $W^{э}_{c(p,s,t)}(\vec{r})$ и $W^{м}_{c(p,s,t)}(\vec{r})$ (9) можно записать в виде

$$\begin{gathered}W^{э}_{c(p,s,t)}(\vec{r})=\frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1 a_c-\\ -k_1 a_c\cos k_1 a_c)\frac{2\pi}{dh}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}e^{-i\left[\frac{m\pi}{d}\left(x_{c',s'}-x_{c,s}\right)+\frac{n\pi}{h}\left(y_{c',t'}-y_{c,t}\right)+\beta_{mn}\left|z_{c',p'}-z_{c,p}\right|\right]},\\ W^{м}_{c(p,s,t)}(\vec{r})=-\frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1 a_c-\\ -k_1 a_c\cos k_1 a_c)\frac{2\pi}{dh}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}e^{-i\left[\frac{m\pi}{d}\left(x_{c',s'}-x_{c,s}\right)+\frac{n\pi}{h}\left(y_{c',t'}-y_{c,t}\right)+\beta_{mn}\left|z_{c',p'}-z_{c,p}\right|\right]}.\end{gathered} \tag{12}$$

Поля падающей волны относительно рассеивающей сферы представим в виде бесконечной суммы пространственных гармоник:

$$\begin{gathered}\vec{E}_{oc(p,s,t)}(\vec{r}',t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\vec{E}^{mn}_{oc(p,s,t)}(\vec{r}',t),\\ \vec{H}_{oc(p,s,t)}(\vec{r}',t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\vec{H}^{mn}_{oc(p,s,t)}(\vec{r}',t).\end{gathered} \tag{13}$$

Внутренние поля сферы также запишем в виде разложения

$$\vec{E}^{0}_{c(s,t,p)}(\vec{r}',t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\vec{E}^{0mn}_{c(s,t,p)}(\vec{r}',t), \tag{14}$$

$$\vec{H}^{0}_{c(s,t,p)}(\vec{r}\,',t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\vec{H}^{0mn}_{c(s,t,p)}(\vec{r}\,',t),$$

это представление нельзя рассматривать как разложение Фурье.

Уравнения для компонент внутренних полей $\vec{E}^{0}_{c(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)$, $\vec{H}^{0}_{c(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)$ произвольной сферы запишем в виде (11, 12, 13):

$$\vec{E}^{mn}_{oc'(p',s',t')}(\vec{r}\,',t)=\left(\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)\right\}\vec{E}^{0mn}_{c'(p',s',t')}(\vec{r}\,',t)-\right.$$

$$-\sum_{\substack{p\ s\ t\\ c'(p,s,t)\neq c'(p',s',t')}}\sum\sum\frac{2\pi}{dhk_1^3}\left(\sin k_1a_{c'}-k_1a_{c'}\cos k_1a_{c'}\right)\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)\vec{E}^{0mn}_{c'(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)-\right.$$

$$\left.\left.-ik\mu_0\left[\nabla,(-1)\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)\vec{H}^{0mn}_{c'(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)\right]\right\}e^{-i\left[\frac{mn}{d}\left(x_{c',s'}-x_{c',s}\right)+\frac{n\pi}{h}\left(y_{c',t'}-y_{c',t}\right)+\beta_{mn}\left|z_{c',p'}-z_{c',p}\right|\right]}\right)_{c'}-$$

$$-\sum_{\substack{c=1\\(c\neq c')}}^{C}\left(\sum_{p}\sum_{s}\sum_{t}\frac{2\pi}{dhk_1^3}\left(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c\right)\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)\vec{E}^{0mn}_{c(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-ik\mu_0\left[\nabla,(-1)\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)\vec{H}^{0mn}_{c(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)\right]\right\}e^{-i\left[\frac{\pi m}{d}\left(x_{c',s'}-x_{c,s}\right)+\frac{n\pi}{h}\left(y_{c',t'}-y_{c,t}\right)+\beta_{mn}\left|z_{c',p'}-z_{c,p}\right|\right]}\right)_{c},$$

$$\vec{H}^{mn}_{oc'(p',s',t')}(\vec{r}\,',t)=\left(\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)\right\}\vec{H}^{0mn}_{c'(p',s',t')}(\vec{r}\,',t)-\right.\tag{15}$$

$$-\sum_{\substack{p\ s\ t\\ c'(p,s,t)\neq c'(p',s',t')}}\sum\sum\frac{2\pi}{dhk_1^3}\left(\sin k_1a_{c'}-k_1a_{c'}\cos k_1a_{c'}\right)\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)(-1)\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)\vec{H}^{0mn}_{c'(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)+\right.$$

$$\left.\left.+ik\varepsilon_0\left[\nabla,\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)\vec{E}^{0mn}_{c'(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)\right]\right\}e^{-i\left[\frac{\pi m}{d}\left(x_{c',s'}-x_{c',s}\right)+\frac{n\pi}{h}\left(y_{c',t'}-y_{c',t}\right)+\beta_{mn}\left|z_{c',p'}-z_{c',p}\right|\right]}\right)_{c'}-$$

$$-\sum_{\substack{c=1\\(c\neq c')}}^{C}\left(\sum_{p}\sum_{s}\sum_{t}\frac{2\pi}{dhk_1^3}\left(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c\right)\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)(-1)\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)\vec{H}^{0mn}_{c(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+ik\varepsilon_0\left[\nabla,\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)\vec{E}^{0mn}_{c(p,s,t)}(\vec{r}\,',t)\right]\right\}e^{-i\left[\frac{\pi m}{d}\left(x_{c',s'}-x_{c,s}\right)+\frac{n\pi}{h}\left(y_{c',t'}-y_{c,t}\right)+\beta_{mn}\left|z_{c',p'}-z_{c,p}\right|\right]}\right)_{c}.$$

Решение системы уравнений (15) для внутренних полей сфер решетки представим в виде

$$\vec{E}^0_{c'(p',s',t')}(\vec{r},t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\Delta^{mn}}\sum_{c=1}^{C}\left[\sum_{u}\left(\widehat{g}_u^{эu'mn}\vec{E}^{mn}_{oc(p,s,t)}(\vec{r}',t)+\widehat{\beta}_u^{эu'mn}\vec{H}^{mn}_{oc(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right)\right]\right), \tag{16}$$

$$\vec{H}^0_{c'(p',s',t')}(\vec{r},t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\Delta^{mn}}\sum_{c=1}^{C}\left[\sum_{u}\left(\widehat{g}_u^{мu'mn}\vec{E}^{mn}_{oc(p,s,t)}(\vec{r}',t)+\widehat{\beta}_u^{мu'mn}\vec{H}^{mn}_{oc(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right)\right]\right),$$

где Δ^{mn} - детерминант системы уравнений (15).

Числа m, n, связанные с распространяющимися волнами, определяются условием

$$k^2\varepsilon_0\mu_0>\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2,$$

а с затухающими волнами –

$$k^2\varepsilon_0\mu_0<\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2.$$

Полученные решения (10) справедливы, когда $a/\lambda<<1$ и снаружи и внутри сферы. Но их можно обобщить на резонансный случай $a/\lambda\sim 1$, если вместо проницаемостей ε_c и μ_c сферы ввести эффективные проницаемости [3]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{cэф}&=\varepsilon_c F\left(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\right),\\ \mu_{cэф}&=\mu_c F\left(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\right),\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$F\left(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\right)=\frac{2\left(\sin ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}-ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\cos ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\right)}{\left(k^2a_c^2\varepsilon_c\mu_c-1\right)\sin ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}+ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\cos ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}}.$$

Потенциалы Герца (5), рассеянного сферами решетки поля, можно представить, учитывая (10) и (17), в виде суперпозиций потенциалов Герца отдельных сфер решетки:

$$\vec{\Pi}^{э}(\vec{r},t)=\sum_{c=1}^{C}\left[\sum_p\sum_s\sum_t\frac{1}{k_1^3}\left(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c\right)\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)\vec{E}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}',t)\frac{e^{-ik_1r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}}\right]_c \tag{18}$$

,

$$\vec{f}^{\,N}(\vec{r},t)=-\sum_{c=1}^{C}\left[\sum_p\sum_s\sum_t\frac{1}{k_1^3}\left(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c\right)\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)\vec{H}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}',t)\frac{e^{-ik_1r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}}\right]_c$$

.

В соотношениях для потенциалов Герца (18) выражение с экспонентой можно представить в виде разложения по собственным функциям постоянных d, h ортогональной решетки (2):

$$\frac{e^{-ik_1r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}}=\frac{2\pi}{dh}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}e^{-i\left[\frac{m\pi}{d}(x-x_{c,s})+\frac{n\pi}{h}(y-y_{c,t})+\beta_{mn}\left|z-z_{c,p}\right|\right]}. \qquad (19)$$

Здесь $r_{c(p,s,t)}=\sqrt{\left(x-x_{c,s}\right)^2+\left(y-y_{c,t}\right)^2+\left(z-z_{c,p}\right)^2}$,

где координаты (x, y, z) – точка наблюдения рассеянного поля вне сфер решетки, координаты $\left(x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p}\right)$ - точка нахождения центра рассеивающей сферы решетки (1).

Тогда, учитывая (10) и (18), из (4) найдем рассеянные сферами решетки искомые поля:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{pacc}(\vec{r},t)=&\sum_{c=1}^{C}\left[\sum_p\sum_s\sum_t\frac{1}{k_1^3}\left(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c\right)\left\{\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{L}_c\vec{E}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}')-\right.\right.\\&\left.\left.-ik\mu_0\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)(-1)\hat{P}_c\vec{H}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}')\right\}e^{i\left(\omega t-k_1r_{c(p,s,t)}\right)}\right]_c,\\\vec{H}_{pacc}(\vec{r},t)=&\sum_{c=1}^{C}\left[\sum_p\sum_s\sum_t\frac{1}{k_1^3}\left(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c\right)\left\{\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)(-1)\hat{L}_c\vec{H}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}')+\right.\right.\\&\left.\left.+ik\varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{P}_c\vec{E}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}')\right\}e^{i\left(\omega t-k_1r_{c(p,s,t)}\right)}\right]_c,\end{aligned} \qquad (20)$$

где $\hat{L}_c$ и $\hat{P}_c$ - функциональные матрицы вида

$$\hat{L}_c=\begin{bmatrix}\Psi_{xxc}&\Psi_{xyc}&\Psi_{xzc}\\\Psi_{yxc}&\Psi_{yyc}&\Psi_{yzc}\\\Psi_{zxc}&\Psi_{zyc}&\Psi_{zzc}\end{bmatrix};\qquad \hat{P}_c=\begin{bmatrix}0&\Psi_{zc}&\Psi^0_{yc}\\\Psi^0_{zc}&0&\Psi_{xc}\\\Psi_{yc}&\Psi^0_{xc}&0\end{bmatrix}. \qquad (21)$$

Величины, входящие в функциональные матрицы (21), имеют вид (1)

$$\Psi_{xxc}=\frac{1}{r_{c(p,s,t)}}k^2\varepsilon_0\mu_0+\frac{\left|3(x-x_{c,s})^2-r^2_{c(p,s,t)}\right|}{r^5_{c(p,s,t)}}-\frac{k_1^2\left(x-x_{c,s}\right)^2}{r^3_{c(p,s,t)}}+ik_1\frac{\left|3(x-x_{c,s})^2-r^2_{c(p,s,t)}\right|}{r^4_{c(p,s,t)}}$$

,

$$\Psi_{yyc}=\frac{1}{r_{c(p,s,t)}}k^2\varepsilon_0\mu_0+\frac{\left|3(y-y_{c,t})^2-r^2_{c(p,s,t)}\right|}{r^5_{c(p,s,t)}}-\frac{k_1^2\left(y-y_{c,t}\right)^2}{r^3_{c(p,s,t)}}+ik_1\frac{\left|3(y-y_{c,t})^2-r^2_{c(p,s,t)}\right|}{r^4_{c(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{zzc}=\frac{1}{r_{c(p,s,t)}}k^2\varepsilon_0\mu_0+\frac{\left|3(z-z_{c,p})^2-r^2_{c(p,s,t)}\right|}{r^5_{c(p,s,t)}}-\frac{k_1^2\left(z-z_{c,p}\right)^2}{r^3_{c(p,s,t)}}+ik_1\frac{\left|3(z-z_{c,p})^2-r^2_{c(p,s,t)}\right|}{r^4_{c(p,s,t)}},$$

$$\Psi'_{xyc}=\Psi_{yxc}=\frac{3(x-x_{c,s})(y-y_{c,t})}{r^5_{c(p,s,t)}}-k_1^2\frac{(x-x_{c,s})(y-y_{c,t})}{r^3_{c(p,s,t)}}-ik_1\frac{3(x-x_{c,s})(y-y_{c,t})}{r^4_{c(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{xzc}=\Psi_{zxc}=\frac{3(x-x_{c,s})(z-z_{c,p})}{r^5_{c(p,s,t)}}-k_1^2\frac{(x-x_{c,s})(z-z_{c,p})}{r^3_{c(p,s,t)}}-ik_1\frac{3(x-x_{c,s})(z-z_{c,p})}{r^4_{c(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{yzc}=\Psi_{yxc}=\frac{3(y-y_{c,t})(z-z_{c,p})}{r^5_{c(p,s,t)}}-k_1^2\frac{(y-y_{c,t})(z-z_{c,p})}{r^3_{c(p,s,t)}}-ik_1\frac{3(y-y_{c,t})(z-z_{c,p})}{r^4_{c(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{xc}=\frac{\left(x-x_{c,s}\right)}{r^3_{c(p,s,t)}}+ik_1\frac{(x-x_{c,s})}{r^2_{c(p,s,t)}},\qquad \Psi^0_{xc}=-\Psi_{xc},$$

$$\Psi_{yc}=\frac{\left(y-y_{c,t}\right)}{r^3_{c(p,s,t)}}+ik_1\frac{(y-y_{c,t})}{r^2_{c(p,s,t)}},\qquad \Psi^0_{yc}=-\Psi_{yc},$$

$$\Psi_{zc}=\frac{\left(z-z_{c,p}\right)}{r^3_{c(p,s,t)}}+ik_1\frac{(z-z_{c,p})}{r^2_{c(p,s,t)}},\qquad \Psi^0_{zc}=-\Psi_{zc}.$$

Для случая (16, 19), рассеянные решеткой поля представим в виде

$$\vec{E}_{pacc}(\vec{r},t)=\sum_{c=1}^{C}\left(\sum_{m,n=0}^{\infty}\left[\sum_u\frac{2\pi}{dhk_1^3}(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c)\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}\left\{\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{L}_c^{mn}\vec{E}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}\,')-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-ik\mu_0\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)(-1)\hat{P}_c^{mn}\vec{H}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}\,')\right\}e^{i\left(\omega t-\left[\frac{m\pi}{d}\left(x-x_{c,s}\right)+\frac{n\pi}{h}\left(y-y_{c,t}\right)+\beta_{mn}\left|z-z_{c,p}\right|\right]\right)}\right]\right)_c,\tag{22}$$

$$\vec{H}_{pacc}(\vec{r},t)=\sum_{c=1}^{C}\left(\sum_{m,n=0}^{\infty}\left[\sum_u\frac{2\pi}{dhk_1^3}(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c)\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}\left\{\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)(-1)\hat{L}_c^{mn}\vec{H}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}\,')+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+ik\varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{P}_c^{mn}\vec{E}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}\,')\right\}e^{i\left(\omega t-\left[\frac{m\pi}{d}\left(x-x_{c,s}\right)+\frac{n\pi}{h}\left(y-y_{c,t}\right)+\beta_{mn}\left|z-z_{c,p}\right|\right]\right)}\right]\right)_c,$$

где $\hat{L}_c^{mn},\hat{P}_c^{mn}$ - функциональные матрицы вида

$$\hat{L}_c^{mn} = \begin{bmatrix} \left(k^2\varepsilon_0\mu_0 - \dfrac{m^2\pi^2}{d^2}\right) & -\dfrac{m\pi}{d}\dfrac{n\pi}{h} & -\beta_{mn}\dfrac{m\pi}{d} \\ -\dfrac{m\pi}{d}\dfrac{n\pi}{h} & \left(k^2\varepsilon_0\mu_0 - \dfrac{n^2\pi^2}{h^2}\right) & -\beta_{mn}\dfrac{n\pi}{h} \\ -\beta_{mn}\dfrac{m\pi}{d} & -\beta_{mn}\dfrac{n\pi}{h} & \left(k^2\varepsilon_0\mu_0 - \beta_{mn}^2\right) \end{bmatrix},$$

$$\hat{L}_c^{mn} = \begin{bmatrix} 0 & i\beta_{mn} & -i\dfrac{n\pi}{h} \\ -i\beta_{mn} & 0 & i\dfrac{m\pi}{d} \\ i\dfrac{n\pi}{h} & -i\dfrac{n\pi}{d} & 0 \end{bmatrix}.$$

Поле в произвольной точке пространства, лежащей вне сфер, представим в виде (20, 22)

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r},t) + \vec{E}_{pacc}(\vec{r},t),$$

где $\vec{E}_0(\vec{r},t)$ - невозмущенное поле падающей волны.

Из детерминанта системы уравнений (8) определим резонансные условия, когда в сферах $a/\lambda \sim 1$ и проницаемости ε_c, μ_c сфер решетки действительны, в виде

$$\det \mathrm{Re} \left\| \alpha_{sj} \right\| = 0,$$

где $\left\| \alpha_{sj} \right\|$ - основная матрица системы уравнений (8).

Список литературы: 1. *Козарь А.И., Хижняк Н.А.* Отражение электромагнитных волн от резонансной диэлектрической сферы в волноводе // Укр. физ. журн. 1970. Т.15. С.847-849. 2. *Хижняк Н.А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наук. думка, 1986. С.279. 3. *Левин Л.* Современная теория волноводов. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. С.216.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 11.02.2002